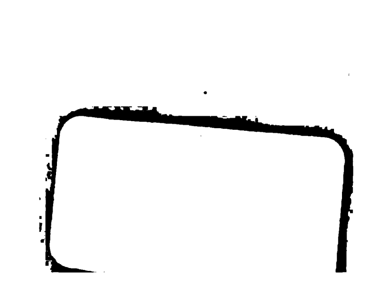
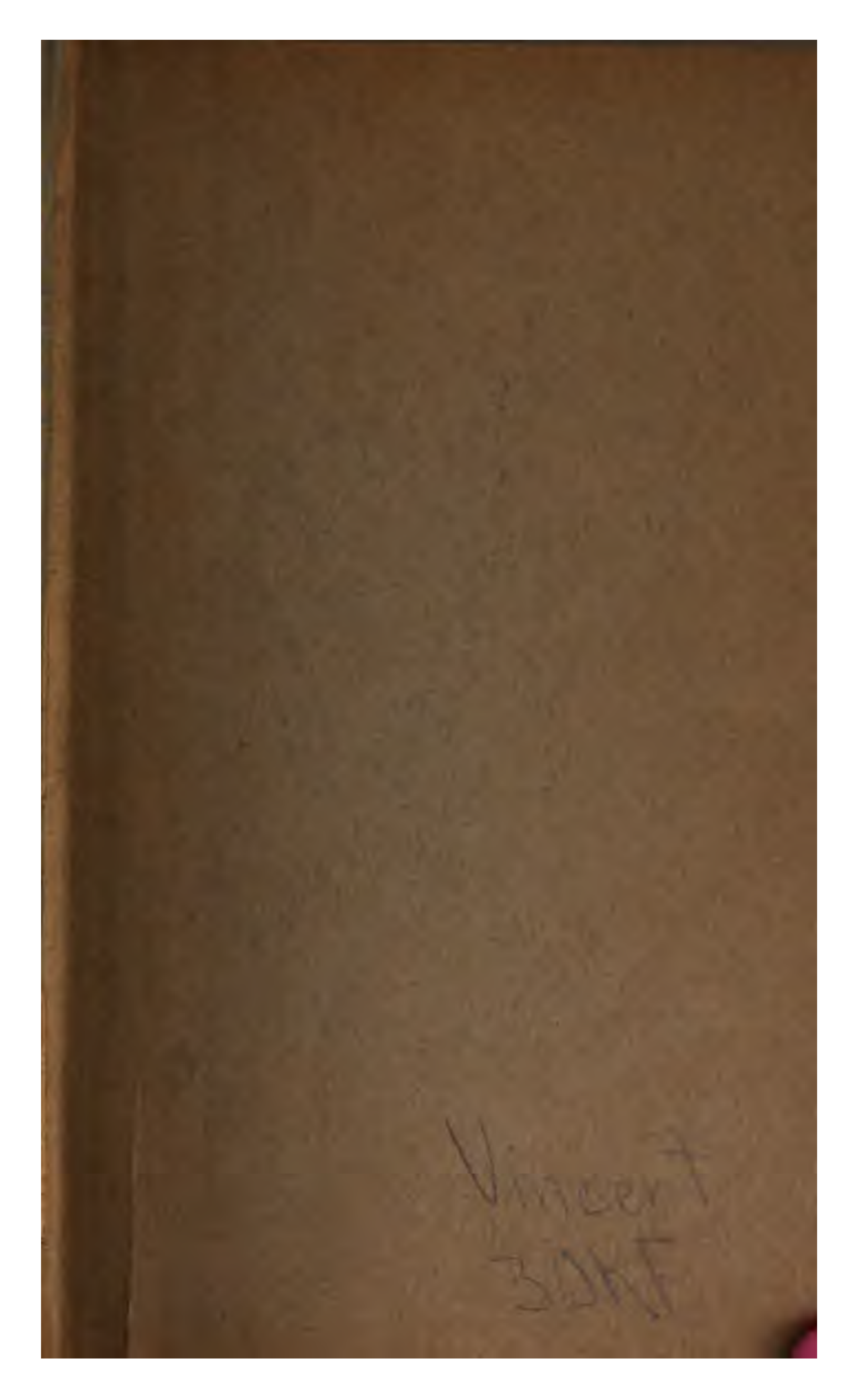



Vincent

COURS
DE GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE.

On trouve chez BACHELIER, *libraire, les Ouvrages suivants du même Auteur.*

Programme du Cours d'Arithmétique et d'introduction à l'Algèbre, 2e édition. (*Sous presse.*)	
Mémoire sur la résolution des équations numériques.	2 fr.
Théorie du parallélogramme de WATT.	2

Ouvrages de M. BOURDON.

Éléments d'Arithmétique, 20e édition, 1843.	5 fr.
— d'Algèbre, 9e édition, 1843.	8
Application de l'Algèbre à la Géométrie, 4e édition, 1837.	7 fr. 50 c.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, no 12.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE,

PAR A.-J.-H. VINCENT,

Professeur de mathématiques au Collége royal de Saint-Louis, ancien élève de l'École Normale, Membre de la Société Philomatique, de la Société royale des Antiquaires de France, Correspondant de la Société royale de Lille, de celles de Douai, de Metz, de Châlons-sur-Marne, etc.

REVU CONJOINTEMENT PAR L'AUTEUR ET PAR

M. BOURDON,

Inspecteur général des études, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, membre de la Société Philomatique, de la Société royale de Lille, etc.

OUVRAGE ADOPTÉ PAR L'UNIVERSITÉ.

CINQUIÈME ÉDITION.





PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Auteur et celle du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces Exemplaires.



AVERTISSEMENT.

Je crois devoir rappeler qu'après avoir donné *trois* éditions successives de mon *Cours de Géométrie élémentaire*, j'annonçai l'intention d'en faire deux rédactions différentes, respectivement appropriées aux deux degrés d'enseignement de nos colléges. Mon *Précis de Géométrie élémentaire*, publié en 1837, fut un commencement d'exécution de ce projet, que des occupations d'une autre nature m'empêchèrent de réaliser entièrement. Cependant, le *Précis* se trouvant épuisé depuis longtemps, j'ai dû songer à une nouvelle édition de mon Cours, édition que je donne aujourd'hui, et qui se trouve être ainsi véritablement la *cinquième*.

Le plan de cette nouvelle édition diffère peu de celui de la *deuxième;* l'extrême docilité dont j'avais fait preuve en m'en écartant, me donne sans doute le droit de dire qu'en définitive, ce plan me paraît être le plus logique, et le plus convenable pour la pratique de l'enseignement. Je prends donc l'engagement de n'y plus rien changer d'essentiel, et de n'apporter dorénavant à mon ouvrage que des modifications de détail dont le but serait d'en améliorer la rédaction.

Mais à cet égard, pourrait-il rester beaucoup à faire, lorsqu'une personne à laquelle j'ai déjà tant d'autres obligations, et que les succès de ses propres ouvrages désigneraient au besoin plus que suffisamment, a bien voulu se charger de soumettre celui-ci à une révision complète?

Le travail dont cette cinquième édition est redevable à M. BOURDON, a eu principalement pour objet de détacher du corps de l'ouvrage [comme j'aurais sans doute dû le faire moi-même dès l'origine], certaines théories un peu difficiles pour les jeunes gens, et de les réunir dans deux chapitres spéciaux, sous forme d'*Appendices*, l'un pour la Géométrie *plane*, l'autre pour la Géométrie de l'*espace*, disposition qui a permis de donner plus de développement à quelques-unes de ces théories, et même d'en introduire de nouvelles. C'est ainsi que, dans les deux Appendices, la théorie des *figures symétriques*, celle du *centre des moyennes distances*, qui se trouve ici pour la première fois, celles des *centres de similitude* et des *axes radicaux*, des *pôles* et des *polaires*, ont pu être traitées avec quelque détail. C'est ainsi encore que dans le premier Appendice, à des idées sommaires sur les propriétés générales des *Courbes* quelconques, on a joint quelques notions sur les courbes les plus simples et les plus usitées: l'*ellipse*, l'*hyperbole*, et la *parabole*. De même, dans le second Appendice, après quelques aperçus sur les différentes familles de surfaces, on a fait connaître par des considérations purement géométriques [*Théorème* de MM. QUETELET et DANDELIN], la nature des intersections d'un cylindre et d'un cône par un plan.

En outre, un chapitre tout entier [le troisième du livre III] a été consacré à l'exposition des principes élémentaires de la *Géométrie descriptive*, principes qui font aujourd'hui partie essentielle du programme d'admission aux diverses Écoles du Gouvernement.

Pour en revenir au projet dont il a été question plus haut, nous avons l'intention de publier, d'ici à quelques mois, un second ouvrage qui différera de celui-ci en ce que les deux Appendices, les préliminaires de la Géométrie descriptive, et aussi les questions qui exigent l'emploi du calcul algébrique, en seront totalement retranchés. Rédigé d'ailleurs sur le même plan et dans le même ordre que le présent ouvrage, il sera mis à la portée de ceux des élèves de nos colléges qui se livrent spécialement aux études littéraires, et qui seront ainsi tout préparés à passer ensuite, s'ils le veulent, et en suivant la même mé thode, à l'étude du *Cours* complet.

ERRATA.

[Le lecteur est invité à faire immédiatement les corrections sur le texte.]

Pages	Lignes	au lieu de	lisez :
9,	12,	l'arc A,	l'arc AB.
37,	7,	BAC,	DAC.
39,	3,	et ND,	et NC.
43,	4 en remontant,	OAB,	AOB.
45,	2,	ABC,	ABC (*fig.* 39).
54,	8 en remont.,	ABD,	ADB.
75,	4 *ibid.*,	PQ,	PG.
82,	7,	OC = OD,	IC = ID.
98,	4,	OA = OB,	OA = OC.
105,	2 en remont.,	dernière,	troisième.
114,	7 *ibid.*,	du point N,	du point B.
140,	2 *ibid.*,	A...A',	B...B'.
Ibid.,	12 *ibid.*,	B,	B ou B'.
144,	4,	AC = BC = ...,	AB = BC = ...
145,	11 en remont.,	AB,	AC.
151,	8 *ibid.*,	BC : BE,	BC : DE.
157,	10,	deux points M, N,	deux couples de points M et M', N et N'.
167,	15,	côté BC,	côté AB.
172,	6 en remont.,	ABCD = 1,	*abcd* = 1.
200,	14,	AN,	MN.
207,	16,	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{R} \cdot r$,	$\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot P.r$.
212,	9,	AB,	BB'.
Ibid.,	8 en remont.,	OA : O'A',	OA : OA'.
219,	6 *ibid.*,	OA'....OP',	CA'...CP'.
221,	1 *ibid.*,	$\sqrt{2}.\frac{1}{2}$,	$\sqrt{2}.\frac{1}{4}$.
Ibid.,	5 *ibid.*,	*figure* 165,	*figure* 166.
239,	9,	*fig.* 182,	*fig.* 181.
Ibid.,	3 en remont.,	*fig.* 183,	*fig.* 182.
280,	16,	retranchant,	ajoutant.
321,	13,	AP...EF,	AD...EF ou BC.
334,	4,	BC,	BD.
335,	11 en remont.,	les trois points,	les trois points E, O, F.
347,	2,	SO,	SD.
Ibid.,	13,	ASB,	CSB.
352,	1,	ETC, CTD,	ETF, FTD
368,	16,	AKGC,	AKBC.
384,	6,	sphérique donné,	sphérique donné ABC (*fig.* 300).
422,	7,	O,	*o*.
429,	2,	MN, NR,	MN, MR.
447,	7,	$\frac{1}{3}$L,	$\frac{1}{3}$SL.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE III. — DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS L'ESPACE.

CHAPITRE I. — *Du plan et des corps terminés par des surfaces planes.*

CHAPITRE II. — *Des trois corps ronds.*

CHAPITRE III. — *Problèmes sur la Géométrie de l'espace. — Principes de Géométrie descriptive.*

LIVRE IV. — DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE I. — *Similitude des polyèdres. — Détermination de leurs aires et de leurs volumes.*

CHAPITRE II. — *Aires et volumes des trois corps ronds.*

CHAPITRE III. — *Problèmes numériques sur l'étendue à trois dimensions.*

APPENDICE

AUX DEUX DERNIERS LIVRES.

PREMIÈRE SECTION.

De la symétrie dans l'espace. — Centres, axes et plans de symétrie. — Plans diamétraux. — Centre des moyennes distances. — Centres de similitude. — Construction des polyèdres.

SECONDE SECTION.

Des surfaces de révolution. — Des surfaces développables et des surfaces gauches. — Intersections d'un cylindre et d'un cône par un plan.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

COURS
DE GÉOMÉTRIE
ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA LIGNE DROITE, LE PLAN, ET LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

N° 1. — Tout corps occupe, dans L'ESPACE *indéfini* qui embrasse l'univers matériel, un LIEU *déterminé* ou *fini*, que l'on appelle proprement UN ESPACE.

Cet espace fini, rempli par le corps, a des *limites* ou *bornes* qui le distinguent du reste de l'espace; elles constituent ce que l'on nomme la SURFACE du corps. La surface étant ainsi le lieu où se fait la séparation entre un corps et le reste de l'espace, appartient également à l'un et à l'autre; de plus, comme il peut exister, dans l'espace indéfini, une infinité de corps ayant chacun leurs limites propres, il en résulte que

Dans l'espace, on peut concevoir une infinité de surfaces.

Lorsqu'une surface est *rencontrée* ou *coupée* par une autre surface, le lieu de leur *intersection* mutuelle se nomme une LIGNE; cette ligne appartient à la fois aux deux surfaces. D'ailleurs, une ligne provenant, en général, de l'intersection de deux surfaces, et une même surface pouvant être rencontrée par une infinité

d'autres entièrement distinctes, il s'ensuit que

Sur une surface quelconque, on peut concevoir une infinité de lignes.

Enfin, lorsque deux lignes viennent à se rencontrer, le lieu de leur intersection se nomme un POINT. Ce point est commun aux deux lignes; et comme un point résulte de la rencontre de deux lignes, qu'une même ligne peut être coupée, par une infinite d'autres, en autant de lieux différents, on doit conclure que

Toute ligne peut être regardée comme ayant une infinité de points (*).

N° 2. — Quoique l'on acquière la notion du point par la considération des lignes, la notion de la ligne par la considération des surfaces, et celle de la surface par la considération des *corps*, c'est-à-dire de choses toutes *matérielles*, on n'en doit pas conclure pour cela que les points, les lignes, et les surfaces, soient eux-mêmes des objets matériels: en vertu d'une faculté inhérente à notre intelligence, nous parvenons facilement à nous représenter le point sans les lignes qui le déterminent, la ligne en dehors des surfaces dont elle est l'intersection, la surface indépendamment du corps ou de l'espace auquel elle sert de limite, enfin l'espace lui-même comme étant absolument *immatériel;* et c'est le résultat de ces différentes abstractions que nous nommons *point, ligne, surface,* ou *espace*. C'est encore ainsi que nous disons : *les points d'une ligne, d'une surface, d'un espace, les lignes d'une surface, etc.*

N° 3. — L'espace, la surface, et la ligne, peuvent être envisagés sous deux points de vue distincts : ou sous le rapport de leurs diverses *formes* que l'on nomme généralement des FIGURES, ou sous le rapport de leurs *grandeurs* relatives que l'on comprend sous la dénomination d'ÉTENDUE.

(*) Quelques auteurs, suivant une marche diamétralement opposée à celle que nous adoptons ici, partent de l'idée primitive du *point,* qu'ils définissent par une négation : *Le point est ce qui n'a pas de partie* (*Euclide,* liv. 1, défin. 1re); et alors ils considèrent la ligne comme étant engendrée par le mouvement du point, la surface comme engendrée par le mouvement de la ligne, et l'espace par le mouvement de la surface.

L'étendue prend le nom particulier de VOLUME, d'AIRE, ou de LONGUEUR, suivant que cette étendue est la grandeur relative d'un *espace*, d'une *surface*, ou d'une *ligne*. Ainsi, la *longueur* d'une ligne, ou l'*étendue linéaire*, n'est autre chose que la grandeur de cette ligne *évaluée* ou *mesurée* en *unités* de ligne. De même, l'*aire* d'une surface, ou l'*étendue superficielle*, est la grandeur de cette surface évaluée ou mesurée en unités de surface ; enfin le *volume* ou l'*étendue d'un espace* [ou d'un corps], est la grandeur de cet espace, évaluée ou mesurée en unités d'espace (*).

Quant aux figures, elles portent des noms divers que nous ferons connaître par la suite.

La GÉOMÉTRIE est la science qui s'occupe de ces deux principaux objets : les *propriétés des* différentes sortes de *figures*, et la *mesure de l'étendue* considérée sous les différents aspects que nous venons d'indiquer.

N° 1. — *Le point n'a ni figure ni étendue ;* — et c'est là surtout ce qui le distingue des autres objets de la Géométrie, qui sont tous *descriptibles* et *mesurables*.

Néanmoins, comme on a souvent besoin de considérer un ou plusieurs points *isolés*, on convient de désigner chacun d'eux par une légère *marque* faite avec un crayon, une plume, ou tout autre instrument taillé en pointe et propre à laisser une empreinte sur une surface donnée. Mais cette marque n'affecte aucune forme déterminée ; et son étendue doit toujours être considérée comme rigoureusement nulle.

D'ailleurs, pour distinguer les uns des autres les différents points de l'espace, on place, à côté de la marque qui représente chacun d'eux, une lettre qui sert à l'énoncer dans le discours : c'est ainsi que l'on dit : le *point* A, le *point* B, le *point* C,... (*fig.* 1). FIG. 1.

(*) Dans la plupart des Traités de Géométrie, pour distinguer les trois sortes d'étendue, on emploie les dénominations d'étendue à *une dimension* [la longueur], d'étendue à *deux dimensions* [la longueur et la largeur], ou d'étendue à *trois dimensions* [*longueur, largeur*, et *hauteur* nommée aussi *épaisseur* ou *profondeur*] ; mais nous avons cru devoir omettre ici ces dénominations, à cause de l'impossibilité d'en rendre raison, pour le moment, d'une manière rigoureuse.

De la ligne droite.

N° 5. — De toutes les lignes dont traite la Géométrie, la plus simple est la LIGNE DROITE.

Quoique l'idée de la ligne droite soit une des premières auxquelles nous conduisent notre expérience et l'usage de nos sens, il n'en est pas moins difficile de la bien définir. Presque tous les auteurs se bornent à dire, d'après Archimède, que—*La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre;* — et pour entendre cette définition, il faut concevoir qu'un point isolé (n° 4) et *matérialisé* par la pensée, se meuve vers un autre point, en suivant, pour franchir l'intervalle qui les sépare, le plus court de tous les chemins, en nombre infini, qui peuvent mener de la position primitive du premier point à celle du second. C'est là route ainsi parcourue par le point supposé mobile, que l'on nomme une LIGNE DROITE, ou simplement une DROITE.

Mais la définition deviendra plus générale si nous disons qu'une
FIG. 2. droite est une ligne indéfinie MNOP... (*fig.* 2), que nous nous représentons comme jouissant [exclusivement à toute autre ligne] de la propriété d'être le plus court chemin entre deux quelconques de ses points, M et N, N et O, O et P,..., M et O, M et P, N et P,..., pris partout où l'on voudra sur son étendue illimitée.

Toute ligne droite MN doit être, par la pensée, *prolongée* indéfiniment dans les deux sens MNO...., NML...., à moins qu'en vertu de circonstances particulières, elle ne se trouve limitée, soit dans les *deux sens*, soit dans *un seul*.

Lorsqu'une droite sera terminée en deux points, M et N, nous dirons qu'elle est *déterminée* de longueur; et quant aux portions de droite INO...., IML...., limitées dans un sens, en un point I, et illimitées dans l'autre, nous les nommerons des *segments* de droite.

La trace indéfinie, soit figurée, soit idéale, d'une ligne droite, se nomme aussi sa *direction;* et l'on doit admettre que la direction est *unique* pour chaque droite en particulier, ce qui veut dire qu'une portion de droite MN ne peut avoir qu'un seul *prolongement* indéfini dans les deux sens MNOP...., NML....

N° 6. — *Toutes les lignes droites sont*, par leur nature même, *superposables;* — et pour que la superposition ait lieu parfaitement, il suffit que *deux* de leurs *points coïncident*. Cette propriété, qui caractérise essentiellement la ligne droite, doit être considérée comme évidente, et par conséquent admise *à priori*.

D'où il suit que—*Deux droites coïncident dans toute leur étendue indéfinie* lorsqu'elles ont été amenées à passer par *deux points communs*.

En d'autres termes,—*Deux points déterminent la position d'une droite*, — c'est-à-dire qu'*On peut toujours faire passer une droite par ces deux points* [d'après la définition]; — et *l'on ne peut en faire passer qu'une seule*.

Voilà pourquoi il est d'usage de désigner une droite par *deux lettres*, M et N (*fig.* 2), qui désignent deux de ses points. FIG. 2.

Il résulte encore de là que — *Deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un seul point commun*. — On dit alors qu'elles sont *concourantes*, ou qu'elles concourent en un même point.

Enfin, si sur une droite MN, déterminée de longueur (n° 5), on marque un point I, tel qu'en faisant tourner la portion IN autour de ce point, on puisse amener le point N à tomber au point M, les deux parties IN, IM, ainsi *superposables*, sont dites *égales* entre elles; et le point I se nomme le *milieu* de la droite MN.

Du plan.

N° 7.—La plus simple de toutes les surfaces est la SURFACE PLANE, ou simplement le PLAN : or, cette expression désigne une surface indéfinie sur laquelle on conçoit que, par chacun de ses points, une ligne droite peut être appliquée exactement dans toutes les directions (*). Ce qui nous fournit un moyen fort simple pour reconnaître si une surface est plane.

(*) Une glace bien polie, une feuille de papier bien tendue, peuvent nous donner une idée de surfaces sensiblement *planes*.

Il résulte nécessairement de la définition du plan et de la nature de la ligne droite, que

Toute droite qui a deux de ses points dans un plan, y est contenue tout entière:

Car ces deux points déterminent une des directions dans lesquelles la droite peut être placée sur la surface.

Ainsi — *Une droite ne saurait être en partie sur un plan et en partie au dehors.*

Toutefois, on conçoit qu'elle peut n'avoir qu'*un seul point* commun avec le plan; auquel cas, on dit que la droite rencontre ou *perce* le plan, et que le plan *coupe* la droite. Il est visible qu'alors les deux segments (n° 5) de la droite sont situés respectivement de part et d'autre du plan.

N° 8. — De même qu'une droite est déterminée de position par deux points (n° 6), de même

La position d'un plan se trouve déterminée par trois points, pourvu que ces trois points *ne soient pas situés sur une même ligne droite;* ce qui veut dire,

1° — *que* L'*on peut toujours faire passer un plan par trois points non situés en ligne droite;* — *et* 2° — que *l'on ne peut en faire passer qu'un seul.*

Ainsi — *Deux plans qui ont trois points communs non en ligne droite, coïncident dans toute leur étendue indéfinie.*

Cette propriété du plan joue, par rapport à la surface plane, le même rôle que la propriété du n° 6 par rapport à la ligne droite. On doit, par conséquent, l'admettre également comme évidente (*).

D'où il suit nécessairement que

L'intersection commune de deux plans est une ligne droite.

N° 9. — Enfin, les plans, comme les lignes droites, sont toujours *superposables;* il suffit d'amener *trois points* de l'un, situés non en ligne droite, à coïncider avec trois points d'un autre plan, chacun à chacun.

(*) Nous reviendrons, au reste, sur cette proposition dans le 3e livre, au chapitre des plans.

N° 10. — *Deux droites*, AB, AC (*fig.* 3), *qui se coupent, déterminent également un plan*; Fig. 3.

Car si l'on fait passer un plan par leur point de rencontre A, et par deux points quelconques, B et C, pris respectivement sur chacune d'elles, ce plan contiendra les deux droites (n° 7); et de plus, ce sera le seul qui puisse les contenir (n° 8). — On le nomme, pour cette raison, le *plan des deux droites*.

Il est bon de remarquer d'ailleurs, que, dans ce cas, le système [ou l'assemblage] des deux droites partage l'étendue de leur plan en quatre portions distinctes, BAC, CAD, DAE, EAB, auxquelles on donne le nom d'ANGLES. La considération de cette sorte de grandeur, qui se présente à chaque instant dans les diverses parties de la Géométrie, est de la plus grande importance.

N° 11. — On donne le nom de *figure plane* à une figure dont tous les points sont *dans un même plan*. — La ligne droite est essentiellement *plane* (n° 7); et elle partage tout plan qui la contient, en deux parties superposables que nous nommerons les *deux régions du plan* par rapport à la droite.

Des lignes et des surfaces brisées ou *courbes*.

N° 12. — On appelle LIGNE BRISÉE toute *ligne*, ABCDEF (*fig*. 4), *composée de droites consécutives*, AB, BC, CD, DE,..., *déterminées de longueur*, et *ayant, deux à deux, une extrémité commune*. — Ces portions de droites, ainsi limitées aux points de rencontre B, C, D, E,..., se nomment les *côtés* de la figure. Fig. 4.

Toute *ligne brisée qui n'est pas plane* (n° 11) est dite une LIGNE GAUCHE.

On nomme, en général, LIGNE COURBE, ou simplement COURBE, toute *ligne dont aucune portion appréciable n'est rigoureusement droite*. — Telles sont les lignes ABC, ABCDE,... (*fig*. 5). Fig. 5.

Une LIGNE MIXTE est une *ligne brisée qui se compose de lignes droites et de lignes courbes*.

On nomme SURFACE BRISÉE toute *surface composée de portions de plans consécutifs ayant, deux à deux, une intersection commune* — laquelle est nécessairement une droite, ainsi que nous l'avons vu au *numéro* 8.

Une SURFACE COURBE est une *surface dont aucune portion appréciable n'est rigoureusement plane.*

Enfin, on appelle SURFACE MIXTE toute *surface en partie plane et en partie courbe.*

Du cercle.

N° 13.—La plus simple et la plus importante de toutes les lignes courbes est la LIGNE CIRCULAIRE, ou la CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.
FIG. 6. — On nomme ainsi une *ligne plane,* ABCD (*fig.* 6), *fermée* [ou *rentrante sur elle-même*], *dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur* O que l'on appelle le CENTRE de la circonférence. — Le CERCLE est la *portion de plan limitée par la circonférence;* mais ce nom se donne quelquefois, pour abréger, à la *circonférence* elle-même.

Chacune des droites OA, OB, OC, OD,..., menées du centre à la circonférence, est dite un RAYON du cercle.

Tous les rayons d'un même cercle sont égaux, d'après la définition.

On appelle DIAMÈTRE d'un cercle, toute *droite,* telle que AC, *qui aboutit à deux points de la circonférence en passant par le centre.*

Tous les diamètres d'un même cercle sont égaux, — puisque chacun d'eux se compose de la somme de deux rayons OA, OC.

De plus,—*Tout diamètre* AC *divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.*

En effet, plions la figure suivant AC, ou faisons tourner la partie ABC autour de AC comme *charnière,* de façon que cette partie vienne s'appliquer sur l'autre ADC. Il est évident que les deux portions de circonférence se *recouvriront* entièrement; car si l'une d'elles pouvait déborder l'autre, les points de la circonférence ne seraient pas tous également éloignés du centre, ce qui implique contradiction avec la définition du cercle. Ainsi, AC divise le cercle en deux *demi-cercles*, et la circonférence en deux *demi-circonférences.*

FIG. 7. N° 14.— Une *portion* quelconque, ACB ou ADB (*fig.* 7), *de circonférence,* se nomme un ARC *de cercle;* l'arc prend le nom de QUADRANT lorsqu'il est le *quart* de la circonférence.

La portion de droite AB comprise entre deux points, A et B, de la circonférence, est dite la CORDE ou la *soutendante* de l'arc ACB ou de l'arc ADB; c'est-à-dire que chaque corde *soutend* deux arcs dont la somme vaut une circonférence entière.

Quand la corde passe par le centre, elle devient un diamètre; et les deux arcs soutendus sont des *demi-circonférences*.

Soit C un point placé sur l'arc ACB, de manière que, si l'on tire le diamètre COD, et qu'on applique la demi-circonférence CBD sur la demi-circonférence CAD, le point B tombe en A : les deux arcs AC, BC, doivent se recouvrir parfaitement, et sont dits, pour cette raison, *égaux entre eux*. Le point C se nomme le *milieu de l'arc* A. De même, les arcs AD, BD, étant égaux entre eux, le point D est le *milieu* de l'arc ADB. En outre, comme, après la superposition des deux demi-cercles, le point I reste commun et que les points A et B coïncident, il s'ensuit que IA est égal à IB, c'est-à-dire que le point I est le milieu de la corde AB.

Chacune des portions IC, ID, du diamètre CD, comprises respectivement entre les milieux C et D, des deux arcs ACB, ADB, et le milieu I de leur corde commune AB, se nomme la *flèche* de l'arc correspondant.

Enfin, on donne le nom de SEGMENT DE CERCLE à la *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB, *et sa corde* AB; et de SECTEUR CIRCULAIRE à la *portion de cercle comprise entre un arc*, ACB ou ADB, *et les deux rayons*, OA, OB, *qui aboutissent à ses extrémités*.

De la règle et du compas.

N° 18. — La ligne *droite* et le *cercle*, qui sont les seules lignes dont traite la *Géométrie élémentaire*, se tracent respectivement sur un plan, à l'aide de la RÈGLE et du COMPAS (*).

(*) D'autres instruments, tels que l'*Équerre*, le *Compas de Proportion*, le *Rapporteur*, le *Graphomètre*, etc., sont également employés dans la Géométrie pratique; et nous nous réservons d'en donner la description à la fin de l'ouvrage.

Fig. 8. Pour faire passer une droite par deux points A et B (*fig.* 8), donnés sur un plan, on se sert d'une *règle bien dressée*, c'est-à-dire à bords saillants supposés parfaitement *rectilignes* [et il existe des moyens mécaniques de satisfaire à cette condition d'une manière suffisamment rigoureuse]. En disposant cette règle *à plat* sur le plan, de manière que l'un des bords passe par les deux points donnés A et B, on fait ensuite glisser le long de ce bord un *crayon*, une *plume*, un *tire-ligne*, etc.

Fig. 9. Le *compas* est un instrument (*fig.* 9) composé de deux *branches* [généralement *égales*], terminées en *pointe* à l'une de leurs extrémités, et réunies à l'autre extrémité [nommée *tête du compas*] par une articulation qui permet aux branches de *s'ouvrir* ou de *s'écarter* plus ou moins l'une de l'autre. Une des pointes est destinée à marquer le centre du cercle qu'on veut décrire, tandis que l'autre pointe doit être *armée* d'un crayon ou d'une plume qui trace alors la circonférence.

Lorsqu'on veut *décrire* au moyen du compas, sur un plan donné, une circonférence dont le centre soit situé en un point donné A du plan, et dont le rayon ait une longueur déterminée AB, on commence par donner à l'instrument une ouverture égale à la longueur donnée, c'est-à-dire telle que les deux pointes puissent être placées en même temps sur les extrémités de cette longueur; ensuite on fixe la pointe *sèche*, A, sur le point donné, et l'on fait glisser la pointe *armée*, B, sur le plan. Cette dernière pointe, en tournant autour du point A, trace la circonférence demandée; c'est ce qu'on appelle

Décrire une circonférence d'un point donné A *comme centre, et d'un rayon égal à une droite donnée* AB.

N° 16.—*Deux circonférences décrites de points différents comme centres, mais avec le même rayon, sont égales et superposables;*— car, si l'on *transporte* le second cercle sur le premier, de manière que leurs centres se confondent ainsi que leurs plans, les deux circonférences coïncideront dans toute leur étendue; sans quoi tous les rayons de l'une ne seraient pas égaux à tous les rayons de l'autre.

Des diverses espèces de propositions et de questions.

N° 17. — On distingue plusieurs espèces de propositions et de questions, auxquelles on est convenu de donner des noms différents :

1° — L'AXIOME est une *proposition évidente par elle-même*, dont le simple énoncé suffit pour en faire immédiatement reconnaître la vérité. — Telles sont les suivantes :

— *Un tout est plus grand que chacune de ses parties*, — ou bien — *La partie est plus petite que le tout ;*

— *Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles ;*

— *Deux quantités égales, augmentées ou diminuées à la fois d'une même quantité, donnent des résultats égaux*, — etc.

2° — La DEMANDE ou le *postulatum* est une *proposition dont la vérité est admise sans démonstration*, quoiqu'elle n'ait pas tout à fait le même degré d'évidence que l'axiome.

3° — Le THÉORÈME est une *proposition dont il est nécessaire de prouver la vérité ;* ce que l'on fait au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*, en s'appuyant sur des vérités déjà reconnues.

Dans l'énoncé d'un théorème, on distingue ordinairement deux parties principales, dont la première, appelée *hypothèse*, est une supposition faite sur un certain *sujet*, et dont l'autre, nommée *conclusion*, est la conséquence de cette supposition.

4° — La RÉCIPROQUE d'un théorème [ou d'une proposition quelconque] est une autre proposition qui résulte d'une sorte de *renversement* de la première, de telle manière que, le sujet principal restant le même, la conclusion prend la place de l'hypothèse, *et vice versâ*.

Souvent une même proposition admet plusieurs réciproques : et c'est ce qui a lieu toutes les fois que l'hypothèse est *complexe*, c'est-à-dire peut se décomposer en plusieurs propositions partielles et indépendantes les unes des autres.

Il existe aussi beaucoup de propositions dont les réciproques sont *fausses :* de là résulte, en général, la nécessité, soit de démontrer les propositions *inverses* lorsqu'elles sont vraies et ne

découlent pas immédiatement de leurs *directes*, soit, quand elles sont fausses, d'en faire ressortir l'absurdité.

Enfin, il y a des propositions qui ne sont susceptibles d'aucune espèce de renversement, c'est-à-dire dont les énoncés pris *à rebours*, n'offrent aucun sens raisonnable à l'esprit.

5° — Le Corollaire est la *conséquence immédiate d'une proposition.*

On doit voir, par cette définition, qu'il ne saurait exister de différence bien essentielle entre un corollaire et un théorème. En effet, d'une part, presque tous les théorèmes sont des conséquences de ceux qui les précèdent plus ou moins immédiatement; et d'autre part, les corollaires ont souvent autant d'importance que les théorèmes sur lesquels ils s'appuient. Toutefois, la dénomination de *corollaire*, donnée à une proposition, suppose presque toujours que, s'il faut un nouveau raisonnement pour en établir la vérité, ce raisonnement est assez simple pour qu'on puisse le supprimer sans beaucoup d'inconvénients.

6° — Le Problème est une question qui a pour objet la *détermination de certaines choses inconnues*, au moyen d'une ou de plusieurs choses *connues* ou *données*, qui ont avec les premières des relations indiquées par l'énoncé.

On distingue deux espèces de problèmes : les *problèmes graphiques* ou relatifs aux *figures*, et les *problèmes numériques* ou relatifs à l'*étendue* (n° 3).

7° — Quelquefois, l'exposition d'une *théorie* ou la résolution d'une suite de problèmes exige une *proposition préliminaire* qui leur sert de *préparation* ou de *base;* on donne à une pareille proposition le nom de Lemme.

8° — Enfin, le Scolie est une *remarque* faite sur une ou plusieurs des propositions qui ont précédé, et dont l'objet spécial est de faire ressortir l'*extension* qu'on peut leur donner, les *restrictions* auxquelles elles sont soumises, leur *liaison* mutuelle, leur *utilité*, etc.

Souvent le scolie donne lieu à établir de nouvelles *définitions*, à démontrer de nouveaux théorèmes, à résoudre de nouveaux problèmes.

Méthodes de démonstration.

N° 18. — Des différents moyens de démonstration particuliers à la Géométrie, le plus fécond, et le plus simple en même temps lorsqu'il est susceptible d'être employé, se trouve dans la *superposition* des figures. Il consiste à prouver que l'on peut faire *coïncider*, c'est-à-dire que l'on peut *appliquer* exactement deux figures l'une sur l'autre; ce qui conduit alors à conclure l'*égalité* de toutes leurs parties, *chacune à chacune*.

On distingue *deux modes de superposition* qu'il est nécessaire de caractériser. Pour cela, observons que toute figure tracée d'abord sur un plan, et ensuite détachée de ce plan par la pensée, offre toujours *deux faces* que l'on peut appeler le *dessus* et le *dessous* de la figure, ou bien, en termes vulgaires, l'*endroit* et l'*envers*. Or, les deux faces qui, dans la superposition, s'appliquent l'une contre l'autre, ou en *regard* l'une de l'autre, peuvent être, ou des faces *de même nom*, ou des faces *de noms contraires*.

Cela posé, on dit que la superposition est *directe* toutes les fois que les faces *de noms opposés*, dans les deux figures, sont appliquées l'une contre l'autre; et la superposition est dite *inverse* si les deux faces *de même nom* se regardent mutuellement.

On a un exemple du premier cas dans la démonstration exposée au n° 16, et un exemple du second dans la démonstration qui termine le n° 15.

N° 19. — La superposition *directe* d'une figure plane sur une autre tracée dans le même plan, peut toujours s'effectuer au moyen de *deux mouvements* successifs, l'un de TRANSLATION, l'autre de PIVOTEMENT ou de ROTATION autour d'un certain point appelé *Centre de rotation* ou *de pivotement*. — Quelquefois même, un seul des mouvements suffit. — Mais pour la superposition *inverse*, il faut, de plus, un *troisième* mouvement qui consiste à faire *tourner* la figure mobile autour d'une *droite* située dans le plan et considérée comme *charnière*, droite que l'on nomme *Axe de* RABATTEMENT, ou *de* RÉVOLUTION.

Nous aurons par la suite une foule d'occasions d'éclaircir, par des exemples, le principe de l'égalité des figures par superposition.

N° **20**.—Il existe un autre moyen de démonstration, plus général encore que le précédent, en ce que ses applications ne se bornent pas à la Géométrie, et peuvent s'étendre à toutes les sciences de raisonnement. Cette méthode, connue sous le nom de Réduction a l'Absurde, consiste à supposer d'abord que la proposition à établir ne *soit pas vraie*, puis, par certaines déductions tirées de vérités déjà reconnues et rigoureusement constatées, à faire ressortir une contradiction avec quelques-unes de ces vérités, ou avec la supposition elle-même.

Un pareil genre de raisonnement, quoique très-rigoureux, a pourtant quelque chose d'*indirect*; aussi doit-on en faire usage avec beaucoup de réserve, et surtout quand on a déjà acquis, par certaines considérations, un pressentiment de la vérité qu'il s'agit de mettre en évidence, comme il arrive, en particulier, pour toutes les propositions dites *réciproques* ou *inverses*. (*Voyez* le n° **17**, 4°.)

Pour donner un exemple de ce mode de démonstration, nous choisirons une proposition qui se décompose en *trois* propositions distinctes donnant lieu à autant de réciproques; et nous allons faire voir comment la *réduction à l'absurde* peut être employée à démontrer ces dernières:

Un cercle étant tracé sur un plan,

1° — *Tout point* [sujet] *situé sur la circonférence* [hypothèse], *est à une distance du centre égale au rayon* [conclusion];

2° — *Tout point situé en dedans du cercle, est à une distance du centre plus petite que le rayon;*

3° — *Tout point situé en dehors du cercle, est à une distance du centre plus grande que le rayon.*

La première de ces propositions est comprise dans la définition même du cercle; et les deux autres en sont des conséquences évidentes.

Voici maintenant les réciproques :

Un cercle étant tracé sur un plan,

1° — *Tout point* (même sujet) *dont la distance au centre est égale au rayon* [hypothèse], *est situé sur la circonférence* [conclusion];

2° — *Tout point dont la distance au centre est plus petite que le rayon, est situé en dedans du cercle;*

3° — *Tout point dont la distance au centre est plus grande que le rayon, est situé en dehors du cercle.*

Ces trois réciproques résultent nécessairement de l'existence supposée admise, des trois propositions directes. Par exemple, si le point donné est à une distance du centre, moindre que le rayon, il ne peut être situé qu'en dedans du cercle; car, pour qu'il fût situé sur la circonférence ou en dehors du cercle, il faudrait, en vertu de la première et de la troisième des propositions directes, que sa distance au centre fût égale ou supérieure au rayon; ce qui, dans un cas comme dans l'autre, impliquant contradiction avec l'hypothèse, est par conséquent *absurde*.

N° **21**. — Nous pouvons dès à présent réduire en règle générale le mode de démonstration que nous venons d'employer, et poser en conséquence le principe suivant, qui est de la plus grande importance :

Toutes les fois que, dans une proposition ou une série de propositions, on a fait toutes les HYPOTHÈSES *admissibles sur un* SUJET *déterminé, et que ces hypothèses ont conduit à des* CONCLUSIONS *respectives essentiellement distinctes, et dont chacune exclut toutes les autres, on peut affirmer que les* RÉCIPROQUES *des propositions établies sont toutes* VRAIES.

Ainsi, en revenant sur les trois premières propositions du numéro précédent, comme on aperçoit sur-le-champ, — 1° — que le point, pris pour *sujet*, ne peut avoir que *trois* sortes de positions essentiellement différentes dans le plan du cercle; — 2° — que pour chacune de ces positions, il y a une conclusion particulière relativement à sa distance au centre; — et 3° — qu'enfin une quelconque des trois conclusions exclut les deux autres: alors, on ne peut plus mettre en doute l'existence d'aucune des trois réciproques.

Nous engageons les élèves à se bien pénétrer de ce principe qui est applicable à la plupart des propositions inverses.

N° **22**. — Nous terminerons ce qui a rapport aux méthodes de démonstration, en signalant deux sortes de *faux raisonnements*,

très-communs de la part des commençants, et contre lesquels ils ne sauraient assez se tenir en garde : ce sont, en termes de logique, le CERCLE VICIEUX, et la PÉTITION DE PRINCIPE.

Le *cercle vicieux* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, on s'appuie, soit implicitement, soit explicitement, sur une autre proposition qui, d'après la marche que l'on a suivie, ne peut elle-même être démontrée qu'à l'aide de la première.

La *pétition de principe* est un raisonnement dans lequel, pour démontrer une proposition, on s'appuie sur la proposition elle-même. — C'est donc une sorte de cercle vicieux.

Rien n'est plus propre à prémunir l'esprit contre ces grossières violations des premiers principes de la logique, que de consulter souvent, et même de tâcher de se graver dans la mémoire le *programme*, ou la *table des matières*, qui se trouve placée en tête de cet ouvrage, afin d'avoir sans cesse présent à l'esprit, soit l'*ordre* des différentes propositions, soit l'*enchaînement* des diverses parties d'une même proposition ; car c'est surtout en perdant de vue cet ordre et cet enchaînement, que l'on s'expose à commettre, dans le premier cas, un cercle vicieux, et dans le second, une pétition de principe.

Division générale de cet ouvrage.

N° 23. — Les figures planes étant celles que l'esprit se représente le plus facilement, et les propriétés de toutes les figures se ramenant, d'ailleurs, à celles des figures planes, tous les Auteurs s'accordent à diviser la Géométrie en *deux* PARTIES *principales :*

1° — La GÉOMÉTRIE PLANE, qui a pour objet l'étude des *propriétés* des *figures planes* (n° 11), et la mesure des *deux* sortes d'*étendue* qu'elles présentent (n° 3) ;

2° — La GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE, qui comprend les *propriétés* des *figures* dont *tous les points ne sont pas dans un même plan*, et la mesure des *diverses sortes d'étendue* qu'elles présentent.

Chacune de ces deux parties principales se subdivise ensuite en *deux* autres *parties secondaires* ou LIVRES, suivant que l'on étudie

les *figures en elles-mêmes*, ou qu'on les considère sous le point de vue des *relations métriques* ou des *rapports numériques* auxquels donnent lieu les portions de lignes, de surfaces, *etc*.... dont elles sont composées. — Chaque livre est divisé en *trois* CHAPITRES; de sorte que l'ouvrage entier se compose en définitive de *quatre livres* en *douze chapitres*.

Quant à la division des chapitres, chacun d'eux contient un certain nombre de *paragraphes*, et chaque paragraphe, *un* ou *plusieurs* groupes de *propositions* ou de *questions*.

Le *premier livre* traite des *propriétés* de la ligne droite et du *cercle*, *abstraction* faite de leur étendue et *de toute relation numérique* autre que celles qui se rattachent à l'égalité des figures; le *second* contient l'exposition de celles des propriétés des figures planes, qui dépendent plus particulièrement du *calcul numérique*.

Le *premier chapitre* du *premier livre* comprend les propriétés des FIGURES RECTILIGNES; le *second chapitre*, celles du CERCLE et des figures qui en dépendent; et le *troisième chapitre* renferme, sous la dénomination de PROBLÈMES, des *applications* de toutes les théories qui ont fait l'objet des deux premiers chapitres.

Le *premier chapitre* du *second livre* traite des LIGNES PROPORTIONNELLES, des FIGURES SEMBLABLES, et de la détermination des AIRES des *figures rectilignes*; le *second chapitre*, des *lignes proportionnelles* considérées dans le CERCLE, de la détermination des aires des POLYGONES RÉGULIERS et du CERCLE; enfin, le *troisième chapitre* se compose de PROBLÈMES ou *applications* des théories exposées dans les deux premiers chapitres.

Ces deux livres sont suivis d'un APPENDICE contenant diverses théories qui, sans faire partie essentielle des *Éléments* proprement dits, n'en sont pas moins importantes. Cet Appendice présente en outre des considérations générales sur les *courbes*, et l'exposition des propriétés élémentaires des courbes les plus simples et les plus importantes après le cercle.

Nous avons suivi un ordre tout à fait analogue dans le développement des deux autres livres.

Ainsi, les *deux premiers chapitres* du *troisième livre* traitent des propriétés du PLAN et de la LIGNE DROITE considérés dans

N. B. — Dans cette première partie toutes les figures sont supposées dans un seul et même plan.

LIVRE PREMIER.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS UN PLAN.

PRÉLIMINAIRES.

NOUVELLES DÉFINITIONS NÉCESSAIRES A L'INTELLIGENCE DU PREMIER LIVRE. — CONSÉQUENCES QUI EN DÉRIVENT IMMÉDIATEMENT.

Des angles en général.

N° **24.** — On donne (n° **10**) le nom d'Angle à chaque *portion indéfinie de plan, comprise entre deux droites*, BD, CE (*fig.* 3), *qui se coupent* en un point A; et ce point est dit alors le *sommet* de chacun des quatre angles BAC, BAE, DAE, DAC, qui résultent de cette *intersection*. Fig. 3.

Un angle se désigne ordinairement par trois lettres, celle du *milieu*, A, indiquant *le sommet*. Cependant, quand un angle est isolé (*fig.* 10), on peut le désigner par une seule lettre : ainsi l'on dit indifféremment *l'angle* BAC ou *l'angle* A. Fig. 10.

Dans la *figure* 3, les angles BAC, DAE, dont chacun est compris entre les prolongements des côtés de l'autre, sont dits des Angles Opposés *par le sommet;* il en est de même des deux angles BAE, DAC. Au contraire, deux angles BAC, BAE, qui ont un côté commun AB, les deux autres côtés restants, AC, AE, étant *mutuellement* les prolongements l'un de l'autre, sont dits des Angles Adjacents : tels sont encore les angles BAE et EAD, EAD et DAC, DAC et CAB, pris ainsi deux à deux.

De l'angle au centre.

N° **25.** — Les angles étant, d'après leur définition, essentiellement *indéfinis*, on peut d'abord éprouver quelque peine à se faire une

idée nette de cette espèce de grandeur. Mais il est facile de ramener la considération des angles à celle d'autres grandeurs, *finies* de leur nature, et qu'il est par conséquent plus aisé de se représenter clairement.

FIG. 11. Pour cela, soient deux angles AOB, A'O'B' (*fig.* 11). Concevons que de leurs sommets O, O', comme centres, avec le même rayon, on ait décrit (n° 18) deux arcs de cercle, AB, A'B' : chacun des angles est dit un ANGLE AU CENTRE. — Cela posé,

Il est clair d'abord, que quand les *angles* au centre, AOB, A'O'B', sont *égaux*, les *arcs* interceptés, AB, A'B', sont aussi *égaux;* car si, employant la superposition *directe* (n° 18), on applique le rayon O'A' sur son égal OA, comme, par hypothèse, l'angle A'O'B' est égal à l'angle AOB, le côté O'B' s'appliquera sur le côté OB; et, à cause de O'B' = OB, le point B' tombera sur le point B : ainsi les deux arcs A' B', AB, ayant leurs extrémités communes, se recouvriront parfaitement : ces arcs sont donc égaux (n° 14).

Il n'est pas moins aisé de prouver [toujours par la superposition] que quand un angle AOB est plus grand qu'un autre angle A'O'C', l'arc AB, correspondant au premier, est plus grand que l'arc A'C', correspondant au second; car, après la superposition des deux rayons égaux O'A' et OA, le côté O'C' viendrait prendre une position OC intérieure à BOA, et le point C' tomberait en C sur AB; ce qui donne AC ou A'C' plus petit que AB.

De là, en vertu du principe établi au *numéro* 21, on déduit que *réciproquement*, si les arcs, AB, A'B', sont égaux, les angles au centre, AOB, A'O'B', sont aussi égaux; et si l'arc AB est plus grand que l'arc A'C', l'angle au centre AOB est plus grand que l'angle au centre A'O'C'.

Ces raisonnements étant évidemment applicables au cas où les angles que l'on considère auraient le sommet commun, et situé, par conséquent, *au centre* de la même circonférence, nous sommes en droit de conclure de tout ce qui vient d'être dit,

Que, 1° — *Dans un même cercle* ou *dans des cercles égaux, à des angles au centre égaux entre eux correspondent des arcs égaux;* — et réciproquement;

Et que, 2° — *A un plus grand angle au centre correspond un plus grand arc;* — et réciproquement.

Nous nous réservons de revenir par la suite sur ces propositions pour les généraliser. Mais nous en avons dit assez pour l'intelligence de ce qui va suivre.

De l'angle droit et de la perpendiculaire.

N° 26. — Lorsqu'une *droite* AB (*fig.* 12) est *rencontrée par une autre* droite CD qui fait avec elle deux *angles adjacents,* AOC, BOC, *égaux* entre eux, chacun de ces angles se nomme un ANGLE DROIT; et la seconde droite OC ou CD, est dite PERPENDICULAIRE sur la première AB. Le point O où les deux droites se rencontrent, s'appelle le *pied* de la perpendiculaire. FIG. 12.

Il est aisé de prouver, à l'aide des propositions du n° 25, que *Si une droite* CD *est perpendiculaire sur une autre* droite AB, réciproquement *celle-ci est perpendiculaire sur la première.*

En effet, supposons que du point O comme centre, et avec un rayon arbitraire OE, on ait décrit une circonférence; comme chacune des droites GE, FH, est un diamètre (n° 13), il s'ensuit que GFE et GHE, FEH et FGH, sont des *demi-circonférences.* Or, par hypothèse, les angles AOC, COB, sont égaux; donc (n° 25) les arcs GF, FE, sont égaux entre eux, et égaux chacun à un *quadrant* (n° 14). Mais puisque FEH est une demi-circonférence, et que FE est déjà un quadrant, l'arc EH est aussi un quadrant, et l'on a FE = EH; d'où l'on déduit FOE ou COB égal à EOH ou BOD.

On prouverait pareillement que les angles BOD et DOA, DOA et AOC, sont égaux. Donc enfin AB est perpendiculaire sur CD, de même que CD est perpendiculaire sur AB.

Ceci démontre en même temps que les quatre angles droits formés autour du point O, sont égaux entre eux.

En outre, si l'on considère deux autres droites A′B′, C′D′ (*fig.* 13), perpendiculaires entre elles, et que du point O′ comme centre, avec un rayon O′E′ = OE, l'on décrive une circonférence de cercle, les *quatre* quadrants formés en O′ sont nécessairement égaux aux *quatre* quadrants formés en O; donc les FIG. 13.

quatre angles en O sont égaux aux quatre angles en O'. Ainsi,

Tous les angles droits sont égaux.

N° 27. — Il est encore facile de démontrer dès à présent,

1° que — *Par un point pris sur une droite, on ne peut* ÉLEVER *qu'une seule perpendiculaire sur cette droite;*

Et 2° que — *Par un point pris hors d'une droite, on ne peut* ABAISSER *qu'une perpendiculaire sur cette droite.*

La première proposition est évidente d'après la *fig.* 12; car soient, s'il est possible, les deux droites OC, OL, perpendiculaires à la droite AB, en un même point O; puisque AOC, COB, sont des angles droits, les arcs GF, FE, sont des *quadrants*. Par la même raison, les arcs GI, IE, sont des quadrants. Ainsi chacun des points I et F serait à la fois le *milieu* de la même demi-circonférence GIFE, ce qui est *absurde*.

FIG. 14. Supposons en second lieu, que CE, CF (*fig.* 14), soient deux perpendiculaires abaissées d'un même point C sur AB. Faisons tourner la figure CEF autour de AB comme charnière, de manière à la rabattre en C'EF, dans son plan primitif, et de l'autre côté de AB. Cela posé, les deux portions de droite EC, EC', doivent être les prolongements l'une de l'autre, puisqu'elles sont perpendiculaires à AB, et qu'on vient de voir qu'en un même point B de AB, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à cette droite. Par la même raison, FC, FC', doivent faire partie d'une droite unique. D'où il résulterait que par deux points donnés, C, C', on pourrait mener deux droites différentes, ce qui est *absurde* (n° 6).

N° 28. — On nomme ANGLE AIGU tout angle moindre qu'un angle droit, et ANGLE OBTUS tout angle plus grand qu'un droit. Ainsi,

FIG. 12. dans la *fig.* 12, l'angle AOL est un angle aigu, et l'angle LOB un angle obtus.

Deux angles, l'un *aigu*, l'autre *obtus*, dont la somme vaut *deux* angles *droits*, sont dits *supplémentaires*; et deux angles dont la somme vaut *un seul* angle *droit*, sont dits *complémentaires*. Il résulte de là que tout angle *droit* est à lui-même *son propre supplément*, et qu'il a *zéro* pour *complément*.

On peut dire encore [troisième axiome énoncé au *numéro* 17]

Deux angles supplémentaires ou *complémentaires d'un troisième, sont égaux entre eux.*

Propriétés des angles adjacents et des angles opposés.

N° 29. — Nous terminerons les considérations préliminaires sur les angles, par quelques propositions d'un usage continuel et qui découlent immédiatement des principes précédents.

1° — *Lorsqu'une droite* OC (*fig.* 15) *tombe sur une autre* AB, *de manière à former avec elle deux angles adjacents inégaux,* AOC, COB [auquel cas OC est dite une Oblique], *ces angles sont supplémentaires.* Fig. 15.

Car si, au point O, on élève la perpendiculaire OD, la somme des deux angles AOC, COB, sera identique avec la somme des deux angles droits AOD, DOB.

Remarquons, en passant, que de ces deux angles, l'un, AOC, est *obtus*, et surpasse de DOC l'angle droit; l'autre, COB, est *aigu*, et a pour *complément* (n° 28) le même angle DOC.

2° — *Les angles opposés*, BAC, DAE (*fig.* 3), ou DAC, BAE [formés par deux droites qui se coupent (n° 24)], *sont égaux entre eux.* Fig. 3.

Cela résulte évidemment de ce que les deux angles BAC, DAE, par exemple, sont à la fois, d'après ce qui vient d'être dit, *supplémentaires* du même angle BAE.

N° 30. — Ces deux propositions ont d'ailleurs leurs réciproques qui ne sont pas moins importantes :

1° — *Lorsque deux angles consécutifs*, AOC, COB (*fig.* 15), *sont supplémentaires, les côtés extrêmes*, OA, OB, *sont les prolongements l'un de l'autre en ligne droite ; — et les angles sont adjacents* (n° 24). Fig. 15.

Car si OB n'était pas le prolongement de OA en ligne droite, soit OE ce prolongement : COE serait, en vertu de la proposition directe, le supplément de AOC ; mais déjà, par hypothèse, AOC a pour supplément COB ; il en résulterait donc (n° 28) COE = COB, ou *la partie égale au tout*, ce qui est *absurde*.

2° — *Si deux angles égaux*, BAC, DAE (*fig.* 3), *situés de part et d'autre d'une même droite* BD, *ont deux de leurs côtés,* Fig. 3.

AB, AD, *situés sur cette droite, et dirigés en sens contraires à partir d'un sommet commun A, les deux autres côtés sont aussi en ligne droite; — et les angles sont opposés* (n° 24).

En effet, BAD étant une ligne droite, l'angle BAE est supplémentaire de DAE; et comme on a, par hypothèse, DAE = BAC, il s'ensuit que BAE est aussi supplémentaire de BAC; donc, en vertu de la réciproque précédente, CAE est une ligne droite.

N° 31. — En général :

1° — *La somme de tous les angles formés autour d'un point* O, *est égale à quatre angles droits;*

2° — *La somme de tous les angles consécutifs* AOC, COD, DOE,
Fig. 16. EOB (*fig.* 16), *formés d'un même côté d'une droite* AB, *est égale à deux angles droits.*

Il suffit, pour le prouver, d'élever sur AB la perpendiculaire LOL'; et alors les deux propositions sont évidentes.

Des parallèles.

N° 32. — On donne le nom de Parallèles à deux *droites qui, situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer, quelque prolongées qu'on les suppose dans les deux sens de leur direction.*

Il est facile de constater l'existence de droites qui remplissent les conditions de cette définition. En effet, que l'on suppose, par exemple, *dans un même plan*, deux droites distinctes AB, CD
Fig. 17. (*fig.* 17), perpendiculaires à une troisième EF, aux points respectifs M et N : il est clair que ces perpendiculaires *ne sauraient se rencontrer*, quelque loin qu'on les prolonge; car si elles avaient un point commun, il s'ensuivrait que de ce point on pourrait abaisser deux perpendiculaires sur une même droite EF, ce qui est *absurde* (n° 27). — Les deux droites, AB, CD, sont donc des *droites parallèles.*

N° 33.—Ainsi, deux droites parallèles sont nécessairement dans un même plan, d'après leur définition; et elles le *déterminent*, puisqu'en prenant deux points arbitraires sur l'une d'elles, et un autre point sur la seconde, on a *trois points non en ligne droite*, et que, par ces trois points, on ne peut (n° 8) faire passer qu'un seul plan.

Ce plan unique, déterminé par les deux parallèles, se nomme *le plan des deux parallèles*.

N° 34. — Nous établirons à titre de DEMANDE (n° 17), c'est-à-dire que nous admettrons sans démonstration, la proposition dont voici l'énoncé :

Une perpendiculaire, OC (*fig.* 18), *et une oblique*, EF, *à une* FIG. 18.
même droite AB, menées dans un même plan, *se rencontrent toujours*, pourvu qu'elles soient suffisamment prolongées. — La rencontre a lieu d'ailleurs du côté de la droite AB où l'angle *intérieur*, OEF, est *aigu* (*).

(*) Nous croyons devoir exposer ici, mais seulement en forme de *Note*, la démonstration due, pour le fond, à BERTRAND de Genève. Elle repose sur les deux *lemmes* suivants :

Ier LEMME. — *Toute bande comprise entre deux parallèles* AB, CD (*fig.* 19), FIG. 19.
quel que soit leur écartement, *est contenue dans un plan un nombre de fois nécessairement infini.*

En effet, faisons tourner la bande ABCD autour de CD comme charnière, de manière qu'elle vienne se rabattre sur son plan, en CDA'B'. Faisons de même tourner CDA'B' autour de A'B' de manière à former une troisième bande A'B'C'D' égale aux deux premières; et ainsi de suite.

Reprenons maintenant la bande ABCD, et retournons-la successivement *sens dessus dessous*, du côté de AB, comme nous l'avons fait du côté de CD; nous aurons ainsi d'autres bandes égales aux premières, AB*cd*, *cdab*, *abc'd'*,... Or, quelque nombre de fois que ces opérations soient répétées, il est évident qu'on ne parviendra jamais à recouvrir *entièrement* la surface plane qui contient ces bandes, puisqu'il restera toujours à droite et à gauche des deux dernières bandes ainsi formées, un espace qui sera lui-même encore *indéfini*.

On doit conclure de là que la bande ABCD est contenue dans son plan un nombre de fois qui ne peut être limité.

IIe LEMME. — *Un angle quelconque* AOB (*fig.* 20), si petit qu'il puisse FIG. 20.
être par rapport à l'angle droit AOC, *est contenu dans son plan un nombre de fois essentiellement limité.*

En effet, si l'on répète cet angle, comme le montre la figure, un nombre suffisant de fois, nombre essentiellement *fini* [qu'il est toujours possible d'assigner, et qui est d'autant plus petit que l'angle AOB est plus grand par rapport à l'angle droit], on obtiendra évidemment bientôt une somme d'angles assez grande pour recouvrir entièrement, d'abord l'*angle droit*, puis *deux* angles droits, puis *trois*, puis *quatre*, et par conséquent la surface tout entière. — Ce qui démontre le lemme énoncé.

Autrement : — Si du sommet O comme centre, et d'un rayon quelconque OD,

Cette proposition, qui n'est autre chose que le POSTULATUM d'EUCLIDE, étant admise, on en déduit évidemment les conséquences suivantes :

FIG. 17. 1° — *Par un point* M (*fig.* 17) *pris hors d'une droite* AB, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite;*

Abaissons du point M sur AB, la perpendiculaire MN, puis par le même point M élevons sur MN la perpendiculaire CMD. Nous savons déjà (n° 32) que CD est une parallèle à AB : or je dis de plus que c'est la seule parallèle qu'on puisse mener par le point M; car toute autre droite passant par ce point est nécessairement une *oblique* par rapport à MN, et doit par conséquent, en vertu du *postulatum,* rencontrer la droite AB perpendiculaire à MN.

FIG. 17. 2° — *Si deux droites,* AB, CD (*fig.* 17), *sont parallèles, toute*

---

on décrit une circonférence, l'arc total correspondant à la somme des angles finira par égaler la circonférence lorsque l'arc partiel correspondant à l'angle AOB sera une partie *aliquote* de cette circonférence, et dans le cas contraire, par surpasser la même circonférence. Or, comme la somme des angles égaux qui correspond à cette circonférence, recouvre entièrement le plan, on est conduit à la même conséquence que ci-dessus.

De là on peut conclure, en général, — qu'*Un angle,* quelque petit qu'il soit [par rapport à l'angle droit], *surpasse en grandeur toute figure susceptible d'être contenue dans un plan un nombre illimité de fois,* —que cette figure soit d'ailleurs ou ne soit pas limitée de toutes parts; — et de plus, *l'angle* lui-même *contient cette figure un nombre illimité de fois.*

FIG. 18. Tout ceci étant admis, reprenons la *fig.* 18, et, après avoir élevé au point E la droite EG perpendiculaire à AB, observons qu'en vertu de ce qui vient d'être dit, l'angle FEG est plus grand que l'espace indéfini COEG [moitié de la bande CDGH]. Or les deux espaces FEG, COEG ont une limite commune EG; donc il faut nécessairement que EF suffisamment prolongé, rencontre quelque part la droite OC; autrement l'angle serait renfermé entièrement dans la demi-bande, et serait plus petit qu'elle, ce qui implique contradiction. Donc enfin EF doit rencontrer OC.

S'il s'agit de la droite EF′ faisant l'angle obtus OEF′, comme alors l'angle OEH′ est aigu, la rencontre de EF′ avec OC a lieu de l'autre côté de AB : ainsi la proposition présentée comme *demande,* se trouve démontrée.

Quoique cette démonstration s'appuie sur des considérations assez délicates, relatives à l'infini, on ne saurait se dissimuler que, du moment où l'on admet pour définition des parallèles, celle que nous avons donnée au n° 32, il est difficile, pour ne pas dire impossible, d'exposer une théorie des parallèles qui soit tout à fait indépendante de la notion de l'infini.

autre droite GH *qui rencontre l'une d'elles* CD, en un point I, *rencontre nécessairement l'autre;*

Car, si cela n'était pas, il s'ensuivrait que, par le même point I, on pourrait mener *deux* parallèles à AB.

3° — *Deux droites,* AB, CD (*fig.* 21), *parallèles à une troisième* EF, *sont parallèles entre elles;* FIG. 21.

Car, si elles ne l'étaient pas, il s'ensuivrait encore que par leur point de concours, on pourrait mener *deux* parallèles à EF.

4° Enfin — *Si deux droites*, AB, CD (*fig.* 17), *sont parallèles, toute autre droite* MN *perpendiculaire à l'une d'elles* AB, *est aussi perpendiculaire à l'autre* CD; — *et réciproquement;* FIG. 17.

Cela résulte immédiatement du *postulatum*. — On dit en conséquence, que

Deux parallèles ont leurs perpendiculaires communes.

Des polygones.

N° 38. — On donne en général le nom de POLYGONE à une *portion de plan*, ABCDEA, ABCDEFGA (*fig.* 22 et *fig.* 22 *bis*), *circonscrite par un système de droites qui se coupent deux à deux.* FIG. 22 et 22 *bis*.

Pour se former une idée nette de ce genre de grandeur, il faut concevoir qu'un point mobile [par exemple, la pointe d'un crayon ou d'une plume], partant de la position A, décrive d'abord une portion de droite AB; puis, changeant de direction, une autre portion de droite BC, puis une autre portion de droite CD, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin il revienne à sa position primitive A. — L'ensemble des droites ainsi tracées circonscrira de toutes parts une portion de surface plane, que l'on nomme un *polygone*.

Les parties de droite, AB, BC, CD,.... sont dites les *côtés* du polygone; l'ensemble de ces côtés forme le *contour* ou *périmètre* du polygone; les points A, B, C,... en sont les *sommets;* enfin, on nomme *diagonales* les droites, telles que AC, BE, CG,..., qui joignent deux à deux les sommets des angles non consécutifs.

Du mode de génération indiqué ci-dessus résultent deux sortes de polygones, savoir : des polygones dont tous les angles sont *saillants* (*fig.* 22), et des polygones dont quelques angles sont *ren-* FIG. 22.

FIG. 22 *bis*. *trants* (*fig.* 22 *bis*). Les premiers sont dits des POLYGONES CONVEXES, et les autres des POLYGONES CONCAVES.

N° 36. — Les *polygones convexes* sont les seuls dont s'occupe la *Géométrie élémentaire*; et leurs caractères principaux sont les suivants :

1° — *Une droite* tracée dans leur plan, *ne peut rencontrer leur contour en plus de deux points*;

2° — Si l'on suppose un côté quelconque prolongé indéfiniment, — *Tous les sommets, excepté ceux qui le terminent, sont situés dans la même région* (n° 11) par rapport à ce côté.

3° — *Toutes les diagonales sont intérieures*; — et de plus *chacune d'elles est telle que les sommets*, autres que ceux qui la terminent, *se trouvent situés, les uns dans une région, les autres dans la région opposée par rapport à cette diagonale*; — tandis que dans les polygones *concaves* il y a toujours quelque diagonale par rapport à laquelle tous les sommets occupent la même région. — FIG. 22 *bis*. Telle est la diagonale AD (*fig.* 22 *bis*).

N° 37. — Il faut évidemment *au moins trois droites* pour *circonscrire* une portion de plan. Ainsi, le polygone le plus simple sous le rapport du nombre des côtés, est celui de *trois* côtés que l'on nomme un TRIANGLE.

Tout triangle est nécessairement *convexe*; et cette figure ne saurait avoir de diagonales.

Viennent ensuite :

Le QUADRILATÈRE ou le polygone de *quatre* côtés,
Le PENTAGONE. . . . . *cinq*,
L'HEXAGONE. . . . . *six*,
L'HEPTAGONE . . . . *sept*,
L'OCTOGONE. . . . . *huit*,
L'ENNÉAGONE. . . . . *neuf*,
Le DÉCAGONE. . . . . *dix*,
L'ENDÉCAGONE. . . . . *onze*,
Le DODÉCAGONE. . . . . *douze*.

Au delà de douze côtés, les polygones ne reçoivent plus de dé-

nominations spéciales, excepté celui de *quinze* côtés que l'on nomme PENTÉDÉCAGONE.

Du triangle en particulier.

N° 38.—Nous établirons ici, par rapport au triangle, quelques propositions qui seront d'un usage fréquent dans la suite.

1° — *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 23), *un quelconque des côtés,* AB, *est moindre que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.* FIG. 23.

La première partie de la proposition est évidente d'après la définition même de la ligne droite (n° 8) : c'est-à-dire que l'on a évidemment

$$AB < AC + CB.$$

Quant à la seconde partie, puisqu'en vertu de la première on a aussi

$$AC < AB + CB,$$

il en résulte nécessairement

$$AC - CB < AB, \quad \text{ou} \quad AB > AC - CB.$$

Donc enfin

$$AB < AC + CB \quad \text{et} \quad AB > AC - CB.$$

C. Q. F. D.

2° — *La somme de deux droites,* AB, CD (*fig.* 24), *qui se coupent en un point* O *placé entre leurs extrémités, est toujours plus grande que la somme de deux droites opposées,* AC, BD, *qui joignent deux à deux les extrémités des premières.* FIG. 24.

En effet, on a les deux inégalités

$$CO + OA > AC, \quad \text{et} \quad OD + OB > BD,$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$CO + OA + OD + OB > AC + BD,$$

ou, réduisant,

$$CD + AB > AC + BD.$$

On prouverait pareillement que

$$CD + AB > AD + CB.$$

Fig. 25. 3° — *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 25), *si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté avec un point intérieur* O, *la somme de ces deux droites est moindre que celle des deux autres côtés* [c'est-à-dire que l'on a $AO + OB < AC + CB$].

Prolongeons AO jusqu'à sa rencontre en D avec CB : on a d'abord dans le triangle ACD,

$$AD < AC + CD;$$

d'où, en ajoutant DB aux deux membres,

$$AD + DB < AC + CB.$$

En second lieu, le triangle ODB donne également

$$OB < OD + DB;$$

d'où, en ajoutant AO membre à membre,

$$AO + OB < AD + DB.$$

De là résulte, à plus forte raison,

$$AO + OB < AC + CB;$$

C. Q. F. D

CHAPITRE PREMIER.

DES FIGURES RECTILIGNES.

Ce chapitre sera divisé en *cinq* paragraphes, dont le premier traitera des *perpendiculaires* et des *obliques*; le second, des *parallèles*; le troisième, des *triangles* et de leur *égalité*; le quatrième, *du quadrilatère* et de ses *différentes espèces*; le cinquième, des *polygones* et de leurs *propriétés principales*.

§ Ier. — *Théorie des perpendiculaires et des obliques.*

Théorème Ier. (*Fig.* 26.) Fig. 26.

N° 39. — *La perpendiculaire* OC *abaissée sur une droite* AB, *d'un point extérieur* O, *est la plus courte distance de ce point à la droite* (*).

Il suffit de prouver que la perpendiculaire OC est plus courte que toute oblique OD. Pour cela, faisons tourner la portion de figure OCD autour de AB comme charnière, de manière à la rabattre en O'CD; nous aurons

$$O'C = OC, \quad O'D = OD;$$

(*) Nous prévenons une fois pour toutes, que les *énoncés* des théorèmes doivent toujours être *lus deux fois* de suite: d'abord, *sans* le secours des *lettres* de la figure, et ensuite *avec* ces mêmes *lettres*. C'est en effet de la première manière qu'*il faut les retenir de mémoire*.

Ainsi, le théorème actuel doit d'abord s'énoncer de la manière suivante : — *La perpendiculaire abaissée sur une droite, d'un point extérieur, est la plus courte distance de ce point à la droite.*

de plus, OCO′ étant une ligne droite (n° 27), il en résulte (n° 38) :

$$OCO' < OD + O'D, \quad \text{ou} \quad 2OC < 2OD;$$

et, par conséquent, $OC < OD$; *C. Q. F. D.*

SCOLIE. — Cette *perpendiculaire* mesure donc la *vraie distance du point à la droite.*

FIG. 26. THÉORÈME II. (*Fig.* 26.)

N° 40. — Si d'un point O extérieur à une droite AB, on abaisse la perpendiculaire OC sur cette droite, et différentes obliques OD, OD′, OE :

1° — *Deux obliques,* OD, OD′, *qui s'écartent également de la perpendiculaire* [c'est-à-dire, telles que l'on ait CD = CD′], *sont égales;*

2° — *De deux obliques,* OD, OE, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle,* OE, *qui s'en écarte le plus est la plus grande.*

1° — Plions la figure le long de OC; les points D et D′ se confondront, puisque, par hypothèse, CD = CD′; donc

$$OD = OD'.$$

2° — Plions la figure le long de AB; nous aurons

$$OD = O'D, \quad OE = O'E;$$

puis, en vertu de la troisième proposition démontrée au *numéro* 38,

$$OD + O'D < OE + O'E, \quad \text{ou} \quad 2OD < 2OE;$$

et, par conséquent, $OD < OE$; *C. Q. F. D.*

N. B. — S'il s'agissait de deux obliques OD′, OE, situées de part et d'autre de la perpendiculaire, on prendrait d'abord une distance CD = CD′, ce qui donnerait OD = OD′; puis, de OD < OE, on déduirait OD′ < OE.

Corollaire. — *Entre une droite indéfinie et un point extérieur, on ne saurait mener trois droites égales :*

Sans quoi, il existerait au moins, soit deux obliques égales entre elles d'un même côté de la perpendiculaire, soit une oblique égale à cette perpendiculaire, ce qui est impossible.

Scolie. — Les *réciproques* des deux parties du *théorème* II sont *vraies*, et résultent évidemment du principe établi au *numéro* **21**.

Ainsi, — 1° — *Deux obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire ;*

2° — *De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus de la perpendiculaire.*

Théorème III. (*Fig.* 27.) Fig. 27.

N° **41**. — 1° — *Tout point* E *de la perpendiculaire* CD *élevée sur une droite* AB, *par son milieu* C, *est également distant des deux extrémités de la droite ;*

2° — *Tout point* F *extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.*

En effet, — 1° — tirons les droites AE, BE. — Puisque, par hypothèse, on a CA = CB, il en résulte (n° **40**)

$$EA = EB.$$

2° — Menons FA, FB ; et, par le point E, où FA coupe CD, tirons la droite EB. — Nous aurons (n° **38**, 1°)

$$BF < BE + EF,$$

ou, à cause de EB = EA,

$$BF < EA + EF;$$

et, par conséquent, $BF < AF.$

N. B. — L'extrémité la plus éloignée du point extérieur F, est toujours celle, A, qui est située, par rapport à la perpendiculaire, du côté opposé à ce point ; et *vice versâ*.

Scolie I. — Les *réciproques* des deux propositions du *théorème* III sont *vraies*, et résultent encore évidemment du principe établi au *numéro* **21**.

SCOLIE II. — La *perpendiculaire* CD devant passer par tous les *points* qui sont *également distants des extrémités* A et B de la droite AB, est dite le LIEU GÉOMÉTRIQUE de tous ces points.

N° 42. — COROLLAIRE. — Ce lieu géométrique étant une ligne droite, et une droite étant déterminée par deux points (n° 6), il en résulte nécessairement que

FIG. 27. *Si deux points* [D, E, ou D, D′ (*fig.* 27)], *sont chacun à une même distance de deux autres points* [A et B], *la droite* [DE ou DD′], *menée par les deux premiers, est perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux derniers.*

N° 43. — On nomme BISSECTRICE d'un angle BAC, la droite AD qui divise cet angle en deux parties égales : un angle ne peut évidemment avoir qu'*une seule* bissectrice. — Cela posé,

FIG. 28.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 28.)

1° — *Tout point* E *de la bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est également distant des deux côtés de cet angle ;*

2° — *Tout point* F *situé dans l'angle et extérieur à la bissectrice, est inégalement distant des mêmes côtés.*

1° — Soient abaissées sur AB et sur AC les perpendiculaires EG, EH ; et plions la figure suivant AD. Les droites AB, AC, se confondront, et par conséquent aussi (n° 27) les perpendiculaires EG, EH.

Donc $EG = EH.$

2° — Abaissons sur AB, AC, les perpendiculaires FG, FI ; puis, du point E où FG rencontre AD, menons EH perpendiculaire sur AC, et tirons l'oblique FH.

Nous aurons évidemment

$$FI < FH, \quad \text{et} \quad FH < FE + EH < FE + EG ;$$

d'où, à plus forte raison,

$$FI < FE + EG < FG.$$

Donc $FI < FG.$

N. B. — On peut faire ici une remarque analogue à celle du n° 41.

SCOLIE I. — Les *réciproques* des deux propositions sont *vraies*.

SCOLIE II. — La *bissectrice* d'un angle est le *lieu géométrique* de tous les *points* situés dans cet angle *à égale distance de ses côtés*.

SCOLIE III. — *Les bissectrices*, AD, AD′, *de deux angles adjacents*, BAC, CAB′, *sont perpendiculaires entre elles*.

Car, puisque les angles BAC, CAD′, sont respectivement moitiés des angles BAC, CAB′, dont la somme vaut 2 *droits* (nº 29), il s'ensuit que DAC + CAD′ vaut 1 *droit*. — Donc *etc*.

Les deux angles BAD, B′AD′, forment également une somme égale à 1 *droit*.

§ II. — *Théorie des parallèles.*

THÉORÈME Iᵉʳ. (*Fig*. 29.) FIG. 29.

Nº 44. — *Deux parallèles*, AB, CD, *sont partout également distantes*.

De deux points E, F, pris à volonté sur CD, soient abaissées sur AB les perpendiculaires EG, FH; ces droites seront en même temps perpendiculaires sur CD (nº 34, 4º); et ce seront en outre (nº 39) les plus courtes droites qu'on puisse mener des points E, F, sur AB, ou des points G, H, sur CD. — Ainsi, il suffit de prouver que EG = FH.

Pour cela, par le milieu M de GH, élevons sur AB la perpendiculaire MN; puis rabattons ENMG sur FNMH. Tous les angles de la figure étant droits, MG prendra la direction MH; et comme on a MG = MH, le point G tombera sur le point H. Ensuite EG prendra la direction HF, et NE la direction NF; donc le point E tombera en F, et l'on aura EG = FH. *C. Q. F. D.*

RÉCIPROQUEMENT : — *Deux droites qui sont partout également distantes, sont parallèles*; — car alors elles ne sauraient se rencontrer.

Nº 45. — Avant d'établir d'autres théorèmes, il est nécessaire de donner quelques nouvelles définitions.

Lorsque deux droites, AB, CD (*fig*. 30 et 31), parallèles ou con FIG. 30 et 31

courantes, sont rencontrées respectivement, en deux points M, N, par une troisième droite EF, cette droite, appelée SÉCANTE ou TRANSVERSALE, forme, avec les deux autres, *huit* angles qui, considérés isolément, ou comparés deux à deux, prennent les dénominations suivantes :

Considérés *isolément :*

1° — les quatre angles AMF, BMF, CNE, DNE, dont l'ouverture est *en dedans* des deux parallèles, se nomment *internes ;*

2° — les quatre angles AME, BME, CNF, DNF, dont l'ouverture est *en dehors*, se nomment *externes.*

Comparés *deux à deux :*

1° — les angles AMF et CNE, ou bien BMF et DNE, sont dits des angles INTERNES D'UN MÊME CÔTÉ [sous-entendu *de la sécante*] :

2° — les angles AME et CNF, ou BME et DNF, sont dits EXTERNES D'UN MÊME CÔTÉ ;

3° — les angles internes AMF et DNE, ou bien CNE et BMF, situés de côtés différents par rapport à la sécante, sont nommés des angles ALTERNES-INTERNES ;

4° — les angles externes AME et DNF, ou BME et CNF, sont appelés ALTERNES-EXTERNES.

On compte *deux couples* d'angles de chacune des *quatre espèces* précédentes.

5°, — Enfin, on donne le nom d'angles CORRESPONDANTS aux *quatre couples* d'angles AME et CNE, AMF et CNF, BME et DNE, BMF et DNF, qu'on devrait plutôt, d'après leurs positions respectives, appeler angles *interne-externes d'un même côté ;* mais pour abréger, on emploie de préférence la première dénomination.

FIG. 30. THÉORÈME II. (*Fig.* 30.)

N° 46. — *Deux droites*, AB, CD, *sont parallèles lorsqu'elles forment avec une sécante*, EF, *deux angles alternes-internes* [AMN et DNM, ou BMN et CNM] *égaux entre eux.*

En effet, admettons pour un moment que les segments MA, NC, par exemple, puissent se rencontrer ; et, dans cette hypothèse, faisons *pivoter* (n° 19) la portion de plan AMNC autour du

point O milieu de MN, de manière que OM vienne prendre la position primitive de ON, et ON celle de OM; alors le segment MA prendra la position ND, et ND la position MB, à cause de l'angle AMN égal à DNM, et de l'angle BMN égal à CNM, d'après l'énoncé. Or, les segments MA, NC, ne cessant pas de se rencontrer dans leur nouvelle position, il faut nécessairement que les segments MB, ND, avec lesquels ils coïncident actuellement, se rencontrent aussi; d'où il résulterait que les deux droites AB, CD, auraient deux points communs sans coïncider, *ce qui est absurde.*

Donc enfin les deux droites AB, CD, sont parallèles. *C. Q. F. D.*

N° **47**. — Corollaire. — *Deux droites sont* encore *parallèles* dans les *quatre cas* suivants :

1° — *lorsque les angles correspondants sont égaux ;*

2° — *lorsque les angles internes d'un même côté sont supplémentaires ;*

3° — *lorsque les angles alternes-externes sont égaux ;*

4° — *lorsque les angles externes d'un même côté sont supplémentaires.*

En effet, dans le *premier cas*, soit, par exemple,

$$angle\ AMN = angle\ CNF;$$

comme on a aussi (n° **29**)

$$angle\ CNF = angle\ MND,$$

il en résulte AMN = MND; et la proposition rentre dans le théorème principal.

Quant au *second cas*, soit AMN supplémentaire de MNC; comme MND est aussi supplémentaire de MNC, il en résulte (n° **28**) AMN = MND; et la proposition rentre encore dans le *théorème* principal.

Les *deux derniers cas*, qui sont d'ailleurs sans application, se traiteraient d'une manière analogue.

Théorème III. (*Fig.* 31.) Fig. 31.

N° **48**. — *Deux droites*, AB, CD, *concourent lorsqu'elles forment avec une transversale*, EF, *des angles alternes-internes inégaux.*

Soit, pour fixer les idées,

$$angle\ MND > angle\ AMN.$$

Menons par le point N la droite C′ND′, de telle manière que l'on ait

$$angle\ D'NM = angle\ AMN;$$

les deux droites AB, C′D′, seront parallèles, en vertu du *théorème* précédent.

Ainsi AB, CD, doivent se rencontrer; autrement, on pourrait, du même point N, mener deux parallèles à AB, *ce qui est absurde* (n° 34).

N° 49. — COROLLAIRE. — La considération des angles *correspondants, internes d'un même côté, etc.*, conduit, ainsi que le *théorème* précédent, à *quatre* autres propositions; mais nous nous bornerons à démontrer la suivante, comme étant la seule qui doive être d'un assez fréquent usage.

FIG. 31. *Deux droites,* AB, CD (*fig.* 31), *concourent lorsqu'elles forment avec une troisième* EF, *deux angles internes d'un même côté,* AMN, MNC, *dont la somme est inférieure ou supérieure à* 2 DROITS.

En effet, soit, par exemple,

$$AMN + MNC < 2 \text{ DROITS};$$

comme on a (n° 28)

$$MNC + MND = 2 \text{ DROITS},$$

il en résulte AMN < MND; et la proposition rentre dans le théorème principal.

N. B. — Il est important d'observer que

La rencontre des deux droites *a lieu du côté où la somme des angles internes d'un même côté est inférieure à deux angles droits.*

SCOLIE I. — La proposition du n° 34, ou le *postulatum* d'EUCLIDE, n'est, comme on le voit, qu'un cas particulier de ce corollaire.

FIG. 32. N° 50. — SCOLIE II. — *Lorsque deux droites,* AB, CD (*fig.* 32), *se coupent, leurs perpendiculaires respectives se coupent aussi.*

En effet, si MN et PQ étaient parallèles, les deux droites AB et CD, étant alors perpendiculaires à la fois sur chacune des deux autres (n° 34, 4°), seraient aussi parallèles (n° 32); *ce qui est contre l'hypothèse.* — Donc *etc.*

N° 31. — RÉCIPROQUES *des deux théorèmes précédents.*

Les *théorèmes* II et III se trouvant dans le cas de la remarque générale du n° 21, il en résulte que leurs *réciproques*, ainsi que celles de toutes les propositions qui s'y rattachent, sont *vraies*.

Ainsi, — *Lorsque deux droites sont rencontrées par une sécante, suivant qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas parallèles,*

1° — *les angles alternes-internes*, ou *alternes-externes*, ou *correspondants*, *sont égaux ou inégaux;*

2° — *les angles internes* ou *externes d'un même côté, sont ou ne sont pas supplémentaires.*

THÉORÈME IV. (*fig.* 33.) FIG. 33.

N° 32. — *Deux angles*, BAC, EDF, *sont égaux lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens*, chacun à chacun.

Prolongeons, s'il est nécessaire, FD jusqu'à sa rencontre en I avec AB. Les deux angles CAB, FIB, sont égaux comme correspondants (n° 31); il en est de même des deux angles FIB, FDE; donc aussi CAB = FDE.

COROLLAIRE I. —*Deux angles*, BAC, EDF (*fig.* 34), *sont* encore *égaux lorsqu'ils ont leurs côtés parallèles et dirigés en sens contraire*, chacun à chacun. FIG. 34.

Prolongeons DE, DF, respectivement en E', F'; les angles EDF, E'DF', sont égaux comme opposés (n° 29); mais les angles E'DF', BAC, sont aussi égaux d'après le *théorème* principal; donc

$$BAC = EDF.$$

COROLLAIRE II. — *Deux angles*, BAC, EDF (*fig.* 35), *sont supplémentaires lorsqu'ils ont les côtés parallèles, mais non dirigés à la fois dans le même sens ou en sens contraire.* FIG. 35.

Car, si l'on prolonge DF en F', on a (n° 31)

$$FDE + EDF' = 2 \text{ DROITS};$$

mais BAC = EDF′ d'après le *théorème* principal; donc aussi

$$FDE + BAC = 2 \text{ droits}.$$

Réciproquement : — Si les droites AB, DE, sont parallèles, et que l'on ait, soit ABC = DEF, soit ABC = D′EF′, soit ABC *supplément* de DEF′ ou de D′EF, les droites BC, EF, sont aussi parallèles.

La démonstration *par l'absurde,* semblable en tout point à celle du n° 48, est trop facile pour nous arrêter.

N° 53. — Scolie. — Lorsque deux angles ont les côtés parallèles, leur position relative est évidemment une de celles qui viennent d'être indiquées. — Donc, en général,

Deux angles sont égaux ou supplémentaires quand ils ont leurs côtés parallèles chacun à chacun.

Remarque générale sur les parallèles.

Fig. 36. N° 54. — Soient AB, CD (*fig.* 36), deux parallèles; et supposons que d'un point quelconque pris sur CD, on mène sur AB la perpendiculaire OP et une série d'obliques OR, OR′, OR″,... Les pieds R, R′, R″,... de ces obliques seront d'autant plus éloignés du pied P de la perpendiculaire, que les angles DOR, DOR′, DOR″,..., ou leurs alternes-internes respectifs, ORP, OR′P, OR″P,..., seront plus petits; et *réciproquement.* Ainsi, les angles DOR ou ORP, DOR′ ou OR′P,..., d'une part, pouvant devenir plus petits que tout angle donné; et, d'autre part, les distances OR, OR′,..., ou PR, PR′,..., pouvant devenir plus grandes que toute ligne donnée, il s'ensuit que la droite CD peut être considérée comme la *limite* dont s'approchent de plus en plus les droites OR, OR′,..., à mesure que les points de rencontre R, R′, R″,... s'éloignent du point F, et que les angles DOR ou ORP,..., deviennent plus petits.

C'est ce que l'on exprime d'une manière abrégée en disant que

Deux parallèles sont deux droites qui se rencontrent à l'infini en faisant entre elles un angle nul.

§ III. — *Propriétés principales des triangles.* — *Théorie de leur égalité.*

[*Voyez* les nos 35, 37, et 38, pour la définition du triangle et les premières notions sur cette figure.]

THÉORÈME I. (*Fig.* 37.) FIG. 37.

N° 55. — ***Dans tout triangle* ABC, *la somme des trois angles est égale à* 2 DROITS.**

Prolongeons l'un des côtés, AB par exemple, de manière à former l'angle *extérieur* CBD; puis, du point B, menons BE parallèle à AC. Les angles EBD, CAB, sont égaux comme correspondants, et les angles EBC, BCA, comme alternes-internes (n° 51); donc la somme des trois angles du triangle est égale à la somme des trois angles formés au point B; mais celle-ci vaut 2 *droits* (n° 29); donc aussi

ABC + CAB + ACB = 2 DROITS.

N. B.—L'angle extérieur CBD équivaut évidemment à la somme des deux angles CAB, ACB, et par conséquent surpasse chacun de ces angles. — Ainsi,

Tout angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.

COROLLAIRE I. — *Un* quelconque des trois angles d'un triangle est *supplémentaire* de la somme *des deux autres* (n° 28); d'où il suit que,

Si deux angles d'un triangle sont respectivement égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième angle du premier est égal au troisième angle du second:

Car, chacun de ces deux derniers angles est le supplément d'une même somme.

COROLLAIRE II. — Si *d'un point* O *intérieur à un triangle* CAB (*fig.* 25), *on mène deux droites aux extrémités de l'un de ses côtés*, AB, *l'angle* OAB *formé par ces deux droites, est plus grand que l'angle* ACB *du triangle, opposé à ce côté;* FIG. 25.

En effet, la somme d'angles OAB + OBA étant évidemment moindre que CAB + CBA, il faut, par compensation, que le sup-

plément O de la première somme soit plus grand que le supplément C de la seconde.

N° 56. — SCOLIE. — *Un triangle ne saurait avoir à la fois, ni deux angles droits, ni un angle droit et un angle obtus, ni deux angles obtus;*

Car autrement il s'ensuivrait que la somme des trois angles du triangle serait plus grande que deux angles droits.

Cela posé, on donne le nom de TRIANGLE RECTANGLE à tout triangle qui a un angle *droit;* et le côté opposé à cet angle s'appelle *hypoténuse.*

Le TRIANGLE OBTUSANGLE est celui qui a un angle *obtus;* — et le TRIANGLE ACUTANGLE celui dont tous les angles sont *aigus.* — Ces deux dernières sortes de triangles portent le nom commun de TRIANGLES OBLIQUANGLES.

Dans tout triangle rectangle, les deux angles aigus sont COMPLÉMENTAIRES *l'un de l'autre* (n° 28).

Ainsi, de ce que l'un des angles aigus d'un triangle rectangle est égal à l'un des angles aigus d'un autre triangle rectangle, on peut conclure que le deuxième angle aigu du premier est égal au deuxième angle aigu de l'autre.

FIG. 38.

THÉORÈME II. (*Fig.* 38.)

N° 57. — *Si d'un point* D *pris sur l'un des côtés* AC *d'un angle quelconque* BAC, *on abaisse une perpendiculaire sur l'autre côté* AB, *cette perpendiculaire tombera intérieurement à l'angle, ou extérieurement, suivant que cet angle est* AIGU *ou* OBTUS.

D'abord, dans aucun cas, elle ne saurait tomber en A, puisque CA est une oblique.

Ensuite, lorsque l'angle est *aigu*, la perpendiculaire ne peut tomber sur le prolongement de AB en E′, puisque, si cela était, on aurait un triangle DAE′ présentant un angle obtus et un angle droit, *ce qui est absurde.*

— Donc elle doit tomber sur le côté AB.

Si, au contraire, l'angle est obtus, la perpendiculaire ne saurait tomber sur AB en E″: car on aurait encore un triangle DAE″ présentant un angle obtus et un angle droit. — Donc elle tombe sur le prolongement de AB, par exemple en E.

COROLLAIRE I.—La perpendiculaire abaissée de l'un des sommets d'un triangle quelconque ABC, sur le côté opposé, tombe *au dedans* ou *au dehors* de ce triangle, suivant que les angles adjacents à ce côté sont *tous deux aigus*, ou *l'un aigu* et *l'autre obtus*.

COROLLAIRE II.—Par conséquent, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit ou obtus d'un triangle *rectangle* ou *obtusangle*, sur le côté opposé, tombe toujours dans l'intérieur du triangle, puisque alors les deux angles adjacents à ce côté sont nécessairement aigus.

Du triangle isoscèle et du triangle équilatéral.

Un TRIANGLE est dit SCALÈNE, ISOSCÈLE, ou ÉQUILATÉRAL, suivant qu'il a ses *trois côtés inégaux*, ou *deux* de ses *côtés égaux*, ou ses *trois côtés égaux*.

Lorsque le triangle est *isoscèle*, on nomme BASE le côté différent des deux autres, et SOMMET le point commun aux deux côtés égaux.

THÉORÈME III. (*Fig.* 40.) FIG. 40.

N° 38. — *Dans tout triangle isoscèle*, CAB, *les angles*, A, B, *opposés aux côtés égaux*, CB, CA, *sont égaux*.

Soit élevée du point D, milieu de la base AB, une perpendiculaire DE sur cette base. Puisque l'on a, par hypothèse, CA = CB, il s'ensuit (n° 41, *scolie* II) que le point C se trouve sur DE.—Cela posé, faisons tourner CDB autour de DC comme charnière; les deux figures CDB, CDA, s'appliqueront exactement l'une sur l'autre. Ainsi, l'angle CBD ou CBA est égal à l'angle CAD ou CAB; ou simplement B = A.

COROLLAIRE.—*Tout triangle équilatéral est* nécessairement *équiangle*, — puisque, les trois *côtés* étant *égaux deux à deux*, les trois *angles* sont aussi *égaux deux à deux*.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 41.) FIG. 41.

N° 39. — *Si deux côtés d'un triangle* CAB *sont inégaux*, *à un*

plus grand côté est opposé un plus grand angle, — [c'est-à-dire que si l'on a, par exemple, CA > CB, on a aussi B > A].

Élevons encore, du milieu D de AB, la perpendiculaire DE sur AB. — Puisque l'on a, par hypothèse, CA > CB, il s'ensuit (n° 41, *N. B.*) que le point C est situé, par rapport à la perpendiculaire DE, du même côté que le point B; et si l'on joint le point B au point I où AC rencontre DE, on aura (n° 41) AI = IB; d'où, en vertu du théorème précédent,

$$\textit{angle}\ \mathrm{IBA} = \textit{angle}\ \mathrm{IAB},$$

et par conséquent

$$\mathrm{CBI} + \mathrm{IBA} > \mathrm{IAB}, \quad \text{ou} \quad \textit{angle}\ \mathrm{B} > \textit{angle}\ \mathrm{A}.$$

Théorème V.

N° 60. — Réciproquement : — 1° — *Si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux* [et le triangle est *isoscèle*];

2° — *Si deux angles sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Cette double proposition est une conséquence nécessaire du principe établi au *numéro* 21, et se démontrerait facilement *par l'absurde* au moyen des deux *théorèmes* précédents.

N° 61. — Scolie important *sur le triangle isoscèle.*

Fig. 40. La droite DE (*fig.* 40) menée par le milieu de la base et perpendiculairement à cette base, devant passer par le sommet opposé C, et divisant en même temps l'angle C en deux parties égales [ainsi que cela résulte de la superposition des deux figures CDB, CDA], se trouve ici remplir *quatre conditions* essentiellement différentes, savoir : — 1° — de passer par le *milieu* de la base; — 2° — d'être *perpendiculaire* à cette base; — 3° — de passer par le *sommet* du triangle; — 4° — de diviser l'angle au sommet en *deux parties égales.*

Or on sait (nos 6, 27, 43) que *deux* de ces *conditions suffisent pour déterminer une droite* : ainsi la droite qui remplira *deux* de ces conditions satisfera nécessairement aux *deux autres.*

De là résultent plusieurs autres théorèmes, parmi lesquels nous nous bornerons à énoncer les suivants :

1° — *La droite qui joint le sommet d'un triangle isoscèle au milieu de la base, est en même temps perpendiculaire à cette base, et divise l'angle au sommet en deux parties égales;*

2° — *La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isoscèle passe par le milieu de la base, et lui est perpendiculaire;* — etc.

Toutes ces propositions se démontrent par la réduction à l'*absurde*, et à l'aide du *théorème* III.

De l'égalité des triangles.

Lemme fondamental *pour l'égalité des figures.*

N° **62.** — *Toute figure rectiligne convexe*, ABCDE (*fig.* 42), *étant actuellement placée dans un plan, on peut la disposer dans ce plan, de telle manière,* — 1° — *que l'un de ses côtés,* AB, *prenne une position déterminée,* AB′, *sur une droite* AX *tirée indéfiniment dans un seul sens à partir d'une des extrémités,* A, *de ce côté, et* — 2° — *que la figure se trouve entièrement située dans celle que l'on voudra des deux régions du plan* (n° **11**) *par rapport à cette droite.* Fig. 42.

En effet, on peut d'abord, à l'aide d'un *pivotement* (n° **19**) autour du point A, faire prendre au polygone une position AB′C′D′E′, telle que AB′ = AB soit dirigée suivant AX.

On peut ensuite, *si cela est nécessaire,* rabattre la nouvelle figure de l'autre côté de AB′ pris pour charnière (n° **18**): elle prend alors [si elle ne l'avait déjà acquise par le premier mouvement] la position AB′C″D″E″.

Les conditions de l'énoncé sont nécessairement satisfaites.

Scolie. — Supposons, en outre, que l'on transporte le troisième polygone de manière que le sommet A vienne prendre position en un point arbitraire O, et le point B′ en un certain point de la droite OZ menée parallèlement à AX, et dans le même sens que cette dernière: — de cette manière, le troisième polygone se trouvera représenté par OPQRS, situé par rapport à OZ comme AB′C″D″E″ l'était par rapport à AX.

Cela posé, les deux figures OPQRS, AB′C″D″E″, auront nécessairement *tous leurs côtés parallèles deux à deux et de même sens.*

En effet, puisque OP et AB′ sont parallèles et de même sens, et puisque l'on a d'ailleurs

$$\textit{angle}\ \mathrm{OPQ} = \textit{angle}\ \mathrm{AB'C''},$$

il s'ensuit (n° 59, *réciproque*), que PQ, B′C″, sont parallèles et de même sens. — Même raisonnement par rapport aux autres côtés.

On exprime cette dernière propriété en disant,* d'une manière abrégée, que la figure AB′C″D″ E″, pour venir en OPQRS, a été *transportée parallèlement à elle-même*; et c'est dans cette situation relative des deux polygones, OPQRS, AB′C″D″E″, que l'on a coutume de considérer les figures quand on veut établir les conditions de leur égalité.

Fig. 44. Théorème VI. (*Fig.* 44.)

N° 63.—*Deux triangles sont égaux,* — soit 1° — *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;* — soit 2° — *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun;* — soit 3° — *lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Premier cas.—Soient les deux triangles ABC, A′B′C′, dans lesquels on suppose AB = A′B′, et les *angles* A, B, respectivement égaux aux *angles* A′ et B′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que le côté A′B′ coïncide avec son égal AB. — A cause de l'égalité des angles A′ et A, B′ et B, les côtés A′C′, B′C′, prendront respectivement les directions de AC, BC; et le point C′, rencontre de A′C′, B′C′, coïncidera avec le point C, rencontre de AC, BC. Les deux triangles se recouvrant alors parfaitement, sont donc égaux.

Deuxième cas. — Soient AB = A′B′, AC = A′C′, et l'*angle* A égal à l'*angle* A′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que A′B′ coïncide avec son égal AB.— Comme on a

$$\textit{angle}\ \mathrm{A'} = \textit{angle}\ \mathrm{A},$$

la droite A′C′ prendra la direction AC; et, à cause de A′C′ = AC, le point C′ tombera en C; donc le côté B′C′ coïncidera avec

le côté BC; et les deux triangles se recouvriront encore parfaitement.

Troisième cas. — L'égalité des deux triangles serait démontrée si l'on pouvait prouver que l'angle A′ est égal à l'angle A, puisqu'alors la proposition rentrerait dans le cas précédent. Or, je dis que l'angle A, par exemple, ne saurait surpasser l'angle A′.

En effet, portons, comme précédemment, le triangle A′B′C′ (*fig.* 44), sur le triangle ABC, de manière que A′B′ coïncide avec AB. — L'angle A′ étant supposé plus petit que l'angle A, le côté A′C′ prendra une direction AC″ intérieure à l'angle BAC, le point C′ tombant en C″, par exemple [extérieurement à ABC]; de sorte que le triangle A′B′C′ se trouvera dans la position ABC″. Fig. 44

Cela posé, soient AL la bissectrice de l'angle CAC″, et L son point d'intersection avec BC; menons LC″. — Les deux triangles ALC″, ALC, ainsi formés, sont égaux comme ayant un angle égal, l'angle en A, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir: AL commun, et AC″ = AC; d'où résulte LC″ = LC.

Mais dans le triangle BLC″, on a

$$BC'' < BL + LC'',$$

ou $BC'' < BL + LC$, ou enfin $B'C' < BC$,

ce qui est *contre l'hypothèse;*

donc *angle* A′ = *angle* A;

Donc, etc.

N. B. — La démonstration est absolument la même, soit que le point C′ tombe hors du triangle ABC, comme dans la figure actuelle, soit qu'il tombe au dedans. Quant au cas où il tomberait sur le côté BC, l'absurdité du résultat B′C′ < BC [d'où nous avons conclu la *fausseté* de l'hypothèse A′ < A] se reconnaît immédiatement.

N° 64. — Scolie. — Le moyen de démonstration qui vient d'être employé pour le troisième cas d'égalité, nous conduit à cette nouvelle proposition qui sera d'un assez fréquent usage dans la suite:

Lorsque deux côtés, AB, AC (*fig.* 44), *d'un triangle* ABC *sont égaux, chacun à chacun, à deux côtés*, A′B′, A′C′, *d'un autre* Fig. 44.

triangle A′B′C′, *suivant que l'angle* A *compris par les premiers est plus grand ou plus petit que l'angle* A′ *compris par les derniers, le troisième côté du premier triangle est plus grand ou plus petit que le troisième côté du second triangle.*

Nous croyons superflu de donner la démonstration de cette proposition, parce que, sauf la conséquence, elle serait, en tous points, semblable à celle que nous avons donnée plus haut.

Réciproquement : — *Lorsque deux côtés d'un triangle sont égaux, chacun à chacun, à deux côtés d'un autre triangle, l'angle compris par les premiers côtés est plus grand ou plus petit que l'angle compris par les derniers, suivant que le troisième côté du premier triangle est plus grand ou plus petit que le troisième côté du second.*

Cette *réciproque*, en vertu du n° 21, est une conséquence nécessaire de la *directe* et du *troisième cas* du *théorème* précédent.

Fig. 45. Théorème VII. (*Fig.* 45.)

N° 68. — *Deux triangles*, ABC, A′B′C′, *rectangles* [en A et A′] *sont égaux :*

Soit, 1° — *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal*, B = B′;

Soit, 2° — *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal*, AB = A′B′.

1° — Les deux angles aigus C, C′, étant respectivement les compléments des angles égaux B, B′ (n° 56), sont aussi égaux entre eux ; dès lors, les deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ; et la proposition rentre dans le premier cas du n° 63.

2° — Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que A′B′ coïncide avec son égal AB. — Comme les deux angles A, A′, sont *droits*, le côté A′C′ prendra la direction de AC ; et je dis qu'en même temps B′C′ prendra celle de BC. Car supposons, pour un instant, que B′C′ prenne une direction différente de BC, et telle que BD : le triangle A′B′C′ serait alors représenté par le triangle ABD, et l'on aurait B′C′ = BD ; d'où, à cause de B′C′ = BC par hypothèse, on déduirait BC = BD, *résultat absurde* (n° 40).

Ainsi B'C' doit nécessairement tomber sur BC ; donc, les deux triangles A'B'C', ABC, se recouvrant parfaitement, sont égaux.

Remarques importantes sur l'égalité des triangles, et sur l'usage de cette théorie.

N° 66. — SCOLIE I. — Dans les différents cas d'égalité qui viennent d'être traités, nous avons supposé, *à priori*, les deux triangles situés dans un même plan et disposés *de la même manière*. Or, c'est une supposition permise d'après le LEMME établi au n° 62 ; en effet, après avoir d'abord (n° 8) ramené, s'il n'y était pas, le triangle A'B'C' dans le même plan que ABC, on peut toujours le faire *tourner* ou *pivoter*, le *renverser* si cela est nécessaire, le *rapprocher* même du premier (*scolie* du même *numéro*), de manière que deux côtés supposés égaux dans ces triangles, deviennent parallèles et de même sens.

N° 67. — SCOLIE II. — Bien que, dans la composition d'un triangle, il entre toujours *six éléments*, savoir : *trois côtés* et *trois angles ;* cependant, pour être assuré qu'il y a égalité entre deux triangles, il n'est pas nécessaire de savoir *à priori* que les six éléments de l'un sont égaux, chacun à chacun, aux six éléments de l'autre. *Trois* de ces *égalités suffisent,* en général, pour entraîner l'égalité des deux triangles.

Toutefois, il faut observer d'abord que, parmi les éléments donnés comme égaux, il y ait *au moins un côté.* Car, soit le triangle ABC (*fig.* 46) dans lequel on a mené B'C' parallèle à BC ; les deux FIG. 46.
triangles ABC, A'B'C', ont les trois angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle A commun, et les angles B et B', C et C', respectivement égaux comme correspondants (n° 51). Or, ces deux triangles sont évidemment *inégaux.*

De plus, comme on entend (n° 18) par figures *égales,* deux figures qui peuvent être *superposées,* il est clair que, du moment où la superposition de deux triangles est opérée,

A des côtés égaux sont opposés des angles égaux ;— et réciproquement. — Ainsi, une seconde condition nécessaire pour entraîner l'égalité de deux triangles avec *trois* éléments donnés comme

égaux, est que chaque *angle* ou chaque *côté* donné comme *égal*, soit ou puisse être considéré comme *opposé* à un *côté* ou à un *angle* égal dans les deux triangles.

Cette double restriction en apporte nécessairement beaucoup au nombre des cas d'égalité, lesquels, ainsi qu'on peut facilement le reconnaître, se réduisent, pour les triangles obliquangles, à *quatre* essentiellement *différents*, dont les *trois principaux* ont fait l'objet du *numéro* 63 : ceux-ci sont les seuls dont nous aurons, par la suite, à faire usage.

Le cas où l'on supposerait que les deux triangles ont *deux angles égaux chacun à chacun, ainsi que le côté opposé à l'un d'eux*, ce cas, disons-nous, rentre évidemment dans le premier du n° 63, puisque (n° 55) le troisième angle est aussi égal dans les deux triangles.

Quant au quatrième cas, essentiellement distinct des précédents, nous y reviendrons plus tard.

N° 68. — Scolie III. — L'usage principal de la théorie des triangles égaux est de simplifier une foule de démonstrations, en rendant inutiles des superpositions de figures, que souvent, sans le secours de cette théorie, on serait obligé d'opérer pour constater l'égalité de certaines droites, de certains angles qui entrent dans ces figures.

§ IV. — *Du quadrilatère et de ses différentes espèces.*

Fig. 47. Théorème Ier. (*Fig.* 47.)

N° 69. — *Dans tout quadrilatère* ABCD, *la somme des angles est égale à* 4 Droits.

Tirons la diagonale AC; la somme des angles du quadrilatère est évidemment égale à celle des angles des triangles ABC, ADC. Or, dans chaque triangle, la somme des angles vaut 2 *droits* (n° 55); *donc*, etc.

Corollaire. — Si *deux* des *angles* d'un quadrilatère sont *droits*, les *deux autres* sont *supplémentaires* (n° 28).

N° 70. — Scolie. — *Deux angles qui ont leurs côtés* [prolon-

gés s'il est nécessaire] *perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux* ou *supplémentaires;* — [c'est-à-dire (nº 28) *égaux* s'ils sont de même espèce, *supplémentaires* s'ils sont d'espèce différente].

En effet, observons d'abord que, pour tout angle donné BAC (*fig.* 48), on peut toujours trouver un point O *intérieur* tel, que les perpendiculaires abaissées de ce point sur AB, AC, déterminent, avec ces côtés, un quadrilatère convexe ADOE. [Il suffit pour cela que les deux angles OAB, OAC, soient aigus (nº 87); or, si l'angle BAC est aigu, tout point intérieur jouit de la propriété énoncée; et s'il est obtus, on peut prendre un point quelconque de la *bissectrice* AL.] Fig. 48.

Cela posé, quelle que soit la position par rapport à l'angle BAC, d'un second angle B'A'C' [qui n'est pas représenté sur la figure, parce que cette position relative est très-variable], on peut du moins affirmer que les côtés de l'angle B'A'C' sont (nº 52) respectivement parallèles à ceux de l'angle DOE du quadrilatère ADOE, et par suite (nº 53), que les angles B'A'C', DOE, sont *égaux* ou *supplémentaires*. Or, dans le quadrilatère ADOE, les deux angles en A et en O sont *supplémentaires* (nº 69, *corol.*); donc les deux angles BAC, B'A'C', sont *supplémentaires* ou *égaux; ce qu'il fallait démontrer.*

Du parallélogramme et de ses variétés.

Nº 71. — On nomme PARALLÉLOGRAMME un *quadrilatère* ABDC (*fig.* 49) *dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.* — D'où il résulte nécessairement Fig. 49.

1º que — *Deux parallélogrammes*, ABDC, A'B'D'C', *sont égaux quand ils ont un angle égal* [A = A'] *compris entre côtés égaux chacun à chacun.*

Car si l'on place l'angle A' sur l'angle A, comme on a en outre

$$A'B' = AB, \quad A'C' = AC,$$

les points B', C', tomberont respectivement sur les points B, C.

Dès lors B′D′, C′D′, devront prendre les directions de BD, CD; autrement, il s'ensuivrait que d'un même point, B ou C, l'on pourrait mener deux parallèles à une même droite, *ce qui est absurde* (n° 34).—Ainsi les deux figures se recouvriront parfaitement.

2° Que — *Dans tout parallélogramme, les angles opposés* [A et D, B et C] *sont égaux* (n° 52, *coroll.* I);

et 3° que RÉCIPROQUEMENT : — *Si les angles opposés d'un quadrilatère sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

En effet, on a (n° 69)

$$A + B + D + C = 4 \text{ angles droits};$$

mais, par hypothèse,

$$A = D, \quad \text{et} \quad B = C;$$

donc cette égalité revient à ces deux-ci :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B = 4 \text{ droits} \\ 2D + 2C = 4 \text{ droits} \end{array} \right\}, \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B = 2 \text{ droits} \\ D + C = 2 \text{ droits} \end{array} \right\}.$$

Ainsi (n° 47) les côtés AC et BD, AB et CD, sont parallèles deux à deux; *C. Q. F. D.*

FIG. 49. THÉORÈME II. (*Fig.* 49.)

N° 72. — *Dans tout parallélogramme* ABDC, *les côtés opposés* [AB et CD, AC et BD] *sont égaux deux à deux.*

Menons la diagonale AD, et comparons les deux triangles ABD, ACD : ils ont d'abord le côté commun AD; de plus, les deux angles DAB, ADC, sont égaux (n° 51) comme alternes-internes; et les deux angles CAD, ABD, sont aussi égaux, par la même raison. Ainsi, ces deux triangles sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc les côtés BD, AC, opposés aux angles égaux DAB, ADC, sont égaux, ainsi que les côtés CD, AB, opposés aux angles égaux CAD, ADB (*voyez* le *scolie* II du n° 67); *C. Q. F. D.*

RÉCIPROQUEMENT : — *Si les côtés opposés d'un quadrilatère* ABDC *sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme;*

Car alors les deux triangles ABD, ADC, ont les trois côtés égaux chacun à chacun; d'où l'on conclut (nº 67, *scolie*):

angle BAD = *angle* ADC, et *angle* DAC = *angle* ADB;

donc (nº 46) les droites AB et CD, BD et AC, sont parallèles deux à deux.

Nº 73. — Scolie. — Le théorème précédent peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Les parties de parallèles comprises entre parallèles sont égales(*) : — proposition qui renferme, comme cas particulier, le théorème Ier du nº 44.

Théorème III. (*Fig.* 49.) Fig. 49.

Nº 74. — *Si deux côtés opposés*, AB, CD, *d'un quadrilatère* ABCD, *sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

En effet, menons la diagonale AD: les deux triangles ABD, ACD, ont le côté AD commun, et AB = CD par hypothèse; de plus, puisqu'on suppose en outre AB parallèle à CD, les angles alternes-internes DAB, ADC, sont égaux (nº 31). Ainsi les deux triangles, ayant un angle égal compris entre côtés égaux, sont égaux; d'où il résulte (nº 67) que l'angle CAD opposé au côté CD est égal à l'angle ADB opposé au côté AB; donc (nº 46) les deux droites AC, BD, sont parallèles. — *Donc*, etc.

Nº 75. — Corollaire I. — *Dans tout parallélogramme* ABDC

(*) On peut démontrer cette proposition sans le secours de la théorie de l'égalité des triangles, en opérant, *par un simple pivotement*, la superposition des deux figures ACD, ABD : — Faites tourner, comme au nº 46, le triangle ACD autour du milieu I de AD, de manière que IA vienne s'appliquer sur ID, et ID sur IA. Puisque l'on a, en vertu du parallélisme,

angle CAD = *angle* ADB, et *angle* CDA = *angle* BAD,

les droites AC, DC, prendront les directions des droites DB, AB, et réciproquement : ainsi les deux figures ABD, ACD, se recouvriront parfaitement; et l'on aura

AC = BD, AB = DC.

(*fig.* 49), *la droite* [EF ou GH] *qui joint les milieux* [E, F, ou G, H] *de deux côtés parallèles, est égale et parallèle aux deux autres.*

Car, de ce que les droites AE, BF, sont égales comme moitiés de lignes égales AC, BD, et de ce que AE est parallèle à BF, il s'ensuit (n° 74) que ABFE est un parallélogramme; et l'on a

$$EF = AB = CD.$$

On démontrerait de même que

$$GH = AC = BD.$$

Fig. 29. Corollaire II. — *En joignant les extrémités* E, F, *de deux perpendiculaires égales*, GE, HF (*fig.* 29), *menées à une même droite* AB [dans la même région], *on obtient une parallèle à cette droite.*

C'est encore une conséquence évidente du théorème principal.

Fig. 50.

Théorème IV. (*Fig.* 50.)

N° 76. — *Les diagonales*, AD, BC, *d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit O le point d'intersection des deux diagonales; les triangles AOC, DOB, sont égaux comme ayant un côté égal [AC = BD] adjacent à des angles égaux chacun à chacun, savoir :

$$CAO = ODB, \quad ACO = OBD;$$

donc (n° 67)

$$AO = OD, \qquad BO = OC.$$

N. B. — Le point O est dit le *centre* du parallélogramme.

Réciproquement : — *Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.*

Car, de OA=OD et BO=OC, on déduit l'égalité des triangles AOC, BOD (n° 63, 2e *cas*); d'où, par suite,

$$AB = CD, \quad AC = BD;$$

ainsi (n° 74) ABDC est un parallélogramme.

Fig. 50. Scolie. — *La plus grande* AD *des deux diagonales d'un parallélogramme* ABCD (*fig.* 50) *est la diagonale opposée au plus grand angle.*

En effet, les deux triangles ACD, CAB, ont le côté commun AC; de plus, le côté CD est égal à AB. D'ailleurs, l'angle ACD est plus grand que l'angle CAB; donc, en vertu du *scolie* n° 64, le côté AD, opposé à ACD, est plus grand que le côté CB, opposé à CAB.

Du losange.

N° 77. — On appelle LOSANGE, ou quelquefois RHOMBE (*), un *quadrilatère* ABDC (*fig.* 51) *dont tous les côtés sont égaux.* FIG. 51.

Le losange n'étant alors (n° 72, *récip.*) qu'une variété du parallélogramme, jouit nécessairement de toutes les propriétés de celui-ci. — Ainsi par exemple (n° 71),

Deux losanges sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et un angle égal.

Mais il est une autre propriété fort importante, particulière au losange, que nous allons démontrer.

THÉORÈME V. (*Fig.* 51.) FIG. 51.

N° 78. — *Les diagonales d'un losange se coupent à angles droits.*

Comparons les deux triangles AOB, AOC. Ils ont le côté commun AO, le côté OC égal à OB (n° 76), et le côté AC égal à AB, par la nature du losange. Donc ces deux triangles sont égaux (n° 63, 3e *cas*); d'où l'on déduit

angle AOC = *angle* AOB.

Ainsi les quatre angles en O sont droits.

RÉCIPROQUEMENT : — *Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent à angle droit et mutuellement en deux parties égales, la figure est un losange.*

Car alors les quatre triangles AOB, AOC, BOD, COD, sont égaux (n° 63, 3e *cas*); et l'on a

AB = AC = BD = CD.

(*) De cette expression dérive celle de *rhomboïde*, que l'on emploie quelquefois pour désigner le *parallélogramme*, et celle de *rhomboèdre*, signifiant un corps qui a pour faces 6 *losanges*.

SCOLIE. — En revenant sur la proposition directe, on voit, d'après l'égalité des deux triangles AOB, AOC, que les angles CAO, OAB, opposés aux côtés égaux OC, OB, sont égaux; d'où il suit que

Dans un losange, chaque diagonale divise en deux parties égales les angles qui lui correspondent [c'est-à-dire, qui ont pour sommets les extrémités de cette droite].

Au reste, ces trois propositions peuvent être facilement déduites de la théorie des perpendiculaires (n° 41), ou de celle des triangles isoscèles (n° 61), abstraction faite de l'égalité des triangles.

Du rectangle.

FIG. 52. N° 79. — Le RECTANGLE est un *quadrilatère* ABDC (*fig.* 52) *dont les quatre angles sont droits.* — C'est aussi un parallélogramme dont deux côtés contigus sont perpendiculaires entre eux; d'où il résulte, en vertu de la théorie des parallèles, que les quatre angles sont *droits.*

Deux rectangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés contigus égaux chacun à chacun.

La propriété caractéristique du rectangle, celle qui le distingue d'un parallélogramme quelconque, consiste en ce que:

FIG. 52. THÉORÈME VI. (*Fig.* 52.)

Les deux diagonales d'un rectangle sont égales.

En effet, les deux triangles BAC, ACD, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle droit CAB = ACD, AC commun, et AB = CD; d'où l'on déduit BC = AD.

RÉCIPROQUEMENT : — *Si les diagonales d'un quadrilatère ABDC sont égales et se coupent en parties égales, la figure est un rectangle.*

D'abord, ABDC est un parallélogramme (n° 76, *réciproque*); ainsi, tout se réduit à prouver que les deux angles en A et en C sont égaux, puisque leur somme vaut 2 *droits* (n° 81). Or on a, par hypothèse, et à cause des propriétés du parallélogramme,

$$AO = OC = OB;$$

d'où il suit que les triangles AOC, AOB, sont isoscèles, et donnent (n° 88) *angle* CAO = *angle* ACO,

angle OAB = *angle* OBA = *angle* OCD;

donc

CAO + OAB = ACO + OCD, ou CAB = ACD;

C. Q. F. D.

Du carré.

N° 80. — Le Carré est un *quadrilatère* (*fig.* 53), *dont tous les côtés sont égaux*, et *dont tous les angles sont droits*. Fig. 53.

Cette figure est donc à la fois un cas particulier du losange, et un cas particulier du rectangle. — [Ce qui la distingue surtout du losange, c'est que, dans celui-ci, les quatre côtés sont égaux sans être à *angles droits*.]

Ainsi — *Le carré a ses deux diagonales égales*, comme le rectangle; — et ces diagonales se coupent *à angles droits*, comme celles du losange.

En outre, les quatre triangles AOB, AOC, COD, DOB, sont *isoscèles*, *rectangles*, et *égaux* entre eux, c'est-à-dire superposables; tandis que, dans le losange (*fig.* 51), ces triangles sont aussi rectangles, égaux et superposables, *sans être isoscèles*, et que, dans le rectangle, ils sont *isoscèles* sans être égaux. Fig. 51.

En un mot, le carré, par sa forme symétrique, peut être considéré comme le plus simple des polygones.

Du trapèze.

N° 81. — Nous ne pouvons nous dispenser ici de faire connaître une autre espèce de quadrilatère dont les propriétés se lient naturellement à celles du parallélogramme.

Le Trapèze est un *quadrilatère* ABDC (*fig.* 54) *dont deux côtés seulement*, AB, CD, *sont parallèles*. — Ces côtés sont dits les *bases* du trapèze; et la perpendiculaire IK commune à ces deux bases, en est la *hauteur*. — Les deux côtés non parallèles sont dits les *côtés latéraux*. Fig. 54.

sommets, la somme des angles du polygone est évidemment égale à celle des angles de tous les triangles ainsi formés. Or, dans chaque triangle, la somme des trois angles est égale à 2 *droits* (n° 55); et il y a autant de triangles qu'il y a de côtés *moins deux* (n° 83); donc, *etc.*

N° 85. Scolie I. — Soit n le nombre des côtés; on a, pour l'expression abrégée de la somme des angles du polygone,

$$2(n - 2), \quad \text{ou} \quad 2n - 4$$

en effectuant la multiplication d'après les règles connues de la multiplication algébrique.

La dernière expression fournit un autre énoncé de

La somme des angles d'un polygone : elle *s'obtient en doublant le nombre des côtés, et retranchant* 4 *du résultat* [l'angle *droit* étant toujours pris pour *unité*].

On démontre directement la proposition ainsi présentée, en ayant recours au deuxième mode de décomposition indiqué au
Fig. 56. *numéro* 83. Il est visible, en effet (*fig.* 56), que la somme des angles du polygone est égale à celle des angles de tous les triangles qui ont leur sommet en O, *diminuée* de la somme de tous les angles formés *autour* de ce point, laquelle est (n° 31) égale à 4 *droits ;* donc, *etc.*

Faisons successivement, dans les deux expressions précédentes, $n=3$, $n=4$, $n=5$, $n=6,\ldots$; il vient ainsi, d'après la première,

2×1, 2×2, 2×3, $2\times4,\ldots$, ou 2, 4, 6, 8,...,

et d'après la deuxième,

$6-4$, $8-4$, $10-4$, $12-4,\ldots$, ou 2, 4, 6, 8,...,

suivant que les polygones ont 3, 4, 5, 6,... côtés, résultat qui s'accorde avec les théorèmes des n°s 55 et 69

N° 86. — Scolie II. — Si le polygone donné est *équiangle*, c'est-à-dire si tous ses angles sont égaux, on a, pour l'expression de chacun des angles,

$$\frac{2(n - 2)}{n}, \quad \text{ou} \quad \frac{2n - 4}{n}.$$

Ainsi, dans le *triangle équilatéral* (nº 58), chacun des angles vaut $\frac{6-4}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle *droit*

Dans le *carré* (nº 80), chaque angle vaut $\frac{8-4}{4}$ ou 1 *droit*.

On trouverait également $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{10}{7}$, ..., pour l'angle d'un *pentagone*, d'un *hexagone*, d'un *heptagone*, ..., supposé *équiangle*.

Enfin, l'expression $\frac{2n-4}{n}$ revenant à $2-\frac{4}{n}$, prouve que

Au delà de quatre côtés, chaque angle d'un polygone équiangle est toujours *obtus*.

THÉORÈME II. (*Fig.* 55 et 56.) FIG. 55 et 56.

Nº 87. — *Dans tout polygone convexe* ABCDEFG, si l'on prolonge tous les côtés dans le même sens (*), *la somme des angles extérieurs*, *a*BC, *b*CD, *c*DE, ..., ainsi formés, *est égale à* 4 DROITS.

En effet, on voit, d'après la *figure* et d'après le nº 29, que les angles, tant intérieurs qu'extérieurs, formés aux points A, B, C, ..., déterminent une somme totale égale à *autant de fois* 2 *droits qu'il y a de sommets* ou *de côtés* dans le polygone; ainsi (nº 85) cette somme surpasse de 4 angles *droits* celle des angles *intérieurs*; donc il reste nécessairement 4 *droits* pour la somme des angles *extérieurs*.

AUTREMENT : — Si d'un point O (*fig.* 57) pris arbitrairement dans le plan du polygone, on mène O*a'*, O*b'*, O*c'*, ..., respectivement parallèles à A*a*, B*b*, C*c*, ..., et de même sens que ces droites, les angles *a'*O*b'* et *a*B*b*, *b'*O*c'* et *b*C*c*, ..., sont égaux chacun à chacun (nº 52); donc la somme des angles *a'*O*b'*, *b'*O*c'*, ..., est égale à celle des angles *a*B*b*, *b*C*c*.... Mais la première vaut 4 angles *droits* (nº 31) : donc aussi, la seconde vaut 4 angles *droits*. FIG. 57.

(*) Cette expression, *dans le même sens*, signifie que, si l'on faisait le tour du polygone en suivant, par exemple, l'ordre A, B, C, D, ..., il faudrait, avant de tourner pour passer d'un côté AB au suivant BC, puis de BC à CD, ..., prolonger toujours *en avant*, par exemple, le côté que l'on quitte, AB*a*, BC*b*, CD*c*, ...

SCOLIE. — *Un polygone convexe ne saurait avoir plus de trois angles aigus;*

Car s'il y en avait seulement *quatre*, il s'ensuivrait que la somme des angles extérieurs correspondants serait déjà plus grande que 4 *droits*.

Conditions d'égalité dans deux polygones convexes.

THÉORÈME III.

N° 88. — *Deux polygones convexes se confondent* nécessairement *lorsqu'ils ont les mêmes sommets.*

D'abord, toutes les droites qui joignent ces sommets deux à deux [côtés ou diagonales] coïncident. — En outre, *Un côté* du premier polygone *ne saurait être une diagonale* du second; car, si cela était, il s'ensuivrait (n° 36, 3°) que les sommets du premier polygone ne seraient pas tous situés dans la même région par rapport à ce côté; ce qui implique *contradiction* avec la nature des polygones convexes (n° 36).

Donc, puisque les côtés de l'un coïncident avec les côtés de l'autre, chacun à chacun, les deux polygones se confondent.

FIG. 58. THÉORÈME IV. (*Fig.* 58.)

N° 89. — *Deux polygones*, ABCDEF, A'B'C'D'E'F', *sont égaux lorsque, ayant un côté égal* [AF = A'F'], *ils sont tels*, en outre, *que les distances respectives des extrémités* [A et A', F et F'] *de ce côté à tous les autres sommets* B, C,..., B', C',..., *soient égales, chacune à chacune; et disposées de la même manière:*

[c'est-à-dire si l'on a

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad AD = A'D', \ldots,$$

puis $$FB = F'B', \quad FC = F'C', \quad FD = F'D', \ldots.$$]

En effet, faisons mouvoir [comme au n° 62] le second polygone dans son plan, de telle manière que le côté A'F' vienne prendre position sur son égal AF. — Puisque, par hypothèse, on a

$$AB = A'B', \quad \text{et} \quad FB = F'B',$$

les deux triangles ABF, A'B'F', sont égaux (n° 63, 3ᵉ *cas*), et s'ap-

pliqueront exactement l'un sur l'autre; donc le point B′ tombera en B. — De même, puisque

$$AC = A'C', \quad FC = F'C',$$

le point C′ tombera en C. Et ainsi de tous les autres sommets D et D′, E et E′,... des deux polygones. — Donc (nº 88) les deux polygones se recouvriront parfaitement, et sont par conséquent égaux.

Scolie I. — En disant dans l'énoncé, que les distances égales, AB et A′B′, AC et A′C′,..., FB et F′B′, FC et F′C′,..., sont *disposées de la même manière*, nous entendons que les lignes A′B′, A′C′,..., F′B′, F′C′,..., suivent entre elles le même ordre de position relative, que leurs égales AB, AC,..., FB, FC,...: en d'autres termes, ces lignes sont ou peuvent être toujours supposées *parallèles* deux à deux et de même sens. — (Voir le *scolie* du *lemme* nº 62.)

Cependant, il est bien entendu que le théorème précédent n'en subsisterait pas moins lors même que les deux polygones n'auraient pas actuellement la position indiquée par la *figure* 58. Fig. 58.

Nº 90. — Scolie II. — Si l'on désigne par n le nombre des côtés de chacun des polygones, le *nombre* des données supposées égales dans le *théorème* précédent, est évidemment *égal* à $(2n - 3)$. Car le nombre des sommets autres que A, F, ou A′, F′, étant $(n - 2)$ pour chaque polygone, on a $2(n - 2)$, ou $(2n - 4)$, pour le nombre des couples de distances égales

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \ldots, \quad \text{et} \quad FB = F'B', \quad FC = F'C', \ldots.$$

Mais à ce nombre $(2n - 4)$ il faut ajouter 1, à cause de $AF = A'F'$. Ainsi, le nombre total des données est égal à

$$(2n - 4 + 1) \quad \text{ou} \quad (2n - 3).$$

On peut conclure de là, *par induction*, que le nombre des données égales nécessaire pour établir l'égalité de deux polygones, est $(2n - 3)$, n exprimant le nombre des côtés.

Ainsi, le nombre des données est, pour le *triangle*, $2 \times 3 - 3$, ou 3; pour le *quadrilatère*, $2 \times 4 - 3$, ou 5; *etc.*

Mais il y a, comme pour le triangle (nº 67), des restrictions à

établir. Par exemple, si l'on fait entrer les angles en considération, *il faut que les angles* supposés *égaux soient* ou *puissent être* regardés comme *compris entre des côtés respectivement égaux*, condition qui est une conséquence nécessaire de la nature des figures superposables.

En outre, on ne doit jamais donner plus de $(n-1)$ angles égaux dans les deux figures, puisque (n° 84) la *somme des angles* doit être *la même* pour deux polygones d'un même nombre de côtés, *etc.*

Voici trois nouveaux cas d'égalité qu'il est utile de connaître :

FIG 58.

THÉORÈME V. (*Fig.* 58.)

N° 91.—*Deux polygones* [de n côtés], ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, *sont égaux*,

Soit 1° — *lorsqu'ils ont* $(n-1)$ *côtés consécutifs égaux chacun à chacun, ainsi que les* $(n-2)$ *angles compris entre ces côtés ;*

Soit 2° — *lorsqu'ils ont* $(n-2)$ *côtés consécutifs égaux chacun à chacun, ainsi que les angles qu'ils font entre eux et avec les deux autres ;*

Soit 3° — *lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun et disposés de la même manière* [ABC et A′B′C′, ACD et A′C′D′, . . .].

Nous renvoyons, pour la démonstration des deux premiers cas, au mode de superposition indiqué à la fin du n° 62. Seulement, observons que, dans le premier cas, lorsqu'on aura opéré la superposition du $(n-1)^{ième}$ côté D′E′ avec son égal DE, comme les points F′ et F, E′ et E, coïncideront, le $n^{ième}$ côté E′F′ sera nécessairement égal au $n^{ième}$ côté EF ; et les deux angles D′E′F′, E′F′A′, seront aussi respectivement égaux aux angles DEF, EFA, à cause de la superposition. — Donc il suffit de $(2n-3)$ éléments [côtés, angles] supposés égaux.

Même raisonnement par rapport au second cas.

Quant au troisième, on peut opérer directement la superposition des différents triangles supposés égaux dans les deux polygones, et, par suite, celle des deux polygones eux-mêmes ; — *ou bien* on peut dire : — Les triangles A′B′C′, ABC, étant supposés

égaux, il s'ensuit que leurs côtés et leurs angles sont égaux chacun à chacun. Pareillement, les triangles A'C'D', ACD, étant supposés égaux, leurs angles et leurs côtés sont respectivement égaux; et ainsi de suite. — D'où il est facile de conclure, — 1° que les côtés des deux polygones sont égaux chacun à chacun; — et 2° leurs angles sont aussi égaux comme composés d'angles reconnus égaux dans les triangles. — Ainsi le troisième cas rentre dans les deux premiers.

N° 92.—Scolie.—Nous observerons, par rapport à ce troisième cas, que, comme on a (n° 84) dans chaque polygone, $(n - 2)$ triangles dont le premier exige 3 données et les autres chacun 2, cela fait en tout

$$3 + 2(n - 3), \quad \text{ou} \quad 3 + 2n - 6, \quad \text{ou bien enfin} \ (2n - 3)$$

données supposées *égales*, comme ci-dessus.

Ajoutons, pour ce même cas, que par l'expression *assemblés de la même manière*, on doit entendre que les triangles égaux qui composent les deux polygones, y sont assemblés de telle façon que les angles égaux chacun à chacun de ces triangles forment par leur réunion, des angles égaux chacun à chacun dans les deux polygones. Autrement, ces polygones, quoique composés de parties égales et superposables chacune à chacune, ne seraient pas eux-mêmes superposables.

N° 93. — Scolie général *sur tous les cas d'égalité précédents.*

Les *réciproques* des propositions comprises dans les énoncés des *théorèmes* IV et V sont des conséquences nécessaires et évidentes de la nature des *figures égales et superposables.*

On nomme *côtés* et *angles homologues,* les côtés et les angles respectivement superposables dans deux figures reconnues égales; *sommets homologues,* les sommets d'angles homologues; *diagonales homologues,* les diagonales qui joignent deux sommets homologues. — En général, on appelle *points homologues,* deux points qui, avec les extrémités de deux côtés homologues, forment deux triangles égaux et disposés *de la même manière* dans les deux polygones. Enfin, deux *droites homologues* sont deux droites

qui joignent des points homologues ; et les portions de ces droites, limitées par des points homologues, sont nécessairement *égales*.

§ VI. — *Théorèmes divers.*

Nous terminerons le premier chapitre par quelques propositions qui, sans faire partie essentielle de la théorie, n'en sont pas moins utiles ou curieuses à connaître.

FIG. 59. THÉORÈME I. (*Fig.* 59.)

N° 94. — *Dans tout triangle* ABC, *un angle* C *est* DROIT, AIGU, *ou* OBTUS, *suivant que la droite* CD *qui joint le sommet de cet angle au milieu* D *du côté opposé* AB, *est* ÉGALE, SUPÉRIEURE, *ou* INFÉRIEURE, *à la moitié* AD *de ce côté.*

1° — Soit $CD = AD = DB$;

il en résulte (n° 88)

$$\textit{angle}\ CAD = \textit{angle}\ ACD, \quad \textit{angle}\ CBD = \textit{angle}\ BCD\ ;$$

ce qui fait voir que l'angle total C est égal à $A + B$.

Or, on a (n° 88)

$$A + B + C = 2\ \textit{droits}\ ;$$

donc l'angle C, moitié de cette somme, vaut 1 *droit*.

2° — Soit $CD > AD$ ou $> DB$;

il en résulte (n° 89)

$$CAD > ACD, \quad CBD > BCD;$$

d'où $\textit{angle}\ A + \textit{angle}\ B > ACD + BCD$, ou $A + B > C$;

et comme on a $A + B + C = 2\ \textit{droits}$,

il faut nécessairement que C soit $<$ 1 *droit*, c'est-à-dire qu'il soit *aigu*.

3° — Soit $CD < AD$ ou $< DB$;

il s'ensuit

$$CAD < ACD, \quad CBD < BCD;$$

d'où $A + B < C$;

or $A + B + C = 2$ *droits;*

donc, $C > 1$ *droit.*

Scolie. — Cette proposition peut servir à faire connaître immédiatement l'espèce d'un angle dans un triangle donné.

Théorème II. (*Fig.* 60.) Fig. 60.

N° 95. — *Les bissectrices* AA', BB', CC', *des trois angles d'un triangle*, ABC, *se coupent en un même point* O.

En effet, considérons d'abord les deux bissectrices CC' et AA'; on a vu (n° 43) que tout point de la première est *également distant* des côtés CA et CB, et que tout point de la seconde est également distant de AC et de AB; donc le point O où elles se rencontrent, est à égale distance des trois droites AC, CB, BA. Ainsi (n° 43, *scolie* I) ce point appartient aussi à la bissectrice BB'.

Scolie. — Si l'on prolonge les côtés AC, AB, en L, I, et que l'on considère les bissectrices des deux angles LCB, CBI [lesquelles, comme on l'a vu au n° 43, *scol.* III, font des angles droits avec CC' et BB'], ces deux bissectrices *se coupent* en un point O' situé sur la bissectrice de l'angle A. — Cela est évident, puisque le point O' est également distant de AC et de AB.

Théorème III. (*Fig.* 61.) Fig. 61.

N° 96. — *Les perpendiculaires élevées par les milieux* A', B', C', *des trois côtés d'un triangle, se coupent en un même point.*

D'abord, les deux perpendiculaires C'I, B'K, se rencontrent toujours (n° 80, *scol.* II) en un certain point O, lequel (n° 41) est également distant de A et de B, de A et de C, et par conséquent des deux points B, C. Donc ce même point appartient (n° 41, *scol.* I) à la perpendiculaire élevée par le milieu A' de BC.

Scolie. — La rencontre des trois perpendiculaires peut avoir lieu, tantôt *au dedans*, tantôt *au dehors* du triangle.

FIG. 62.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 62.)

N° 97. — *Les perpendiculaires* AA′, BB′, CC′, *abaissées des trois sommets d'un triangle sur les côtés respectivement opposés, se coupent en un même point.*

Menons, par les trois points A, B, C, des droites B″C″, A″C″, A″B″, respectivement parallèles à BC, AC, AB. — Puisque, par construction, CB est parallèle à AB″, et AB parallèle à CB″, il s'ensuit (n° 71) que ABCB″, ACBC″, sont des parallélogrammes; donc (n° 72) on a

$$CB = AB'' = AC'':$$

ainsi le point A est le milieu de B″C″. On prouverait de même que les points B et C sont les milieux respectifs de A″C″, A″B″; donc les perpendiculaires AA′, BB′, CC′, se trouvent élevées par les milieux des côtés A″B″, A″C″, B″C″, du triangle A″B″C″; et la proposition rentre dans le théorème précédent.

SCOLIE. — La rencontre des trois perpendiculaires peut encore avoir lieu *au dedans* ou *au dehors* du triangle.

FIG. 63.

THÉORÈME V. (*Fig.* 63.)

N° 98. — *Les droites* AA′, BB′, CC′, *menées des trois sommets d'un triangle aux milieux des côtés respectivement opposés, concourent en un même point.*

Considérons d'abord les deux droites AA′, CC′; et soit O leur point de rencontre. Menons la droite A′C′, et, après avoir pris les milieux A″, C″, de OA, OC, tirons A″C″. La droite A′C′ passant par les milieux de CB et de AB, est parallèle à AC (n° 82, *scol.* III); par la même raison, la droite A″C″ est aussi parallèle à AC; donc (n° 34, 3°) les droites A′C′, A″C″, sont parallèles entre elles; et de plus, elles sont égales chacune à la moitié de AC (n° 82, *scol.* III).

Cela posé, les deux triangles OA′C′, OA″C″, sont égaux comme ayant un côté égal [A′C′ = A″C″] adjacent à deux angles égaux chacun à chacun [C′A′O = C″A″O, A′C′O = A″C″O (n° 51)]; et de leur égalité l'on peut conclure que OC′ = OC″, OA′ = OA″.

Or, on a d'ailleurs, par construction, $OC'' = C''C$, $OA'' = A''A$; d'où l'on voit que le point O est situé sur les droites AA′ et CC′, au tiers de chacune, à partir de CB et de AB.

On démontrerait de même, en considérant les droites AA′, BB′, que leur point de rencontre doit se trouver au tiers de AA′, à partir de CB; donc *nécessairement*, les trois droites AA′, BB′, CC′, se rencontrent en un même point *intérieur* O.

Scolie. — Ce point se trouve placé, pour chaque *côté du triangle*, sur la droite qui joint le *milieu* de ce côté avec le *sommet opposé*, *au tiers* à partir du côté, ou *aux deux tiers* à partir du sommet. — C'est une conséquence de la démonstration qui vient d'être donnée.

Théorème VI. (*Fig.* 64.) Fig. 64.

N° 99. — *Dans un parallélogramme quelconque* ABDC, soient menées les bissectrices des quatre angles :

Si l'on joint le point de rencontre E *des bissectrices de deux angles adjacents à un même côté* AC, *avec le point de rencontre* F *des bissectrices des angles adjacents au côté* BD *opposé* au premier, *la droite* EF *ainsi menée est* — 1° — *parallèle aux deux autres côtés*, *et* — 2° — *égale à la différence de deux côtés contigus* [AB—AC].

Prolongeons d'abord les bissectrices opposées, CE, BF, jusqu'à leurs rencontres respectives en G et en K avec AB et CD.

A cause des parallèles AB, CD, l'angle CGA est égal à l'angle GCD, et, par conséquent, égal à ACG, qui, comme GCD, est moitié de ACD. En outre, les deux angles ACG, KBA, sont aussi égaux comme moitiés des deux angles égaux ACD, ABD; donc

$$\textit{angle}\ \mathrm{CGA} = \textit{angle}\ \mathrm{KBA}.$$

Les deux droites CG, KB, sont alors parallèles (n° 32, *récip.*); et la figure CGBK est un parallélogramme.

D'ailleurs, le triangle ACG est isoscèle, à cause de l'égalité des angles en C et en G; ainsi (n° 61) la bissectrice AE divise CG en deux parties égales; et l'on a $CE = EG$. — On démontrerait de même, en considérant le triangle DKB, que $KF = FB$; donc

1° EF est parallèle à AB ou CD;

2° EF = GB = AB — AG = AB — AC.

C. Q. F. D.

Scolie. — Les deux triangles AEC, AEG, étant rectangles (n° 81), ainsi que les deux triangles DFK, DFB, il s'ensuit que, si l'on prolonge DF jusqu'à sa rencontre en I avec CG, et AE jusqu'à sa rencontre en L avec BK, on forme un parallélogramme *rectangle* EIFL. Ce rectangle devient un *carré* si la figure proposée est elle-même un rectangle, puisque alors les diagonales EF, IL, respectivement parallèles à AB, CD, et à AC, BD, se coupent à angles droits (*voyez* le n° 80). Enfin, ce rectangle *s'évanouit* ou *se réduit à un point* quand la figure proposée est un losange, puisque, dans ce cas, les bissectrices se confondent deux à deux.

Fig. 47. Théorème VII. (*Fig.* 47.)

N° 99 *bis.* — *Dans tout quadrilatère* ABCD, *les deux droites* EF, GK, *qui joignent les milieux respectifs des côtés opposés, et la droite* IL, *qui joint les milieux des deux diagonales, concourent en un même point, et se divisent mutuellement en deux parties égales.*

Menons les droites IG, GL, LK, KI. Puisque dans le triangle BAD, les points L et G sont les milieux de BD et AD, il s'ensuit (n° 82) que la droite LG est parallèle à AB et égale à sa moitié. Pareillement, dans le triangle ABC, la droite IK, qui joint les milieux de CA, CB, est parallèle à AB et égale à sa moitié. Donc les droites LG, IK, sont égales et parallèles; ainsi (n° 74) la figure IGLK est un parallélogramme dont IL et GK sont les diagonales. Par conséquent, ces droites se coupent en un point O, qui est le *milieu* de chacune d'elles (n° 76).

On prouverait de la même manière que la figure EIFL est un parallélogramme dont IL, EF, sont les diagonales. D'où il suit que la droite EF passe par le même point O, et y est divisé en deux parties égales; — *ce qui démontre le théorème énoncé.*

N. B. — Lorsque ABCD est un parallélogramme, les points I, L, se confondent avec le point O; et les figures IGLK, EIFL, se réduisent aux deux droites GK, EF.

THÉORÈME VIII. (*Fig.* 65.) FIG. 65.

N° 100. — *Dans un polygone convexe de n côtés, le nombre total des diagonales est représenté par* $\frac{(n-3)n}{2}$.

Concevons que l'on ait joint un premier sommet A à tous les autres [abstraction faite des sommets voisins B, G]; il est clair qu'on obtient d'abord un nombre de diagonales exprimé par $(n-3)$.

Comme on peut faire le même raisonnement pour chacun des n sommets, il s'ensuit que le nombre total des droites de jonction obtenues de cette manière serait $(n-3)n$.

Mais observons que, pour opérer ainsi, il faudrait tracer *deux fois* la même droite. Donc le nombre véritable des diagonales n'est réellement que la moitié du nombre qui vient d'être exprimé.

Donc enfin $\frac{(n-3)n}{2}$ est l'expression du nombre total des diagonales différentes.

Faisant successivement...... $n = 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ldots,$
on trouve.......... $\frac{(n-3)n}{2} = 0, \ 2, \ 5, \ 9, \ 14, \ldots$

Ainsi, dans la figure actuelle, qui est un *heptagone*, on peut vérifier qu'il y a 14 diagonales.

CHAPITRE II.

DU CERCLE ET DE SES COMBINAISONS AVEC LA LIGNE DROITE.

N° **101**. — Aux définitions et propositions préliminaires établies aux nos **13**,. . . ., **16**, il est nécessaire d'en ajouter quelques autres.

Observons d'abord que

Une ligne droite ne saurait rencontrer une circonférence de cercle en plus de deux points :

Car, si ces deux lignes pouvaient avoir trois points communs, en joignant ces points au centre du cercle, on aurait alors (n° **13**) trois droites égales menées d'un même point à une même droite, ce qui est *absurde* (n° **40**, *corol.*). — De là il suit que

La circonférence de cercle est une ligne convexe (n° **36**).

Cela posé, on nomme Sécante à un cercle, toute *droite* AB
Fig. 66. (*fig.* 66) *qui traverse* le cercle de manière à rencontrer sa circonférence en deux points C, D. La *partie* CD de cette droite, *intérieure* au cercle, est dite (n° **14**) une *corde* du cercle ; et les *prolongements* CA, DB, de cette corde, sont les *parties extérieures* de la sécante.

N° **102**. — On définit ordinairement la Tangente *au cercle*, une *droite qui n'a qu'un point commun avec la circonférence* (*). Or, on obtient une pareille droite en menant, par un point quelconque I de la circonférence, une *perpendiculaire* PQ au rayon OI ; car, si l'on joint le point O avec tout autre point H de la perpendiculaire, on a nécessairement OH > OI (n° **39**) ; ainsi, tout point de cette droite, autre que le point I, est situé *hors du cercle*.

Lorsqu'une *droite* est *tangente* à un cercle, réciproquement, le

(*) Nous adopterons, pour le moment, cette définition, sauf à y revenir plus tard, et spécialement dans l'*Appendice* aux deux premiers livres, lorsque nous traiterons des courbes en général et de leurs tangentes.

cercle est dit *tangent à la droite;* et le point qui leur est commun, se nomme le point de *tangence* ou de *contact.*

La propriété de la *tangente,* d'être *perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact,* en est une propriété *caractéristique;* car, si l'on conçoit, *réciproquement,* une *droite ayant un seul point commun avec la circonférence,* et dont tous les autres soient extérieurs au cercle, la distance du centre au point commun est plus courte que toutes les autres lignes qu'on peut mener du centre à la droite; donc (n° 39) ce rayon est perpendiculaire à la droite.

Il résulte de là évidemment,

1° que — *Par un point donné d'une circonférence, on ne peut mener qu'une tangente;*

et 2° que — *Par un point intérieur, on ne peut en mener aucune;*

en outre 3°, que — *Les perpendiculaires,* MN, PQ, *menées par les extrémités d'un diamètre* IL, à ce diamètre, *sont des tangentes parallèles entre elles;*

et 4° enfin que, RÉCIPROQUEMENT, — *Deux tangentes parallèles ont leurs points de contact situés aux extrémités d'un même diamètre, et sont perpendiculaires à ce diamètre.*

N° 103. — On dit qu'un *polygone* est INSCRIT à un cercle lorsque tous ses *sommets* sont situés *sur la circonférence;* les côtés de ce polygone sont alors des *cordes* du cercle. — Un *polygone* est CIRCONSCRIT au cercle, quand tous ses *côtés* sont des *tangentes.*

Chacun des angles du premier polygone est ce qu'on nomme un *angle inscrit* dans le cercle; et chacun des angles du second est un *angle circonscrit.*

Observons à ce sujet que, si les deux tangentes QP, Q′P (*fig.* 66), viennent à se rencontrer en un certain point P, *les deux portions* PI, PI′ *de ces tangentes, comprises entre leur point de concours et les points de contact, sont égales.* Fig. 66.

Car, en menant par le centre du cercle, et par le point P, la droite POG, et pliant la figure Q′PG suivant PQ, on pourra faire coïncider les points I′, I (n° 14), et par suite les deux portions de droite PI′, PI.

Remarquons encore que ces deux tangentes déterminent sur la

circonférence deux portions distinctes, l'une I'KI tournant sa *convexité* vers le point P, l'autre présentant à ce même point, ce que l'on nomme sa *concavité*.

Cette dernière remarque nous sera bientôt très-utile.

Ces notions étant établies, indiquons la division du présent chapitre. Nous le composerons de *quatre* paragraphes. Le premier paragraphe traitera des propriétés des *cordes*, des *sécantes*, et des *tangentes;* le second, de la *mesure des angles;* le troisième, des polygones inscrits et circonscrits; le quatrième enfin, des *cercles sécants*, *tangents*, *extérieurs* ou *intérieurs* l'un à l'autre.

§ I. — *Des cordes, des sécantes, et des tangentes.*

FIG. 66. THÉORÈME Ier. (*Fig.* 66.)

N° **104**. — *Le diamètre*, IL, *du cercle est la plus grande de toutes ses cordes.*

Si l'on mène aux extrémités d'une corde quelconque CD, les deux rayons OC, OD, on a ainsi (n° **38**)

$$OC + OD > CD;$$

et, par conséquent,

$$OI + OL > CD, \quad \text{ou} \quad IL > CD.$$

FIG. 67. THÉORÈME II. (*Fig.* 67.)

N° **105**. — *La perpendiculaire* OI *abaissée du centre d'un cercle sur une corde* AB, *divise cette corde en deux parties égales, ainsi que les arcs qu'elle soutend.*

Prolongeons CO jusqu'en D, et plions la figure le long du diamètre CD. D'abord, les deux demi-cercles DBC, DAC, se confondront (n° **15**). Ensuite, comme les deux angles en I sont droits, IA et IB devront prendre la même direction; et les points A, B, se confondront également; donc

1°.................. IA = IB;

2°.............. *arc* AC = *arc* CB,

et *arc* AD = *arc* DB; *C. Q. F. D.*

N° **106**. SCOLIE. — La droite CD remplit évidemment ces *cinq*

conditions différentes, savoir : — 1° — elle passe par le *centre* du cercle ; — 2° — par le point I *milieu de la corde* AB ; — 3° et 4° — par les points C, D, *milieux des arcs* ACB, ADB ; — 5° — enfin, elle est *perpendiculaire* à AB. — Or, *deux* de ces conditions entraînant nécessairement toutes les autres, il en résulte autant de théorèmes distincts qu'on peut faire de combinaisons avec 5 choses prises 2 à 2, c'est-à-dire, conformément à la théorie des combinaisons, $\frac{5 \times 4}{2}$, ou 10.

Ainsi l'on pourrait établir ici *dix* propositions distinctes [y compris le théorème précédent] ; mais nous nous bornerons à citer les suivantes, comme les seules susceptibles de se reproduire souvent :

1° — *La perpendiculaire* ID, *élevée à une corde* AB *par son milieu* I, *passe par le centre, et par les milieux des arcs* correspondants ;

2° — *La droite* OI, *menée par le centre et par le milieu* I *d'une corde* AB, *est perpendiculaire à cette corde, et passe par les milieux des arcs ;*

3° — *La droite* OC, *menée par le centre et par le milieu* C *d'un arc, est perpendiculaire à la corde soutendante, passe par son milieu, et par celui du second arc ;* — etc.

Toutes ces propositions se démontreraient, soit directement, soit par la *réduction à l'absurde,* avec le secours du théorème principal.

Nous observerons seulement que de la seconde proposition qui vient d'être énoncée il résulte encore, que

Deux cordes qui se coupent mutuellement en deux parties égales, sont nécessairement *des diamètres.*

Car si elles ne passaient pas par le centre, la droite qui joindrait le centre à leur point milieu, serait à la fois perpendiculaire à deux droites concourantes ; *ce qui est absurde* (n° 27).

THÉORÈME III. (*Fig.* 68.) FIG. 68.

N° 107. — Dans un même cercle :

Les arcs AC, BD, *compris entre deux cordes parallèles* AB, CD, *sont égaux ;*

Et il en est de même si l'une des cordes devient *une tangente*

PQ, ou bien si les *deux* droites sont des *tangentes*, telles que MN et PQ.

PREMIER CAS. — Abaissons du point O la perpendiculaire OL, commune aux deux cordes; elle contiendra (n° 105) le milieu de chacun des arcs soutendus par AB, CD; et l'on aura

$$arc\,AL = arc\,LB, \quad arc\,CL = arc\,LD;$$

d'où l'on déduit

$$arc\,AL - arc\,CL = arc\,LB - arc\,BD,$$

ou

$$arc\,AC = arc\,BD.$$

DEUXIÈME CAS. — Soient la corde AB et la tangente MN. — Joignons le centre O avec le point de contact L de la tangente MN; cette droite est à la fois perpendiculaire à MN (n° 102), et à sa parallèle AB; ainsi (n° 105) les deux arcs AL, LB, sont égaux.

TROISIÈME CAS. — Soient les tangentes parallèles MN, PQ. — On a reconnu (n° 103, 4°) que LOI est un diamètre; ainsi les arcs LAI, LBI, sont des demi-circonférences (n° 13); ces arcs sont donc égaux.

SCOLIE. — Les *réciproques* des *deux dernières parties* de cette proposition sont *vraies* sans restriction, et se démontreraient facilement par la *réduction à l'absurde*. — Quant à la *première* partie, *il faut*, pour que la réciproque soit vraie, l'énoncer ainsi :

Quand les arcs [d'un même cercle] *compris entre deux droites* qui ne se rencontrent pas dans le cercle, *sont égaux, les deux droites sont parallèles ;*

Et elle se démontrerait aussi par l'absurde.

FIG. 69. THÉORÈME IV. (*Fig.* 69.)

N° 108. — Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux :

1° — *A des arcs égaux correspondent des cordes égales, et ces cordes sont également distantes du centre ;*

2° — Si deux arcs sont inégaux, et *moindres*, chacun, *qu'une demi-circonférence*, — *Au plus grand arc correspond la plus grande corde ; et celle-ci est la moins distante du centre.*

Observons d'abord que, deux cercles de même rayon étant toujours superposables, rien n'empêche de supposer que les cordes appartiennent à un même cercle.

Cela posé, — 1° — considérons d'abord les arcs égaux AEB, CFD; et abaissons du centre O les perpendiculaires OK, OL, sur les cordes AB, CD. Tirons le diamètre MON par le milieu M de l'arc AC, et plions la figure suivant MN : il est clair que les points C, D, viendront s'appliquer sur les points A, B; et alors, la corde CD coïncidant avec la corde AB, il en sera de même des perpendiculaires OL, OK.

Donc $\quad AB = CD, \quad$ et $\quad OK = OL.$

2° — Soit, en second lieu, *arc* AB $>$ *arc* CF.

Plions la figure suivant le diamètre MON : comme on a *arc* AB $>$ *arc* AE, le point F tombera nécessairement en un point E situé entre A et B; et le milieu de l'arc AE, que détermine (n° **105**) la perpendiculaire OI abaissée du centre sur la corde AE, sera plus voisin du point A que le milieu de l'arc AB que détermine la perpendiculaire OK abaissée sur AB; donc le point K doit être placé entre le point B et le point G où OI rencontre AB.

On a par conséquent, AK, moitié de AB, plus grand que AG, et, à plus forte raison, plus grand que AI moitié de AE; d'où

$$AB > AE \quad \text{ou} \quad AB > CF.$$

On a pareillement

$$OK < OG \quad (\text{n}^\circ\ 39),$$

et, *à fortiori*, $\quad OK < OI; \qquad$ *C. Q. F. D.*

N° **109**. — Scolie I. — Les *réciproques* de ces deux propositions, qui sont d'ailleurs de deux espèces pour chacune d'elles, se déduiraient plus facilement du principe établi au n° **21**.

Ainsi, l'on peut affirmer que, dans un même cercle ou dans des cercles égaux,

1° — *A des cordes égales correspondent des arcs égaux; — et ces cordes sont également distantes du centre;*

2° — *A une plus grande corde correspond un plus grand arc; — et cette plus grande corde est la moins distante du centre.*

Ensuite,

1° — *Deux cordes également distantes du centre, sont égales; — et elles soutendent des arcs égaux;*

2° — *De deux cordes inégalement distantes du centre, celle qui est la plus voisine du centre, est la plus grande; — et elle soutend un plus grand arc.*

N. B. — Il est bien entendu, toutefois, que les arcs considérés ici sont moindres qu'une demi-circonférence; autrement, il faudrait modifier ces propositions, dans ce qu'elles ont de relatif aux arcs.

FIG. 67. N° **110.** — SCOLIE II. — La distance OI (*fig.* 67) du centre à une corde AB, varie entre *zéro* et le *rayon*. Elle est *nulle* quand la corde passe par le centre; et elle devient *égale au rayon* quand la corde, que l'on peut concevoir se mouvant parallèlement à elle-même de O en C, vient prendre position suivant la tangente MCN, droite qui (n° **102**) est aussi perpendiculaire à OC.

D'où l'on peut conclure, en passant, que la *tangente* est une corde, ou plutôt une *sécante, dont les deux points d'intersection se réunissent en un seul.*

On peut encore démontrer cette propriété de la tangente de la manière suivante: — Menez, d'un point quelconque A de la circonférence (*fig.* 70), une droite AB qui la rencontre en un second point C; et concevez que cette droite fasse une révolution entière autour du point A, dans le sens AC'AC. La droite AB, dans ce mouvement, prendra les positions successives AB', AB'', AB''',..., au-dessus de AB, puis A*b*, A*b*',..., au-dessous de AB; en même temps, le point C prendra les positions C', C'', C''',..., *c*, *c*',..., en se rapprochant du point A pour s'en écarter ensuite. Or il est clair que la droite AB, pour passer de la position AB''' par exemple, à la position A*b*, aura dû se confondre avec la tangente MAN qui est une position intermédiaire, et qu'au même instant, le point C, pour passer de C''' en *c*, aura dû tomber en A. Donc la tangente MAN est réellement une des positions de la sécante, et c'est celle pour laquelle les deux points d'intersection se sont *réunis en un seul;* *C. Q. F. D.*

FIG. 70.

SCOLIE III. — La portion CI (*fig.* 67) du rayon OC, comprise entre le milieu d'un arc et sa corde, se nomme (n° **14**) la FLÈCHE de cet arc ; et cette flèche suit évidemment une marche inverse de celle de la perpendiculaire OI : elle est *égale au rayon* lorsque la corde passe par le centre, et devient *nulle* quand la corde vient à se confondre avec la tangente. FIG. 67.

THÉORÈME V. (*Fig.* 71.) FIG. 71.

N° **112**. — *De toutes les cordes menées par un même point* I *intérieur à un cercle, la plus grande est le diamètre* AIB; *et la plus petite est la perpendiculaire* CD *à ce diamètre.*

La première partie du théorème est déjà démontrée (n° **104**).

Pour démontrer la seconde, abaissons sur une corde quelconque EIE′ différente de CD, la perpendiculaire OK;

nous aurons $OK < OI$, (n° **39**);

donc la corde EE′ est plus grande que CD (n° **109**, *scol.*); donc, *etc.*

N° **113**. SCOLIE. — 1° — *Le plus grand de tous les segments de droites menées d'un point intérieur* I *aux différents points d'une circonférence, est le segment* IA *qui passe par le centre; le plus petit est le prolongement* IB *du premier.*

2° — *De deux segments quelconques*, IE, IF, *le plus grand est celui* IE *qui fait le plus petit angle* [aigu ou obtus] *avec le segment* MAXIMUM IA, ou *le plus grand angle* [obtus ou aigu] *avec le segment* MINIMUM IB.

En effet, 1° — Soit un segment quelconque IE; et menons le rayon OE.

En comparant d'abord IA, IE, nous avons

$$IA = OA + OI = OE + OI;$$

mais $OE + OI > IE$ (n° **38**, 1°); donc $IA > IE$.

Comparant ensuite IB, IE, nous avons

$$IB = OB - OI = OE - OI;$$

mais $OE - OI < IE$ (même n°); donc $IB < IE$.

2° — Soient deux segments quelconques IE, IF; et menons

OE, OF. — Les deux triangles IOE, IOF, ont le côté OI commun, et le côté OE égal au côté OF; mais l'angle compris IOE du premier triangle est plus grand que l'angle IOF du second triangle; donc (nº 64)

$$IE > IF; \qquad C. Q. F. D.$$

N. B. —La corde CD perpendiculaire au diamètre AB est la seule qui donne lieu à deux segments égaux, OC = OD. Pour toute autre corde EE′, le segment de corde IE compris dans le plus grand segment de cercle CAD, est plus grand que le segment de corde restant IE′ compris dans le plus petit segment de cercle CBD.

Et en comparant deux cordes quelconques EE′, FF′, on voit facilement que, si l'un des segments IE de la première est plus grand qu'un segment IF de la seconde, c'est-à-dire, si *angle* EIA < *angle* F′IA, par compensation, le segment IE′ restant de la première, sera plus petit que le segment IF′ restant de la seconde, puisque l'on aura alors *angle* FIB > *angle* E′IB.

Nº 114. — Scolie II. — On parvient à des résultats analogues, en supposant que les droites partent d'un point extérieur (*fig.* 72); mais au moyen de la remarque qui termine le nº 103, on peut comprendre toutes les propriétés relatives à ce second cas, dans un seul énoncé beaucoup plus concis :

FIG. 72.

La distance d'un point extérieur I *à la partie concave de la circonférence, est d'autant plus grande, et sa distance à la partie convexe est d'autant plus petite, que la direction sur laquelle se compte cette distance, se rapproche davantage de celle qui contient le centre.*

Nous nous dispenserons de démontrer les diverses propositions que comporte cet énoncé, parce que les démonstrations sont, en tous points, semblables à celles du *scolie* précédent; seulement, nous ferons deux observations assez importantes :

Premièrement, la tangente IL, qui peut être considérée comme la *limite* commune entre la partie concave du cercle et la partie convexe, est à la fois le *minimum* des droites menées à la partie concave, et le *maximum* des droites menées à la partie convexe.

En second lieu, lorsqu'une droite, telle que IE, part d'un

point extérieur I, et va rencontrer la circonférence en deux points E, E', on nomme ordinairement *sécante entière*, le segment de cette droite qui aboutit à la concavité, et *partie extérieure* de cette sécante, le segment qui aboutit à la convexité. Or, il résulte évidemment de ce qui précède, que si une sécante entière est *plus grande* qu'une autre, par compensation, la partie extérieure de la première est *moindre* que la partie extérieure de l'autre. (*Voyez* la fin du *scolie* précédent.)

§ II. — *Mesure des angles.*

Le titre de ce paragraphe peut sembler, au premier abord, une espèce d'anticipation sur le second livre, dont l'objet principal doit être (nº 23) la mesure des grandeurs géométriques comprises dans un plan. Cependant, il est très-utile, quoiqu'à la rigueur on pût s'en dispenser, de donner dès à présent la théorie de la mesure des angles, théorie d'où dépendent un grand nombre de propriétés des figures rectilignes, abstraction faite de leur étendue.

Propositions et questions préliminaires.

Nº 118. PREMIÈRE QUESTION. — *Déterminer la commune mesure de deux droites*, et par suite, *leur rapport numérique.*

On nomme ordinairement COMMUNE MESURE de deux droites données de longueur, *la plus grande droite* susceptible d'être *contenue un nombre entier de fois* dans chacune d'elles (*).

Le principe qui sert de base à la recherche de la *commune mesure*, analogue au principe sur lequel s'appuie la détermination du plus grand commun diviseur de deux nombres, consiste en ce que

La commune mesure de deux droites est égale à la commune mesure entre la plus petite des deux droites et le reste de leur division, reste *qu'on obtient en retranchant celle-ci* de *la plus grande autant de fois que cela est possible.*

(*) Il serait plus exact de dire : *la plus grande commune mesure*, comme on dit : *le plus grand commun diviseur* de deux nombres.

Or, comme la démonstration de ce dernier principe ne diffère pas essentiellement de celle du premier, nous nous contenterons de renvoyer à l'*Arithmétique*. — Cela posé, voici en quoi consiste le procédé pour obtenir cette commune mesure :

Portez [à l'aide du compas (nº 18)] *la plus petite droite sur la plus grande autant de fois que cela est possible;*

S'il n'y a pas de reste, la plus petite droite est la commune mesure; mais si vous en obtenez un,

Portez le reste sur la plus petite droite autant de fois que possible:

Si vous n'obtenez pas un nouveau reste, le premier est la commune mesure; mais s'il y en a un,

Portez le second reste sur le premier, et *continuez cette série d'opérations jusqu'à ce que vous obteniez un reste susceptible d'être contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent :*

Dans ce cas, *le dernier reste* obtenu *est la commune mesure cherchée.*

En Arithmétique, après avoir obtenu le plus grand commun diviseur, on divise chacun des deux nombres proposés par ce commun diviseur; et le quotient des deux résultats est la fraction ou le nombre fractionnaire qui exprime *le rapport* des deux nombres proposés, *réduit à sa plus simple expression.*

Mais ici, pour obtenir le *rapport numérique* des deux droites, ce qui forme la seconde partie de la question que nous nous sommes proposée, il est nécessaire d'exprimer *numériquement* les opérations graphiques qui constituent le procédé.

Fig. 73. Pour fixer les idées, soient A et B (*fig.* 73) les deux droites données [A étant plus grand que B]; et supposons qu'après avoir porté B sur A, 3 fois, on ait obtenu un reste R; que ce reste R, porté 2 fois sur B, ait donné le reste R'; que ce second reste, porté 1 fois sur R, ait donné le reste R''; et qu'enfin R'' soit contenu 4 fois exactement dans ce reste R'. On aura, en conséquence, les égalités suivantes :

$$A = 3B + R, \quad B = 2R + R', \quad R = R' + R'', \quad R' = 4R''.$$

Or, si l'on remonte successivement de la dernière aux précédentes, on obtient d'abord

$$R = 4R'' + R'' = 5R'',$$

puis $B = 2 \times 5R'' + 4R'' = 14R''$,

puis enfin $A = 3 \times 14R'' + 5R'' = 47R''$.

D'où l'on voit que la commune mesure R″ est contenue 47 fois dans A, et 14 fois dans B; donc $\frac{47}{14}$ est le *rapport numérique* des deux droites.

N. B. — Le nombre fractionnaire auquel on parvient ainsi, est *toujours irréductible;* car si l'on désigne en général par α la commune mesure trouvée par le procédé ci-dessus, par m et n les deux nombres qui expriment respectivement combien de fois α se trouve contenu dans A et dans B, on a $A = m\alpha$, $B = n\alpha$; d'où $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$. Or, si m, n, avaient un facteur commun k, il en résulterait $A = m'k\alpha$, $B = n'k\alpha$; et alors $k\alpha$ serait une mesure commune de A et B; α ne serait donc pas *la plus grande*, ce qui est contraire à la définition.

N° 116. Deuxième question. — *Déterminer la commune mesure de deux arcs d'un même cercle, ou de cercles égaux; et,* par suite, *leur rapport numérique.*

Toute la difficulté consiste ici à savoir comment on porte plusieurs fois de suite un plus petit arc CD (*fig.* 74) sur un plus grand AB, tous deux étant décrits avec le même rayon. Fig. 74.

Pour cela, on prend une ouverture de compas égale à la corde de l'arc CD, et l'on porte cette distance sur l'arc AB, de A en E, de E en F, de F en G. On trouve ainsi que l'arc AB contient l'arc CD trois fois par exemple, avec un reste GB; les arcs AE, EF, FG, sont égaux à l'arc CD (n° 108), puisque, par construction, leurs cordes sont égales.

L'ensemble des opérations nécessaires à la détermination de la *commune mesure* de deux arcs, est d'ailleurs le même que pour deux droites; ainsi, il serait superflu de s'y arrêter.

N° 117. — Remarque *importante sur les lignes* [*et*, en général, *sur les grandeurs*] *incommensurables entre elles.*

Nous avons supposé dans le n° 115, qu'après un certain nombre d'opérations, on finissait toujours par arriver à un reste

des angles et celui des arcs ont les mêmes valeurs approximatives, $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,...; et qu'il n'est pas un seul de ces nombres fractionnaires, qui, exprimant le rapport des angles avec une certaine approximation, n'exprime aussi le rapport des arcs avec le même degré d'approximation.

Or, concevons le plus petit angle A'O'B' divisé en n parties égales, et portons une de ces parties m fois consécutives sur l'angle AOB à partir de OA. — Puisque, par hypothèse, le rapport des angles est compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, cette opération donne lieu à un reste angulaire moindre que le $\frac{1}{n}$ de A'O'B'. Maintenant, il est facile de voir que l'arc A'B' se trouve alors divisé en n parties égales, et que l'arc AB contient un nombre m de ces mêmes parties, avec un reste qui est nécessairement moindre que l'une d'elles; d'où il résulte que le rapport des arcs est lui-même compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$.

Donc $\frac{m}{n}$ représente, avec le même degré d'approximation [c'est-à-dire à $\frac{1}{n}$ près], le rapport des angles et celui des arcs.

Comme le même raisonnement s'appliquerait aux autres nombres $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$,..., on est en droit de conclure (n° 117) que

Les angles sont proportionnels aux arcs qui leur correspondent.

La réciproque est *vraie* et se démontrerait de la même manière.

Théorème II.

N° 119. — *L'angle au centre a pour mesure l'arc de cercle compris entre ses côtés.*

Cet énoncé signifie que, si l'on rapporte, d'une part, l'angle proposé à l'*angle droit* qui est l'*unité naturelle* des angles [comme étant celui de tous les angles dont on se forme l'idée la plus nette], et d'autre part, l'arc décrit du sommet de l'angle donné, comme

centre, au *quadrant*, c'est-à-dire au *quart de la circonférence* dont l'arc fait partie, le *rapport de l'angle* à l'angle *droit* est égal (n° 118) au *rapport de l'arc* au *quadrant;* ou bien

angle AOB : 1 *angle droit* :: *arc* AB : 1 *quadrant* :

ce qui veut dire que le *nombre abstrait* qui exprime le rapport de l'arc à son unité, ou la *mesure de l'arc* (n° 3), exprime en même temps *la mesure de l'angle*.

N. B. — On écrit alors, pour abréger, et conformément à l'énoncé,

AOB = AB ;

mais, pour comprendre le véritable sens de cette égalité, il faut supposer l'angle et l'arc rapportés à leurs unités respectives.

N° 120. — SCOLIE I. — Afin de pouvoir *mesurer* plus facilement les arcs, et par conséquent les angles, on est convenu [dans le *système des anciennes mesures*] de diviser la circonférence entière en 360 parties égales appelées DEGRÉS, chaque degré en 60 parties égales appelées *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, etc. : — cette méthode de division est dite SEXAGÉSIMALE.

Il en résulte que le *quadrant* vaut 90 degrés [qu'on indique ainsi : 90°], puis 90 × 60 ou 5400 minutes [ou, pour abréger, 5400'], puis 5400 × 60 ou 324000 secondes [ou 324000"]; et ainsi de suite.

Veut-on exprimer un arc qui ne renferme pas un nombre exact de degrés? On dit, par exemple, que cet arc *vaut* 47°19'24", ou qu'il *est de* 47°19' 24".

On dit encore quelquefois, par abréviation, que l'angle lui-même *est de* 47° 19' 24". Mais pour obtenir dans ce cas, le *nombre abstrait* qui exprime le rapport de l'angle à l'angle droit, il faut, d'après les règles de l'arithmétique :

1° — Convertir 47°19' 24" en secondes, ce qui donne 170364";

2° — Diviser ce nombre par 324000, nombre de *secondes* que contient le *quadrant*.

On trouve ainsi $\frac{170364}{324000}$ pour le rapport demandé.

Dans le *système métrique* actuel, la division des arcs est dite CENTÉSIMALE; on conçoit le *quadrant* divisé en 100 parties égales appelées GRADES [la circonférence entière en 400 *grades*], chaque grade en 100 parties égales appelées *minutes centésimales*, chaque minute en 100 *secondes*, etc.....

Le *grade* se désigne par la lettre initiale *g*, et les *minutes*, *secondes*,..., comme ci-dessus.

Ainsi, un arc ou un angle de 23 *grades* 35 *minutes* 43 *secondes*, s'écrit : $23^g 35' 43''$, ou plus simplement encore : $0^g,233543$, *le quadrant* étant ici pris pour *unité*; et cette fraction décimale donne immédiatement le rapport de l'angle à l'angle droit.

N° 121. — SCOLIE II. — Nous n'insisterons pas davantage sur ces principes qui ne sont guère utiles que dans la Trigonométrie; et nous nous bornerons à observer que, comme le *quadrant* vaut d'une part 90°, et de l'autre 100^g, il s'ensuit qu'*un seul degré* vaut $\frac{10}{9}$ *de grade*, et, réciproquement, *un seul grade* vaut $\frac{9}{10}$ *de degré*; ce qui donne le moyen d'évaluer un certain nombre de *degrés*, *minutes*, et *secondes* sexagésimales, en grades, minutes et secondes centésimales, et réciproquement.

Mesures des angles excentriques.

Tout angle qui a son sommet ailleurs qu'au centre, est dit UN ANGLE EXCENTRIQUE.

On donne en particulier le nom d'ANGLE INSCRIT à tout angle qui a son sommet sur la circonférence et dont les côtés traversent le cercle (*voyez* le n° 103).

FIG. 76. THÉORÈME III. (*Fig.* 76.)

N° 122. — *Tout angle inscrit* [formé par deux cordes] *a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Il peut se présenter *trois* cas, suivant que le centre est placé *sur* l'une des deux cordes, ou *entre* les deux cordes, ou *hors* de l'angle formé par ces cordes.

PREMIER CAS. — Soit l'angle BAD dont un côté AD passe par le centre O. — Tirons OB; l'angle BOD extérieur au triangle AOB

est égal à BAO + OBA (n° 88), et par conséquent égal à 2BAO, puisque ce triangle, étant isoscèle, donne OBA = BAO; ainsi l'on a BAO = $\frac{1}{2}$ BOD. Mais BOD = BD (n° 118); donc BAO, ou BAD, vaut $\frac{1}{2}$ BD, ou bien a pour mesure $\frac{1}{2}$ BD.

Deuxième cas. — Soit un angle BAC comprenant le centre. — On a évidemment, d'après la figure, BAC = BAD + DAC; or, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\text{BAD} = \tfrac{1}{2}\text{BD}, \quad \text{DAC} = \tfrac{1}{2}\text{DC};$$

donc $$\text{BAC} = \tfrac{1}{2}(\text{BD} + \text{DC}) = \tfrac{1}{2}\text{BC}.$$

Troisième cas. — Soit l'angle BAC′, tel, que le point O est situé au dehors. — On a, au contraire, BAC′ = BAD — DAC′, et par suite, BAC′ = $\frac{1}{2}$(BD — DC′) = $\frac{1}{2}$ BC′.

N° 123. — Corollaire I. — *Tout angle inscrit*, AGD, *dont les côtés passent par les extrémités d'un diamètre* AD, *est un angle droit.*

Car, en vertu du théorème principal, il a pour mesure la moitié de l'arc ACD, qui est une demi-circonférence; il a donc pour mesure *un quadrant.*

N. B.—Ce corollaire peut encore se déduire du théorème établi au n° 94; car en tirant OG, on a OG = OA = OD; d'où il suit que l'angle en G du triangle GAD est *droit.*

N° 124. — Corollaire II. — *L'angle* MAB [ou NAB] *formé par une corde et une tangente, a aussi pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Tirons le diamètre AOD. L'angle MAD est *droit* (n° 102) et a pour mesure *un quadrant,* ou $\frac{1}{2}$ AGBD; l'angle BAD a également pour mesure $\frac{1}{2}$ BD; donc MAD — BAD, c'est-à-dire l'angle MAB, a pour mesure $\frac{1}{2}$ AGB.

Si l'on considère l'angle obtus NAB, on a NAB = NAD + DAB; d'où NAB = $\frac{1}{2}$ ACD + $\frac{1}{2}$ DB = $\frac{1}{2}$ ACDB.

N. B. — Cette proposition ressort plus immédiatement encore de celle de l'angle inscrit, lorsque l'on considère la tangente comme la limite des sécantes. — (*Voyez* le n° 110.)

Fig. 77. THÉORÈME IV. (*Fig.* 77.)

N° 125. — *Tout angle excentrique*, BAC ou BA′C, formé par deux parties de cordes, AB, AC, ou par deux sécantes, A′B, A′C, *a pour mesure la demi-somme*, $\frac{1}{2}$ (BC + B′C′), ou *la demi-différence*, $\frac{1}{2}$ (BC — DE), *des arcs compris entre ses côtés* [indéfiniment prolongés], suivant que le sommet est *intérieur* ou *extérieur* au cercle.

PREMIER CAS. — Tirons la corde BC′; on a (n° 88)

$$BAC = BC'A + C'BA;$$

or, les angles BC′A, C′BA, ou BC′C, C′BB′, ont pour mesures respectives (n° 122) $\frac{1}{2}$ BC, $\frac{1}{2}$ B′C′; donc l'angle total BAC a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ B′C′.

SECOND CAS. — Joignons encore le point C au point E; on a

$$BEC = EA'C + ECA';$$

d'où EA′C ou $BA'C = BEC - ECA'$;

or $BEC = \frac{1}{2} BC$, $ECA' = \frac{1}{2} ED$ (n° 122);

donc $BA'C = \frac{1}{2}(BC - \frac{1}{2} ED) = \frac{1}{2}(BC - DE)$.

N. B. — Comme cas particulier, on peut voir que

Fig. 72. *L'angle circonscrit* LIM (*fig.* 72) *a pour mesure la demi-différence entre l'arc concave* LAM *et l'arc convexe* LBM;

Mais on démontre encore directement cette proposition en tirant les cordes BL, BM.

N° 126. — SCOLIE *sur les angles excentriques* en général. — Les différentes mesures qui viennent d'être établies pour toutes les espèces d'angles dont le sommet n'est pas au centre, doivent être considérées comme des mesures tout à fait secondaires; car

La mesure naturelle d'un angle est l'arc de cercle compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre, — [ou plutôt (n° 118) *le rapport* de cet arc *au quadrant*].

Les autres mesures ont uniquement pour objet de faire reconnaître, dans les figures circulaires, les relations de grandeur qui peuvent exister entre certains angles.

C'est ainsi, par exemple, qu'on peut affirmer, à l'inspection de la *figure* 77, que des trois angles BAC, BEC, BA'C, *le plus grand* est BAC, *le moyen* est BEC, et *le plus petit* est BA'C, puisque l'on a (nos **120** et **128**) FIG. 77.

$$BAC = \frac{1}{2}(BC + B'C'), \quad BEC = \frac{1}{2}BC, \quad BA'C = \frac{1}{2}(BC - DE).$$

Actuellement, si l'on considère l'angle inscrit ACB (*fig.* 78), et qu'on retranche de la circonférence entière l'arc ANB compris entre les côtés de cet angle, l'arc restant ACC'C''B, ou le segment de cercle correspondant, sera l'*arc* ou le *segment auquel l'angle* ACB *est* dit *inscrit*. FIG. 78.

Cela posé, il résulte évidemment du *théorème* III (n° **122**) et du *corollaire* II (n° **124**) que

Tous les angles inscrits, ACB, AC'B,.., *à un même segment*, ainsi que *l'angle* ABL *formé par la corde* AB *de ce segment et la tangente menée à l'une des extrémités de la corde, sont égaux entre eux* : — car ils ont même mesure.

N. B.— Le segment de cercle ACC'C''B est dit un SEGMENT CAPABLE de l'angle ACB.

Tous les angles inscrits à une demi-circonférence [ou *à un demi-cercle*], *sont droits*, — ainsi que nous l'avons déjà démontré au *numéro* **123**.

§ III. — *Propriétés des polygones inscrits et circonscrits à des circonférences de cercle.* — (Voyez le n° **103**.)

THÉORÈME I. (*Fig.* 60 et 61.) FIG. 60 et 61.

N° **127**. — *Tout triangle* CAB *est* à la fois *inscriptible* et *circonscriptible*.

LA PREMIÈRE PARTIE de cette proposition peut encore s'énoncer ainsi :

Par trois points A, B, C, *non en ligne droite, il est toujours possible de faire passer une circonférence.*

Or, c'est une conséquence nécessaire du théorème établi au nu-
Fig. 61. *méro* **96**; car le point O (*fig.* 61) étant, par sa position, également distant des trois points A, B, C, il s'ensuit que la circonférence décrite de ce point comme centre avec le rayon OA, passerait également par les deux autres points B, C.

Il est évident d'ailleurs que, par les trois mêmes points A, B, C, *on ne peut faire passer qu'une seule circonférence*, puisque le centre ne saurait être que le point O.

N. B. — Si les trois points A, B, C étaient en ligne droite, les perpendiculaires élevées par les milieux de AB, BC, AC, seraient parallèles (n° **32**); et, dans ce cas, il n'y aurait plus de centre ou (n° **54**) le centre serait situé à l'*infini*.

Quant à la DEUXIÈME PARTIE de la proposition, elle se déduit
Fig. 60. également du théorème établi au *numéro* **98**; car le point O (*fig.* 60) étant à égale distance des droites AB, AC, BC, il en résulte que le cercle décrit du point O comme centre, avec un rayon égal à la perpendiculaire abaissée de ce point sur AB, passera nécessairement par les pieds des perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés. En outre, ce cercle sera (n° **102**) *tangent intérieurement* aux trois côtés du triangle; et l'on aura ainsi un *cercle inscrit* à ce triangle.

Fig. 60. SCOLIE I. — Si l'on considère l'espace indéfini LCBI (*fig.* 60) déterminé par le côté CB du triangle et les prolongements CL, CI, des deux autres, et qu'on mène les *bissectrices* des angles LCB, IBC le point O′ où elles se rencontrent est également distant des trois droites CB, CL, BI; ce qui donne un nouveau cercle tangent aux trois côtés, cercle que l'on appelle *ex-inscrit* pour exprimer qu'il est placé hors du triangle. — Le point O′ se trouve en même temps placé sur la bissectrice AA′ de l'angle A. — (*Voyez* n° **98**, *scol.*)

Nous aurons occasion de revenir sur ces propositions dans le *chapitre* des *problèmes*.

N° **128**. — SCOLIE II. — Le théorème du n° **94** nous apprend en-
Fig. 59. core que, si le triangle ABC (*fig.* 59) est *rectangle* en C, le centre

du cercle circonscrit se trouve placé au milieu de l'hypoténuse AB, puisqu'alors les trois distances DA, DB, DC, sont égales.

Si le triangle est *isoscèle*, le centre du cercle circonscrit, comme celui du cercle inscrit, se trouve placé sur la bissectrice de l'angle opposé à la base (n° 61).

Enfin, lorsque le triangle est équilatéral, les centres des deux cercles *se confondent;* ce que l'on exprime en disant que *les deux circonférences sont concentriques.*

THÉORÈME II. (*Fig.* 79.)

FIG. 79.

N° 129. — *Dans tout quadrilatère inscrit* ABCD, *la somme des angles opposés, pris deux à deux, est égale à* 2 DROITS.

En effet, les deux angles en B et en D, par exemple, ont (n° 122) pour mesure, l'un $\frac{1}{2}$ ADC, l'autre $\frac{1}{2}$ ABC; donc leur somme a pour mesure la moitié de la circonférence totale ADCB, ou une *demi-circonférence.* — Donc, etc.

RÉCIPROQUEMENT. — *Un quadrilatère* ABCD *est inscriptible lorsque les angles opposés y forment, deux à deux, une somme égale à* 2 DROITS.

En effet, si le cercle mené par les trois points A, B, C, cercle qu'il est toujours possible de construire (n° 127), ne passait pas par le quatrième point D, ce point serait intérieur ou extérieur au cercle.

Supposons-le d'abord intérieur, et prolongeons AD [ou CD] jusqu'à sa rencontre en D' avec la circonférence; nous aurons, d'après la proposition directe,

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{AD'C} = 2 \ \textit{droits};$$

mais, par hypothèse, $\mathrm{ABC} + \mathrm{ADC} = 2 \ \textit{droits};$

donc $\mathrm{AD'C} = \mathrm{ADC},$

ce qui est absurde (n° 88, *N. B.*).

Même raisonnement si le point D était extérieur.

Donc le quadrilatère est inscriptible.

SCOLIE. — Ce théorème fournissant une propriété caractéristique du quadrilatère inscriptible, nous apprend que le *rectangle* et le

carré sont, parmi les parallélogrammes, les seuls quadrilatères qui la possèdent; car il n'y a que ces figures pour lesquelles les angles opposés puissent être à la fois égaux et supplémentaires. — Les diagonales du rectangle ou du carré sont alors des *diamètres* du cercle circonscrit. — (*Voyez* le scolie du n° **128**.)

FIG. 80.

THÉORÈME III. (*Fig.* 80.)

N° **130**. — *Dans tout quadrilatère circonscrit* ABCD, *la somme de deux côtés opposés* [AB + DC] *est égale à la somme des deux autres* [AD + BC].

On a, en effet (n° **103**),

$$AE = AK, \quad EB = BF, \quad CG = CF, \quad GD = DK;$$

d'où, en ajoutant ces quatre égalités membre à membre,

$$AE + EB + CG + GD = AK + BF + CF + DK,$$

ou
$$AB + CD = AD + BC;$$

C. Q. F. D.

RÉCIPROQUEMENT, — *Si la somme de deux côtés opposés*, AB + DC, *est égale à la somme des deux autres*, AD + BC, *le quadrilatère est circonscriptible*.

On peut toujours (n° **127**, *scolie* I) décrire un cercle tangent aux trois côtés AB, BC, CD; et il reste à prouver qu'il est nécessairement tangent au quatrième AD. Or, admettons pour un instant que cela ne soit pas : le côté AD sera alors, ou une *sécante* au cercle, ou une droite *extérieure* à ce cercle; et, dans les deux cas, on pourra mener parallèlement à AD (n° **110**), une tangente A'D' ou A''D'', différente de AD.

Soit, par exemple, A'D' cette droite; on a, par hypothèse,

$$AB + CD = AD + BC;$$

mais, en vertu de la proposition directe, on a aussi

$$A'B + CD' = A'D' + BC;$$

d'où l'on déduit, en retranchant, membre à membre, la première égalité de la seconde,

$$A'A + DD' = A'D' - AD,$$

et, par conséquent,

$$A'D' = A'A + DD' + AD,$$

résultat absurde (n° 3).

Même conclusion en considérant la tangente A″D″.

Donc la *réciproque* est *vraie*.

SCOLIE. — Le *losange* et le *carré* sont les seuls parallélogrammes *circonscriptibles*, puisqu'il n'y a que ces deux variétés du parallélogramme pour lesquelles la somme de deux côtés opposés puisse être égale à la somme des deux autres.

Dans le *carré*, le cercle *circonscrit* et le cercle *inscrit* sont nécessairement *concentriques*.

Des polygones réguliers.

N° 131. — On nomme ainsi tout *polygone* qui est à la fois *équilatéral* et *équiangle*. — La possibilité de polygones de cette sorte ne saurait être révoquée en doute : car, si l'on conçoit qu'après avoir divisé une circonférence de cercle en un certain nombre de parties égales, en 6 par exemple, on ait joint par des droites consécutives les points de division A, B, C, D, E, F (*fig.* 81), toutes FIG. 81.
les cordes de jonction seront égales (n° 108), et les angles seront égaux, comme inscrits à des segments égaux (n° 126); donc le polygone ABCDEF sera *régulier*.

Le *triangle équilatéral* et le *carré* sont des polygones réguliers.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 81.) FIG. 81.

Tout polygone régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible.

Soit ABCDEF un polygone régulier quelconque; et par *trois* sommets consécutifs A, B, C, faisons passer (n° 127) une circonférence de cercle : je dis qu'elle passera également par les autres sommets.

En effet, joignons le point O, centre du cercle, aux points A, B, C, D; nous formerons ainsi trois triangles OAB, OBC, OCD.

Cela posé, comparant les deux triangles OAB, OBC, on voit que OB est commun, AB = BC par hypothèse, et OA = OB; donc ces deux triangles sont égaux (nº 63, 3ᵉ *cas*). De plus, ils sont *isoscèles*, à cause de OA = OB; ainsi l'on a

$$BAO = ABO = OBC = OCB.$$

En second lieu, les deux triangles OBC, OCD, sont aussi égaux : car on a OC commun, BC = CD par hypothèse, et........... *angle* BCO = *angle* OCD, comme on vient de le voir; donc ils sont égaux (nº 63, 2ᵉ *cas*). D'où l'on déduit

$$OD = OB = OC = OA.$$

Ainsi la circonférence doit passer par le point D.

On démontrerait de même, par la comparaison successive des triangles OCD et ODE, ODE et OEF,..., que OE = OC, OF = OD,... Ainsi la première partie de la proposition est démontrée.

Quant à la seconde partie, observons que, si du point O l'on abaisse OG, OK, OI,..., perpendiculaires sur AB, BC, CD,..., toutes ces perpendiculaires seront *égales*, comme appartenant à des triangles égaux; d'où il suit que le cercle décrit du point O comme centre avec le rayon OG, passera également par les points K, I,..., et de plus sera tangent aux côtés du polygone (nº 102). Ce qui démontre la deuxième partie de la proposition énoncée.

Nº 132. — SCOLIE I. — Le point O, centre du cercle mené par les trois points A, B, C, est dit le CENTRE *du polygone régulier*, à cause de la double propriété qui vient d'être démontrée.

Tous les triangles OAB, OBC, OCD,... sont *isoscèles*, puisque l'on a vu que

$$OA = OB = OC = OD = OE = ...;$$

d'où il suit que les droites OA, OB, OC,....... sont les *bissectrices* des angles du polygone.

Le rayon du cercle circonscrit est dit aussi le RAYON *du po-*

lygone régulier, et le rayon du cercle inscrit en est dit l'APOTHÈME. — La *flèche* de chacun des arcs soutendus est la *différence* entre le rayon et l'apothème du polygone (*voyez* le n° **111**).

N° **133.** — SCOLIE II. — Si l'on désigne par n le nombre des côtés d'un polygone régulier, chacun des angles du polygone pour valeur numérique

$$\frac{2(n-4)}{n}, \quad \text{ou} \quad 2-\frac{4}{n} \quad (\text{n}^\circ\ 86).$$

Chacun des angles AOB, BOC,..., dit ANGLE AU CENTRE du polygone, est égal à $\frac{4}{n}$, comme il est évident.

Ceci prouve que, dans les polygones réguliers d'un *même nombre de côtés*, tous les angles ont la *même valeur numérique*, quelle que soit d'ailleurs la grandeur des côtés. Les *angles au centre* sont aussi tous *égaux* entre eux.

THÉORÈME V. (*Fig.* 82.) FIG. 82.

N° **134.** — *Si, par les sommets* A, B, C, D, E,... *d'un polygone régulier déjà inscrit à une circonférence de cercle, on mène des tangentes à cette circonférence, on formera ainsi un polygone circonscrit* A'B'C'D'E' [d'un même nombre de côtés] *qui sera régulier.*

En effet, ces tangentes déterminent évidemment, avec les côtés AB, BC, CD,... du polygone inscrit, une série de triangles AA'B, BB'C, CC'D,... tous égaux entre eux et isoscèles : car on a, d'une part,

$$AB = BC = CD = DE = \ldots;$$

et d'autre part, les angles A'AB, A'BA, B'BC, B'CB, C'CD, C'DC, . . ., sont égaux comme ayant même mesure.

De là il résulte

1° — que tous les angles A', B', C',... du polygone circonscrit sont égaux ;

2° — que $\quad AA' = A'B = BB' = B'C = CC' = \ldots;$

Ce qui donne par conséquent

$$A'B' = B'C' = C'D' = \ldots;$$

donc ce polygone, ayant ses angles tous égaux entre eux, ainsi que ses côtés, est *régulier;* *C. Q. F. D.*

N° **135**. — Scolie. — Tirons les droites OA, OB, OC,..., puis OA′, OB′, OC′,..., droites qui seront (n° **132**) les bissectrices des angles en A, B, C,..., et en A′, B′, C′,... Cela fait, de ce que les deux polygones ont un même nombre de côtés, il s'ensuit (n° **133**) que les *angles au centre,* AOB, BOC,... du polygone inscrit, sont égaux aux angles au centre, A′OB′, B′OC′,... du polygone circonscrit. Ainsi les bissectrices OA′, OB′, OC′,... des angles au centre de celui-ci, sont en même temps les bissectrices des angles au centre du premier; c'est-à-dire que l'on a

$$\textit{angle}\,\mathrm{AOA'} = \textit{angle}\,\mathrm{A'OB} = \textit{angle}\,\mathrm{BOB'} = \ldots,$$

et par conséquent

$$\textit{arc}\,\mathrm{AI} = \textit{arc}\,\mathrm{IB} = \textit{arc}\,\mathrm{BK} = \textit{arc}\,\mathrm{KC} = \ldots$$

De là résulte une nouvelle position que pourra prendre le polygone circonscrit. En effet, faisons *pivoter* le polygone A′B′C′D′E′... autour du point O, dans le sens BI, de manière que le point B, milieu de l'arc IBK, vienne tomber en I, milieu de l'arc AIB; les points K, C, L,... prendront en même temps les positions respectives B, K, C,...; et les tangentes A′B′, B′C′, C′D′,... deviendront A″B″, B″C″,...; ce qui donnera le nouveau polygone circonscrit A″B″C″D″..., parfaitement égal au premier, et dont les côtés seront respectivement *parallèles* aux côtés AB, BC, CD,... du polygone inscrit.

Nous aurons, par la suite, occasion de considérer à la fois deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit; et, suivant les circonstances, nous prendrons le polygone circonscrit dans l'une ou dans l'autre des deux positions que nous venons d'indiquer.

§ IV. — *Des cercles sécants, tangents, extérieurs* et *intérieurs les uns aux autres.*

N° **136**. — On a vu (n° **127**) que, par *trois points* non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer une *circonférence* de

cercle, et qu'on ne peut en faire passer qu'*une ;* d'où il suit nécessairement que

Deux circonférences ne sauraient avoir trois points communs sans se confondre.

Mais, deux cercles étant tracés sur un même plan, il peut arriver que leurs circonférences n'aient *aucun point commun*, ou bien qu'elles aient *un* ou *deux points communs.* — Dans ce dernier cas, la droite qui joint ces deux points est une *corde commune* aux deux cercles (nº 14).

De plus, on nomme LIGNE DES CENTRES la droite menée par les deux centres.

Enfin, la ligne circulaire étant, d'après sa définition (nº 13), une courbe fermée et rentrante sur elle-même, on peut affirmer que, quand une circonférence de cercle a en même temps un point *intérieur* et un point *extérieur* à une autre circonférence, ces deux lignes *se rencontrent.*

Cela posé, voici deux propositions qui peuvent être considérées comme fondamentales dans la théorie que nous avons à établir :

THÉORÈME I.

Nº 137. — *Si deux circonférences de cercle ont deux points communs, la ligne des centres est perpendiculaire à la corde commune, et divise cette corde en deux parties égales.*

En effet, la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde, devant passer par les centres des deux cercles (nº 106), n'est autre chose que la ligne des centres; *donc*, etc.

THÉORÈME II. (*Fig.* 83.)

FIG. 83.

Nº 138. — *Lorsque deux circonférences ont un seul point commun, ce point appartient à la ligne des centres.*

En effet, soient d'abord O, O′, les centres des deux cercles; et supposons que le point commun aux deux circonférences puisse être placé au-dessus de la droite OO′, en M par exemple; abaissons MP perpendiculaire sur OO′, et prolongeons cette perpendiculaire

d'une longueur PM′=PM. On a nécessairement OM′=OM (n° 40), et par la même raison, O′M′ = O′M; d'où il suit que, le point M appartenant aux deux circonférences, le point M′ leur appartient aussi. Ces circonférences auraient donc alors *deux* points communs, *ce qui est contre l'hypothèse;* donc, etc.

N° 139. — Avant de passer à d'autres propriétés, nous examinerons d'abord quelles peuvent être les positions relatives de deux cercles tracés sur un même plan.

Fig. 84. Soient O, O′ (*fig.* 84), les centres de deux cercles décrits avec des rayons *inégaux;* et supposons qu'aux extrémités A et B, A′ et B′, des diamètres situés dans la ligne des centres, on ait élevé sur cette ligne des perpendiculaires, GG′ et KK′, II′ et LL′ : les deux premières droites seront (n° 102) tangentes au cercle O, et le comprendront entièrement; il en sera de même des deux autres droites par rapport au cercle O′.

Cela posé, admettons que le cercle O, restant fixe dans son plan, ainsi que ses deux limites, GG′, KK′, le cercle O′, ou plutôt la bande II′LL′ qui le renferme, glisse ou se meuve parallèlement à elle-même, de manière que le point O′ se rapproche continuellement du point O : il est facile de reconnaître ainsi, que les positions relatives des deux cercles se réduisent à *cinq* essentiellement différentes:

Fig. 84. 1° — La bande II′LL′ peut être placée comme dans la *fig.* 84. — Dans ce cas, les deux cercles sont tout à fait *extérieurs l'un à l'autre*, puisqu'ils sont, l'un à gauche de KK′, l'autre à droite de II′, et que les droites KK′, II′, sont séparées par la distance BA′.

Fig. 85. 2° — Supposons maintenant que la limite II′ (*fig.* 85) vienne à s'appliquer sur KK′. — Dans cette nouvelle position, la droite KK′ sera une tangente commune aux deux cercles, lesquels, étant d'ailleurs situés entièrement, l'un à gauche, l'autre à droite de KK′, n'auront que le seul point B commun, et seront encore extérieurs l'un à l'autre. — On dit alors qu'ils sont *tangents extérieurement*.

3° — La bande II′LL′, continuant à se mouvoir, arrivera
Fig. 86. dans une position telle que II′ (*fig.* 86) soit à gauche de KK′, la seconde limite LL′ restant à droite. — Dans ce cas, les deux bandes

auront une partie commune II'KK'; et il en sera, par conséquent, de même des deux cercles qui auront MBA'N pour surface commune. Les circonférences se couperont donc nécessairement en deux points M, N; et les deux cercles sont dits alors des *cercles sécants*.

4° — Supposons la seconde limite LL' parvenue à s'appliquer sur KK' (*fig.* 87), la première II' restant toujours intérieure à la bande GG'KK', ce qui suppose que le cercle O' soit moindre que le cercle O : il est aisé de voir que le cercle O' aura tous ses points, autres que le point B' [qui est venu se confondre avec le point B], situés intérieurement au cercle O. — En effet, si, par le centre O, on tire une droite quelconque qui rencontre les deux circonférences aux points M, N, et qu'on joigne le centre O' au point N, le triangle OO'N donnera (n° 58) Fig. 87.

$$ON < OO' + O'N < OO' + O'B < OB < OM.$$

Ainsi tous les points de la circonférence O' sont intérieurs à la circonférence O; et les deux circonférences sont dites alors *tangentes intérieurement*.

5° — Enfin, lorsque (*fig.* 88) les limites II', LL', seront toutes les deux placées dans la bande GG'KK', la circonférence O' sera tout à fait *intérieure* à la circonférence O; et ces deux circonférences n'auront *aucun point commun*. — En effet, tirant la droite ON et le rayon O'N, on aura Fig. 88.

$$ON < OO' + O'N < OO' + O'A' < OA;$$

ce qui prouve que le point N est intérieur à la circonférence O.

N. B. — Il peut arriver, comme cas particulier de celui-ci, que les points O, O', viennent à se confondre : alors, les deux circonférences seront *concentriques* (n° 128); elles se confondraient même, si de plus leurs rayons étaient égaux.

Les cinq positions relatives que nous venons d'énumérer sont évidemment les seules vraiment différentes que les deux cercles puissent avoir; car, si la limite GG' venait passer au point A, puis à sa gauche, on retomberait sur les circonstances déjà examinées.

Ceci admis, on comprendra facilement les propositions suivantes :

FIG. 84 et 88. **THÉORÈME III.** (*Fig.* 84 et 88.)

N° **140.** — *Quand deux circonférences*, OA, O'A', *n'ont aucun point commun, la distance des centres*, OO', *est plus grande que la somme des rayons* ou *plus petite que leur différence*, suivant qu'elles sont *extérieures* ou *intérieures* l'une à l'autre.

FIG. 84. Car on a, dans le premier cas (*fig.* 84),

$$OO' = OB + BA' + A'O',$$

d'où

$$OO' > OA + O'A';$$

FIG 88. et dans le second (*fig.* 88),

$$OO' = OA - O'A' - AA',$$

d'où

$$OO' < OA - O'A'.$$

Nommons, pour abréger, D la distance des centres, R et R' les deux rayons [R étant le plus grand rayon]; — ces deux relations deviennent, pour le cas des cercles *extérieurs*,

$$D > R + R',$$

et pour les cercles *intérieurs*,

$$D < R - R'.$$

FIG. 85 et 87. **THÉORÈME IV.** (*Fig.* 85 et 87.)

N° **141.** — *Lorsque deux circonférences* sont *tangentes extérieurement* ou *intérieurement* (n° **139**, 2° et 4°), *la distance des centres est égale à la somme* ou *à la différence des rayons* [suivant que le contact est *extérieur* ou *intérieur*].

On sait déjà (n° **138**) que le point de contact est sur la ligne

FIG. 85. des centres. — Cela posé, on a, dans le premier cas (*fig.* 85),

$$OO' = OB + O'B, \quad \text{ou} \quad D = R + R',$$

FIG. 87. et dans le second (*fig.* 87),

$$OO' = OB - O'B, \quad \text{ou} \quad D = R - R'.$$

THÉORÈME V. (*Fig.* 86.) FIG. 86.

N° 142. — *Lorsque deux circonférences sont sécantes* (n° 139, 3°), *la distance des centres est moindre que la somme des rayons et plus grande que leur différence.*

Le point M, commun aux deux circonférences, étant nécessairement placé hors de la ligne des centres OO′ (n° 137), il s'ensuit que les trois points O, O′, M, forment un triangle qui donne (n° 38)

$$OO' < OM + O'M, \quad \text{et} \quad OO' > OM - O'M,$$

ou $$D < R + R', \quad \text{et} \quad D > R - R';$$

ce qu'il fallait démontrer.

N° 143. SCOLIE I. — Les *réciproques* des propositions précédentes, au nombre de *cinq*, suivant les positions relatives des cercles, sont *vraies* et se démontreraient par la *réduction à l'absurde*, conformément au principe établi au n° 91.

Ainsi, quand deux circonférences sont placées sur un même plan,

1° — *Si* l'on a $D > R + R'$,

les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre ;

2° — *si* $D = R + R'$,

les deux cercles sont tangents extérieurement ;

3° — *si* $D < R + R'$, et $> R - R'$,

les deux cercles sont sécants ;

4° — *si* $D = R - R'$,

le plus petit cercle est tangent intérieurement au plus grand ;

5° — enfin *si* $D < R - R'$,

le plus petit cercle est intérieur au plus grand.

Nous nous bornerons à démontrer la dernière de ces réciproques, comme étant celle dont on fait le plus souvent usage.

Ainsi, soit en même temps

$$D < R + R', \quad \text{et} \quad D > R - R',$$

nous disons que les deux circonférences se coupent nécessairement. Car, si elles ne se coupaient pas, ou elles seraient *tangentes*, ou bien elles n'auraient *aucun point commun*.

Dans le premier cas, on aurait, en vertu du *théorème* IV,

$$D = R + R', \quad \text{ou} \quad D = R - R',$$

résultats contradictoires avec les relations supposées.

Dans le second cas, on aurait (*théorème* III)

$$D > R + R', \quad \text{ou} \quad D < R - R',$$

résultats contradictoires avec les hypothèses.

On ferait des raisonnements analogues pour les autres réciproques.

N° 144. Scolie II. — Le *théorème* V et sa *réciproque* peuvent être renfermés dans un énoncé beaucoup plus concis :

Pour que deux cercles se coupent, IL FAUT ET IL SUFFIT *que le plus grand des trois éléments qui déterminent leur position relative* [la distance des centres et les deux rayons], *soit moindre que la somme des deux autres*. C'est, en effet, la condition *caractéristique* de l'existence d'un triangle avec ces trois éléments.

N° 145. — Scolie III. — On a supposé, dans tout ce qui précède, que les rayons des deux cercles étaient *inégaux ;* mais si l'on avait $R = R'$, les diverses propositions n'en subsisteraient pas moins.

Par exemple, si l'on a en même temps

$$R = R', \quad \text{et} \quad D = 0,$$

ce qui suppose les deux circonférences *concentriques,* l'une des relations précédentes, $D = R - R'$, se réduit à $0 = 0$. Un pareil résultat, dans l'analyse algébrique, est en général le symbole de l'*indétermination ;* et, en effet, dans le cas que nous examinons, les deux circonférences, étant concentriques et ayant des rayons égaux, *se touchent en tous leurs points communs.*

CHAPITRE III.

DES PROBLÈMES QUI SE RAPPORTENT AUX DEUX CHAPITRES PRÉCÉDENTS.

N° 146. — INTRODUCTION. — *Notions générales* sur les deux méthodes de résolution des problèmes, l'ANALYSE et la SYNTHÈSE.

Nous avons déjà dit (n° 17, 6°) en définissant les problèmes, qu'on en distingue de deux sortes : les problèmes *graphiques* ou relatifs aux figures, et les problèmes *numériques* ou relatifs à l'étendue. Or, il ne peut être, pour le moment, question que des premiers, puisque les autres supposent la connaissance des rapports numériques dont la recherche doit faire l'objet du second livre.

En général, RÉSOUDRE UN PROBLÈME, c'est (*même numéro*) déterminer certaines choses *inconnues* au moyen d'une ou de plusieurs autres choses connues ou *données*, qui ont avec les premières des relations indiquées par l'*énoncé*. — Le résultat auquel on parvient, s'appelle la SOLUTION du problème.

Quand il s'agit de problèmes *graphiques*, on a pour objet de *tracer* [à l'aide de la règle et du compas] une figure qui remplisse certaines conditions indiquées par l'énoncé de la question; et c'est ce qu'on appelle *faire la construction* du problème.

Pour arriver à ce but, on peut employer deux méthodes, l'ANALYSE ou la SYNTHÈSE.

Lorsqu'on veut procéder par la méthode analytique, on commence par *supposer le problème résolu;* c'est-à-dire que l'on décrit d'abord sans instrument, et tant bien que mal, une figure à laquelle on suppose les propriétés exigées par l'énoncé. Ensuite, par d'autres opérations préparatoires, et à l'aide des relations qui lient entre elles les *données* aux *inconnues*, on tâche de découvrir quelque *construction* qui, si on l'exécutait réellement, avec la règle et le compas, en prenant pour bases les données de la question,

conduirait à la *solution* demandée; ou bien on ramène la question proposée à d'autres questions plus ou moins simples, que l'on sait déjà résoudre. — C'est cette suite de déductions qui constitue ce que l'on nomme *l'analyse* du problème.

La méthode *synthétique* est l'inverse de la précédente: elle consiste à prescrire tout d'abord les opérations à exécuter, sauf à prouver ensuite que le résultat de cette construction satisfait aux conditions du problème.

Chacune de ces deux méthodes présente des caractères qui lui sont propres. — La première est, à proprement parler, la *méthode d'invention;* et son emploi est indispensable pour conduire à la connaissance de la construction. — La seconde est, au contraire, la *méthode de démonstration;* et son emploi suppose que l'*analyse* a déjà fait connaître la construction, dont toutefois elle démontre plus directement l'efficacité. — Aussi, la première méthode est-elle plus longue à exposer, par la raison que, après avoir *analysé* un problème, on ne peut, le plus souvent, se dispenser d'avoir recours à la *synthèse* pour démontrer complétement que les conditions du problème sont bien remplies.

La nécessité d'une rédaction concise nous obligera souvent, dans ce qui va suivre, à supprimer l'*analyse* du problème, ou, du moins, à l'indiquer d'une manière très-succincte, surtout en ce qui concerne les problèmes les plus élémentaires; — comme il nous arrivera aussi, pour abréger la *synthèse*, de ne donner que la construction, sans démonstration, quand l'analyse nous paraîtra suffisante pour y suppléer.

Au reste, l'emploi de ces deux méthodes ne se borne pas à la résolution des problèmes. Toutes deux peuvent être appliquées aux théorèmes, l'*analyse* pour les découvrir, et la *synthèse* pour les démontrer. Toute la différence consiste en ce que l'énoncé de la proposition *suit* ou *précède* la démonstration, suivant que l'on fait usage de l'*analyse* ou de la *synthèse*. Les *corollaires* et les *scolies* des chapitres précédents offrent de nombreux exemples de chacun des deux cas.

En résumé, l'*analyse* sert à *trouver* les vérités *inconnues*, et la *synthèse* à *prouver* les vérités *connues*.

N° 147. — Pour compléter la résolution d'un problème, il faut encore, dans beaucoup de cas, que l'analyse ou la synthèse soit accompagnée d'une *discussion*. — On nomme ainsi l'examen détaillé des circonstances variables de la question, et des conséquences particulières qu'elles entraînent, examen d'où il résulte que, suivant les cas, le problème est *déterminé*, ou *indéterminé*, ou bien *impossible* : c'est-à-dire qu'il a un nombre *limité* de solutions, ou un nombre *illimité*, ou bien qu'il n'en a *aucune*.

Nous observerons, à ce sujet, qu'il y a une distinction bien essentielle à faire entre le *nombre des solutions* dont un problème est susceptible, et le *nombre des moyens* à employer pour arriver à ces solutions, nombre qui peut lui-même varier beaucoup suivant la nature de la question.

Relativement à ces moyens, la construction est dite *plus ou moins simple*, suivant que le nombre de lignes à tracer est *moins ou plus* considérable ; elle est dite *plus ou moins élégante*, suivant que l'on a tiré un parti plus ou moins avantageux des lignes données ou déjà décrites. — Une construction élégante et simple à la fois est toujours une preuve de *sagacité* et de *jugement* de la part de celui qui la découvre.

— Ce chapitre se composera de *trois paragraphes*. Le premier traitera des *perpendiculaires*, des *angles*, et des *parallèles* ; le second, de la *construction des polygones* d'après certaines données ; et le troisième, du *contact mutuel des droites et des cercles*, ou des *cercles entre eux*.

Remarque importante. — Dans toute opération graphique exécutée sur le papier, on suppose ordinairement, parce que cela est plus commode, qu'une des lignes du problème [considérée comme base de la construction] soit parallèle au bord inférieur de la feuille de dessin, ou, en d'autres termes, soit dans une position *horizontale*. — Dès lors, les deux régions du plan (n° 11), déterminées par la droite, peuvent se nommer, l'une la région *supérieure*, l'autre la région *inférieure* ; et l'on dit qu'un point est ou doit être situé *au-dessus* ou *au-dessous* de la droite, suivant qu'il se trouve

ou doit se trouver dans la région *supérieure* ou dans la région *inférieure*.

Ces locutions, bien que peu conformes au langage ordinaire de la *géométrie*, ont néanmoins l'avantage d'abréger quelquefois le discours.

§ I. — *Des perpendiculaires, des angles, et des parallèles.*

FIG. 89.

PROBLÈME I. (*Fig.* 89.)

N° 148. — *En un point donné* A *d'une droite indéfinie* LM, *élever une perpendiculaire à cette droite.*

ANALYSE. — Un point de cette perpendiculaire étant déjà connu, il suffit (n° 8) d'en déterminer un second; et on l'obtiendrait si, après avoir marqué sur LM deux points, B, C, également distants du point A, on pouvait avoir, au-dessus de LM, un autre point qui fût également éloigné des mêmes points B et C.

SYNTHÈSE. — 1° — *Prenons avec le compas* deux distances égales AB, AC; — 2° — Des points B, C, comme centres, avec le même rayon *arbitraire* [plus grand, toutefois, que AB], *décrivons* deux circonférences; — 3° — *Joignons* le point D, où elles se coupent, avec le point A :

Nous aurons ainsi la perpendiculaire demandée.

En effet, d'après cette construction, les deux circonférences décrites sont telles, que la distance BC des centres est *moindre* que la somme des rayons [puisque chacun d'eux surpasse la moitié de cette distance], et est en même temps *plus grande* que leur différence [qui est *nulle*]; donc (n° 143) les circonférences se coupent en un certain point D; et si on le joint au point A, la droite de jonction DA est nécessairement perpendiculaire à BC ou LM (n° 41, *scolie* II).

SCOLIE I. — Les deux circonférences se coupent en un second point D', placé au-dessous de LM, et dont on se sert comme

moyen de vérification, les trois points D, A, D′, devant être *en ligne droite.*]

Dans la pratique, on doit se borner à tracer les arcs EF et GK, E′F′ et G′K′, qui avoisinent les points d'intersection des deux circonférences.

SCOLIE II. — Comme la construction précédente est toujours exécutable, il s'ensuit que,

Par un point donné sur une droite, on peut toujours élever une perpendiculaire;

Il est d'ailleurs prouvé (n° 27) que

l'*On ne peut en élever qu'une.*

PROBLÈME II. (*Fig.* 90.) FIG. 90.

N° 149. — *D'un point* A *pris hors d'une droite* LM, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

L'analyse de ce problème est à peu près semblable à celle du précédent. Il suffirait d'avoir un second point de la perpendiculaire, et, pour cela, d'obtenir sur LM deux points également distants du pied de cette perpendiculaire.

SYNTHÈSE. — 1° — Du point A comme centre, avec un rayon suffisamment grand, *décrivons* un arc de cercle qui coupe LM aux points B, C; — 2° — des points B et C comme centres, avec un nouveau rayon [plus grand toutefois que la moitié de BC], *décrivons* deux nouvelles circonférences [ou plutôt, des arcs EF et GK, E′F′ et G′K′], qui se coupent aux points D, D′; — 3° — *tirons* ADD′:

Nous aurons la perpendiculaire demandée.

D'abord, les deux dernières circonférences décrites se coupent nécessairement, puisque, d'après la construction, la distance de leurs centres, B et C, est *moindre* que la somme des rayons et *plus grande* que leur différence; de plus, les trois points A, D, D′, appartiennent, par leur position, à la perpendiculaire élevée par le milieu de BC; *donc*, etc.

Scolie. — La construction précédente étant toujours pe
il s'ensuit que,

D'un point pris hors d'une droite, on peut toujours a une perpendiculaire sur cette droite;

Il est d'ailleurs établi (n° 127), que

l'*On ne peut en mener qu'une.*

Problème III. (*Fig.* 91.)

Fig. 91.

N° 130. — *Diviser en deux parties égales une droite* AB *terminée de longueur;* — ou, en d'autres termes, — *Trou milieu d'une droite.*

Analyse. — Il suffit, pour avoir la perpendiculaire qui la droite AB en deux parties égales, d'obtenir hors de cette deux points qui soient également distants de A et de B.

Synthèse. — 1° — *Décrivons* des points A, B, comme cen avec le même rayon arbitraire [plus grand toutefois que la m de AB], deux circonférences [ou deux arcs de cercle], q coupent en deux points C, C′; 2° — *tirons* CC′ :

Le point O où la droite CC′ rencontre AB, est le *milieu* de droite.

Même démonstration que dans les problèmes précédents.

N. B. — Il convient, pour plus d'exactitude dans la déter nation du point O, de déterminer de la même manière deux au points D, D′, de la droite CC′.

N° 131. — **Corollaire.** — De là résulte évidemment le mo

1° — de — *Décrire, sur une droite donnée comme diamè une demi-circonférence,* ou *une circonférence entière:*

Car la question se réduit évidemment à trouver le *milieu* de droite;

2° — de — *Faire passer un cercle par trois points donnés* :

Après avoir *joint* ces points deux à deux par des droites, se réduit (n° 127) à *élever* des perpendiculaires à ces droites leurs *milieux* respectifs. — Le point de concours de ces per

diculaires est le centre du cercle; on a d'ailleurs le rayon, en *joignant* le centre à l'un des trois points donnés.

3° de — *Trouver le centre d'un cercle, ou d'un arc de cercle déjà décrit,* — quand on a perdu la trace de ce centre :

Prenez au hasard trois points sur cet arc, et *opérez* comme il vient d'être dit;

4° enfin, de — *Diviser un arc de cercle en deux parties égales* :

Tirez la corde de cet arc, et *abaissez* du centre (n° **149**) une perpendiculaire sur cette corde; — ou bien, *élevez* (n° **150**) une perpendiculaire sur le milieu de cette corde; — elle passera nécessairement (n° **127**) par le milieu de l'arc.

N. B.—La seconde construction est la seule possible quand on ne connaît pas le centre de l'arc.

PROBLÈME IV. (*Fig.* 92.) FIG. 92.

N° **152**. — *Mener une perpendiculaire à une droite que l'on ne peut prolonger que dans un sens,* — soit 1° — *par un point* A *pris sur la droite,* — soit 2° — *par un point* D *situé hors de la droite.*

Les moyens exposés pour résoudre les deux premiers problèmes, supposent évidemment que l'on peut prendre sur la droite donnée, deux points également distants d'un point quelconque de cette droite. Or, cette condition n'est pas toujours possible à remplir, comme, par exemple, quand le point A ou le point D se trouve placé très-près de l'un des bords d'une feuille de dessin.

PREMIER CAS. — Soit le point A donné *sur* la droite AX qu'on ne peut prolonger à gauche de A.

ANALYSE. — On obtiendrait (n° **94**) un triangle DAE, rectangle en A, si l'on pouvait déterminer une droite DE telle, qu'en joignant son point milieu O au point A, on eût

$$OA = OD = OE;$$

d'où résulte la construction suivante :

1° — *Prenons* un point O à volonté au-dessus de AX; — 2° — de ce point comme centre, avec un rayon égal à la distance OA [qui

se trouve déterminée], *décrivons* un arc de cercle, lequel coupera nécessairement AX en un second point E; — 3° — *Tirons* EO et *prenons* OD = OE.

Le point D sera un second point de la perpendiculaire demandée : — en effet, le triangle DAE est rectangle en A puisque l'on a

$$OD = OE = OA.$$

DEUXIÈME CAS. — Soit le point D donné *hors* de la droite.

SYNTHÈSE. — 1° — *Menons* par ce point une droite quelconque DE ; — 2° — *cherchons* (n° 150) *le milieu* O de cette droite; — 3° — du point O comme centre, avec le rayon OE = OD, *décrivons* un arc de cercle qui coupe la droite AX en un certain point A ; — 4° — *tirons* DA.

Cette droite est la perpendiculaire demandée, — puisque, par cette construction, on a encore

$$DA = OE = OD.$$

N. B. — Une fois que le *pied* A de la perpendiculaire est déterminé, on peut, comme dans le premier cas, trouver tant d'autres points que l'on veut de cette même droite.

FIG. 93. PROBLÈME V. (*Fig.* 93.)

N° 153. — *Par un point donné* A *d'une droite indéfinie* AX, *mener une seconde droite qui forme avec la première un angle donné* M.

SYNTHÈSE. — Des points M et A comme centres respectifs, et avec le rayon MN = AB, *décrivons*, — 1° — l'arc NP, compris entre les côtés de l'angle et terminé aux points N et P ; — 2° — l'arc indéfini BB′. — 3° — Du point N comme centre, avec un rayon égal à la corde de l'arc NP, *décrivons* un nouvel arc de cercle qui coupe l'arc BB′ au point C ; — 4° — *tirons* AC :

L'angle BAC est l'angle demandé.

En effet, d'après cette construction, les cordes des deux arcs NP, BC, sont égales; donc il en est de même (n° 109) de ces arcs, et par conséquent (n° 25), des angles BAC, NMP.

SCOLIE I. — Pour diviser un angle en 2, 4, 8,... parties égales, il suffit de diviser l'arc qui lui correspond en *deux* parties égales (n° **182**, 4°), puis chaque moitié en *deux*, et ainsi de suite. —Cela est évident.

SCOLIE II. — Le même problème fournit le moyen de *Déterminer le supplément de la somme de deux angles donnés;* — en d'autres termes, — *Connaissant deux angles d'un triangle, déterminer le troisième.*

Après avoir *formé*, en un point A d'une droite quelconque AB (*fig.* 94), un angle BAC égal au premier angle donné, *construisons* ensuite sur AC, et à partir du point A, un angle CAD égal au second angle donné; *prolongeons* ensuite AB en B' : l'angle DAB' est le supplément demandé. FIG. 94.

PROBLÈME VI. (*Fig.* 95.) FIG. 95.

N° **184**. — *D'un point* C *donné hors d'une droite* AB, *tracer une parallèle à cette droite.*

On pourrait, après avoir *abaissé* (n° **149**) du point C, une droite CK perpendiculaire sur AB, *mener* (n° **148**) par le même point C, la droite CG perpendiculaire à CK : — on aurait la parallèle demandée.

Mais le problème précédent, et la propriété des angles *alternes-internes*, fournissent un moyen de construction beaucoup plus simple.

SYNTHÈSE. — 1° — *Tirons* du point C une droite quelconque CD; — 2° — des points C et D comme centres, avec le rayon CD, *décrivons* successivement deux arcs de cercle, l'un indéfini, DD', et l'autre, CE, terminé en un point E de la droite AB; — 3° — *prenons* (n° **183**), à partir du point D, sur DD', un arc DF égal à CE; — 4° — *tirons* CF.

La droite FCG ainsi tracée sera la parallèle demandée :

En effet, d'après cette construction,

$$angle\ FCD = angle\ CDE;$$

donc (n° **47**) les deux droites AB, CG sont parallèles.

N° 155. — Corollaire. Les problèmes V et VI donnent le moyen de résoudre la question suivante :

Fig. 96. *Par un point* C (*fig.* 96) *pris hors d'une droite* AB, *mener une seconde droite qui rencontre la première sous un angle donné* M.

En un point quelconque I de AB, *faisons* un angle LIB égal à M (n° 153); puis du point C, *menons* CD parallèle à IL :

CD est évidemment la droite demandée, puisque l'on a

$$CDB = LIB = M.$$

N. B. — Comme, au point I, l'on peut former un second angle L′IA = M, il s'ensuit que le problème admet les *deux* solutions, CD, CD′.

Fig. 97.

Problème VII. (*Fig.* 97.)

N° 156. — *Sur une droite* AB *donnée de longueur, décrire un arc de cercle* (n° 126, *N. B.*) *capable d'un angle donné* M.

Dès la première inspection, se présente le moyen de construction qui suit : — 1° — *tirer,* par le point A, une droite quelconque AC ; — 2° — *mener,* du point B (n° 155), une seconde droite BC, formant avec la précédente, l'angle ACB=M ; — 3° — *faire passer* (n° 151) par les trois points A, B, C, une circonférence.

ACC′B est l'arc demandé, puisque tous les angles qui lui sont inscrits sont égaux entre eux et à l'angle M (n° 126).

Mais l'analyse suivante conduit à une construction beaucoup plus simple :

Analyse. — Supposons le problème résolu ; et soit ANB l'arc demandé. Si, au point B, on mène la tangente BL, l'angle ABL sera égal à l'angle ANB = M (n° 124) ; et comme on ne peut mener par le point B qu'une seule tangente (n° 102), il s'ensuit que, réciproquement, si l'on forme au point B un angle ABL égal à M, la droite BL, ainsi déterminée, sera tangente au cercle ; donc (n° 102) la droite élevée par le point B perpendiculairement à BL, passera par le centre. — De là résulte cette construction :

Synthèse. — 1° — Au point B, *faisons un angle* ABL égal à M ;

— 2° — *élevons* de ce même point une droite BK perpendiculaire à BL (n° 148) ; — 3° — sur le milieu de AB, une autre perpendiculaire IG : les deux perpendiculaires se coupent nécessairement (n° 80), en un certain point O ; — 4° — de ce point, avec le rayon OA = OB, *décrivons* un cercle.

La portion ANB ainsi déterminée, est l'arc demandé.

En effet, d'après la construction, la circonférence tracée est tangente en B à la droite BL ; donc, tous les angles en C, C′, C″,..., sont égaux à ABL, c'est-à-dire à l'angle M.

Scolie I. — Le centre du cercle sera placé *au-dessus* ou *au-dessous* de AB (*voyez* la remarque du n° 147), suivant que l'angle donné sera *aigu* ou *obtus* (*postul.* n° 34).

Si l'angle donné est *droit*, le centre se trouve alors placé au milieu de AB, et le segment devient un *demi-cercle*.

Scolie II. — Dans le cas où le centre se trouve *au-dessus* de la droite AB, le *segment inférieur*, AN′B, du cercle décrit, est évidemment capable du *supplément* de l'angle donné.

Enfin, le problème admet *deux solutions* si rien n'indique dans l'énoncé, que le segment doit être situé au-dessus plutôt qu'au-dessous de AB.

On obtient alors (*fig.* 98) deux segments AMB, AM′B, *égaux entre eux et* inversement *superposables*. Fig. 98.

§ II. — *Construction des polygones d'après certaines données.*

Nous commencerons par les triangles, à la construction desquels se ramène celle de toutes les figures rectilignes.

Problème I. (*Fig.* 99.) Fig 99.

N° 157. — *Étant donnés* dans un triangle, — soit 1° — *un côté et les deux angles adjacents,* — soit 2° — *deux côtés et l'angle compris ;* — soit enfin 3° — *les trois côtés : — construire le triangle.*

Nous n'insisterons pas sur les deux premiers cas, dont la con

FIG. 96. struction se déduit facilement du problème du n° 153. Nous nous bornerons à une simple observation, savoir : dans le premier cas, pour que le problème soit *possible*, il faut et il suffit que les deux angles donnés forment une somme *moindre que 2 droits*; et dans le second, le problème est évidemment *toujours possible*, puisqu'après avoir formé un angle égal à l'angle donné (n° 155), on peut toujours prendre sur les deux côtés de cet angle construit, des parties égales aux deux lignes données.

TROISIÈME CAS. — Soient m, n, p, les trois côtés donnés (*).

CONSTRUCTION. — 1° — Sur une droite indéfinie AX, *prenons* une partie AB égale à l'un quelconque des côtés donnés, p par exemple; — 2° — des points A et B comme centres, et avec les rayons respectifs m et n, *décrivons* deux circonférences [ou plutôt deux arcs de cercle], qui se couperont nécessairement en un point C, si le triangle est possible; — 3° — *tirons* CA et CB.

Le triangle ABC satisfait évidemment aux conditions de l'énoncé.

N. B. — La construction d'un triangle *équilatéral* est un cas particulier de celle-ci : les rayons des deux cercles à décrire, sont *égaux entre eux*, et égaux au côté donné, lequel a dû, d'ailleurs, être déjà porté sur AX.

Discussion. — Pour que le triangle soit *possible*, il faut et il suffit (n° 144) que le côté AB, pris pour base de la construction, soit *moindre* que la somme des deux autres et *plus grand* que leur différence.

A proprement parler, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un *triangle* soit *possible* avec les trois côtés donnés, est que,

S'il s'agit d'un triangle SCALÈNE, — *le plus grand côté* soit *moindre que la somme des deux autres*;

Et que, si le triangle doit être ISOSCÈLE, — *chacun des côtés égaux* soit *plus grand que la moitié de la base*;

(*) Lorsqu'on veut représenter par une seule lettre, une ligne donnée de longueur, il est d'usage, pour éviter toute confusion, d'employer un petit caractère m, n,... au lieu de M, N,...

Enfin, lorsque le triangle à construire doit être ÉQUILATÉRAL, — il est *toujours possible*.

SCOLIE. — Nous observerons, relativement au premier cas du problème Ier, que si, au lieu d'Un côté et des deux angles adjacents, on donnait *un côté*, *l'angle opposé*, et l'*un des angles adjacents* (n° 67), la question pourrait être facilement ramenée au premier cas, en vertu du scolie II établi au n° 133.

PROBLÈME II. (*Fig.* 100.) FIG. 100.

N° 138. — *Étant donnés, dans un triangle, deux côtés* [*m*, *n*], *et l'angle* N *opposé à l'un d'eux* [*n*, par exemple], *construire le triangle.*

[L'examen des circonstances relatives à la *résolution* et à la *discussion* de ce problème, mérite toute l'attention des commençants.]

SYNTHÈSE. — 1° — Sur une droite indéfinie AX, *construisons* un angle YAX égal à N; — 2° — *portons* sur AY de A en C le côté *m*; — 3° — du point C comme centre, avec un rayon égal à *n* [côté opposé à l'angle N], *décrivons* un arc de cercle qui coupera généralement la droite AX en deux points B, B′; — 4° — *tirons* CB, CB′; et les deux triangles ACB, ACB′ satisferont à la question;

Car on a, d'après la construction, BAC ou B′AC = N, AC = *m*, et CB ou CB′ = *n*, côté opposé à N.

Ainsi, le problème peut admettre *deux solutions*. — Mais nous allons faire voir que, suivant les grandeurs relatives des données, le problème est susceptible de *deux* solutions, ou d'*une seule*, ou bien n'en admet *aucune*.

DISCUSSION. — Remarquons avant tout que si, après avoir construit l'angle YAX = N, et pris AC = *m*, on abaisse du point C la perpendiculaire CD sur AX, cette perpendiculaire CD [dont la considération va nous être très-utile], peut avoir *trois* positions différentes, suivant l'espèce de l'angle donné N : elle peut (n° 87) tomber *dans* l'angle YAX (*fig.* 100 et 101), ou se confondre *avec* CA (*fig.* 102), ou tomber *hors* de l'angle YAX (*fig.* 103), selon que N est *aigu*, *droit*, ou *obtus*. — Dans le premier cas et dans le FIG. 100, 101. FIG. 102, 103.

troisième, on a toujours (n° 39) $CD < CA$ ou m; et dans le second, $CD = CA = m$.

— Cela posé, examinons d'abord le cas où *l'angle* N est *aigu*.

Dans ce cas, *cinq* hypothèses différentes peuvent être faites :

Ou bien, $n < CD$, et *à fortiori* $< m$,

Ou $n = CD$, et par conséquent encore, $n < m$;

Ou $n > CD$, mais $< m$;

Ou n tout à la fois $> CD$ et $> m$.

Ou bien enfin, $n = m$, et par conséquent $> CD$.

1° — Soit $n < CD$. — La circonférence décrite du point C

FIG. 100. (*fig.* 100) comme centre avec n pour rayon, ne coupera pas la droite AX; et alors, le problème n'admettra *aucune* solution.

2° — Soit $n = CD$. — La circonférence ne fera que *toucher* la

FIG. 100. droite AX en un point D (*fig.* 100); et l'on obtiendra un triangle *rectangle* ADC pour réponse *unique* à la question.

3° — Soit $n > CD$, mais $< m$ ou $< CA$. — La circonférence

FIG. 100. coupera alors la droite AX en *deux* points B et B′ (*fig.* 100), situés l'un et l'autre à droite du point A (n° 40); et l'on obtiendra ainsi deux triangles, ABC, AB′C, qui rempliront également les conditions de l'énoncé. Donc, dans ce cas, le problème admet *deux solutions*.

4° — Soit n en même temps $> CD$ et $> m$ ou CA. — La circonférence coupera encore la droite AX en deux points, B, B′

FIG. 101. (*fig.* 101); mais ces points seront nécessairement (n° 40) placés, l'un à droite, l'autre à gauche du point A; ce qui donnera *un seul* triangle, ABC, satisfaisant à la question, puisque, dans le triangle AB′C, l'angle CAB′ est, non égal à N, mais supplémentaire de N.

5° Enfin — soit $n = m$. — La circonférence coupera la droite AX aux points A, B, et donnera pour *solution unique* le triangle isoscèle CAB. Ainsi, dans ce nouveau cas, le problème n'admet encore qu'*une solution*.

— Supposons actuellement que *l'angle* N soit *droit;* auquel cas CD se confond avec CA ou m, et lui est égal.

On ne peut faire dans ce cas que *deux* hypothèses :

Ou $n = CD = m$; et dans cette hypothèse, la circonférence de-

cnte ne faisant que *toucher* la droite AX au point A, il en résulte *une droite* CA pour réponse à la question; c'est-à-dire que, dans ce cas très-particulier, le problème n'a *aucune solution* proprement dite, puisqu'on demandait un triangle.

Ou bien, $n > CD > CA$ (*fig.* 102); dans cette seconde hypothèse, la circonférence coupe la droite AX en deux points, B, B', qui donnent pour *solutions* deux triangles rectangles, CAB, CAB', *rectangles* en A. Mais ces triangles sont *égaux* et *superposables*. Donc, dans cette hypothèse, le problème n'admet, à proprement parler, qu'*une seule solution*. FIG. 102.

— Il ne nous reste plus qu'à supposer *l'angle* N *obtus*.

Puisque dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté, il faut nécessairement, dans le cas actuel, *pour que le triangle soit possible*, supposer $n > m$, et par conséquent $n > CD$. Alors la circonférence décrite ne peut donner lieu qu'à *un seul* triangle ABC (*fig.* 103) satisfaisant à l'énoncé, puisque le second triangle AB'C aurait son angle CAB' supplémentaire de N, et non égal à N. FIG. 103.

Ainsi, dans le cas où N est obtus, le problème admet *une seule solution*, ou n'en admet *aucune*.

Nous avons cru devoir exposer avec détail la discussion du problème précédent, pour donner aux jeunes gens une idée de la manière dont se discute complétement un problème.

N° 139. — SCOLIE I. — Le problème I[er] et le scolie qui s'y rattache correspondent aux cas d'égalité établis au n° 63; mais le problème que nous venons de résoudre donne lieu à un nouveau théorème.

Pour le faire comprendre, remarquons d'abord que la seule hypothèse où le problème précédent offre réellement *deux solutions*, est celle où l'on a $n > CD$, mais $< m$ ou CA (*fig.* 100), et que, dans ce cas, les deux triangles CAB, CAB', qui lui correspondent, sont, l'un acutangle en B, l'autre obtusangle en B', l'angle CB'A étant supplément de CBA [à cause de CB = CB']. FIG. 100.

D'où résulte ce nouveau cas d'égalité, savoir :

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux cha-

cun à chacun ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux, pourvu que l'angle opposé au second côté soit de MÊME ESPÈCE *dans les deux triangles.*

En effet, d'après la construction du problème II, il ne peut exister qu'*un seul triangle* remplissant toutes les conditions de l'énoncé précédent.

N° **160**. — SCOLIE II. — Ces *quatre cas d'égalité* de deux triangles obliquangles sont les seuls qui puissent se présenter; et nous sommes maintenant en droit de conclure que

Un triangle est déterminé complétement par la connaissance de TROIS *des six éléments* [côtés et angles] *qui le constituent,*—pourvu 1° que parmi les données se trouve *au moins un côté,* — et 2° que, si l'on donne deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, on sache de quelle *espèce* est *l'angle opposé* au second côté.

Du triangle isoscèle et du triangle rectangle.

Quand on sait d'avance que le triangle doit être *isoscèle* ou *rectangle,* cette connaissance équivaut à *une donnée;* et il n'en faut plus que *deux autres* pour déterminer le triangle. — De là les deux problèmes suivants :

PROBLÈME III.

N° **161**. — *Construire un triangle isoscèle, connaissant,*

Soit 1° — *l'un des côtés égaux et la base;*

Soit 2° — *l'un des côtés égaux et un angle;*

Soit 3° — *la base et l'un des angles adjacents;*

Soit 4° — *la base et l'angle opposé.*

SYNTHÈSE. — Le *premier cas* du problème actuel rentre dans le troisième du n° **157**, puisqu'alors les trois côtés sont connus; seulement, il est convenable de prendre la base du triangle pour base de la construction.

Dans le *second cas,* on peut faire *deux* hypothèses :

Ou bien l'angle est adjacent au côté donné; — comme alors le second angle adjacent est supplémentaire du double de l'angle donné, il peut être déterminé facilement (n° **155**, *scol.*), et le problème rentre dans le premier cas du problème Ier.

Ou bien l'angle donné est opposé au côté donné. — Dans cette hypothèse, on connaît un angle et les deux côtés égaux qui le comprennent; ainsi la proposition rentre dans le second cas du problème Ier.

Dans le *troisième cas*, on connaît un côté et les deux angles adjacents, lesquels sont égaux entre eux; et l'on retombe sur le premier cas du nº **157**.

Enfin, pour le *quatrième cas*, il faut *prendre* le supplément de l'angle donné et le *diviser* en deux parties égales (nº **153**, *scol.* I et II). Nous connaissons ainsi les trois angles du triangle et un côté; dès lors la construction rentre encore dans le premier cas du nº **157**.

Ou plus simplement, sur la base donnée, *décrivons* (nº **156**) un arc de cercle capable de l'angle donné; puis, par le milieu de ce même côté, *élevons* une perpendiculaire, et *joignons* le point où elle rencontre la circonférence décrite, avec les extrémités de la base : Nous obtenons ainsi le triangle demandé.

Problème IV.

Nº **162**. — *Construire un triangle rectangle, connaissant,*

Soit 1º — *un côté de l'angle droit et un angle aigu;*

Soit 2º — l'*hypoténuse et un angle aigu;*

Soit 3º — les *deux côtés de l'angle droit;*

Soit 4º — l'*hypoténuse et un côté de l'angle droit.*

[Ce sont les seuls cas admissibles.]

Nous n'insisterons pas sur les trois premiers cas, dont la construction rentre, soit dans le premier, soit dans le second du nº **157** : mais nous indiquerons deux moyens de construction pour le quatrième cas.

Première construction. (*Fig.* 104.) — Après avoir *formé* un angle droit YAX (nº **153**), — 1º — *prenons* sur AX une partie AB égale au côté de l'angle droit supposé connu; — 2º — du point B comme centre, avec un rayon égal à l'hypoténuse, *décrivons* un arc de cercle qui coupe AY en un point C, et *tirons* BC. Fig. 104.

Le triangle BAC satisfait évidemment aux conditions exigées.

N. B. — Le triangle n'est *possible* qu'autant que l'hypoténuse est le plus grand des deux côtés donnés.

FIG. 105. SECONDE CONSTRUCTION. (*Fig.* 105.)—Sur une droite, AB, égale à l'hypoténuse, *décrivons* (n° 181) une demi-circonférence; puis du point A comme centre, avec un rayon égal au second côté donné, *décrivons* un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en un certain point C. — *Tirons* CB.

Le triangle CAB est le triangle demandé.

N. B. — Les circonstances déterminent celui des deux moyens de construction qui doit être préféré.

Des polygones quelconques.

PROBLÈME V.

N° 183. — *Construire un polygone égal à un polygone donné.*

On peut donner de ce problème plusieurs constructions dont nous nous bornerons à indiquer les principales.

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — Après avoir *divisé* le polygone
FIG. 58. donné, ABCDEF (*fig.* 58), en triangles, par des diagonales partant d'un même sommet, F par exemple, *prenons* sur une droite indéfinie, une partie A′ F′ = AF; puis, sur A′F′, *construisons* (n° 187) un triangle A′B′F′ égal au triangle ABF. De même, sur B′F′ = BF construisons un nouveau triangle, B′C′F′, égal à BCF. Et ainsi de suite.

Le nouveau polygone, A′B′C′D′E′F′, ainsi obtenu, sera égal au polygone ABCDEF (n° 91, 3ᵉ *cas*).

DEUXIÈME CONSTRUCTION.—D'un point quelconque, O (*fig.* 56), du polygone ABCDEFG, *tirons* des droites à tous les sommets du polygone; puis, autour d'un autre point, O′, pris à volonté dans le plan de ce polygone [la figure du deuxième polygone n'est pas tracée], *formons* des angles consécutifs, A′O′B′, B′O′C′,..., G′O′A′, respectivement égaux aux angles AOB, BOC,..., GOA; et *prenons* sur les côtés de ces angles, des parties O′A′, O′B′, O′C′,..., O′G′, respectivement égales aux parties OA, OB, OC,..., OG. *Joignons* enfin, deux à deux, les points A′, B′, C′, . . ., G′ :

Le polygone A′B′C′D′E′F′G′ ainsi obtenu sera égal au premier.

Car il est aisé de voir que ces polygones ont leurs côtés égaux

chacun à chacun et pareillement disposés, ainsi que leurs angles égaux.

TROISIÈME CONSTRUCTION. — Par les sommets A, B, C, D, E (*fig.* 106), du polygone donné, *traçons* (n° 154) une suite de droites parallèles entre elles, sous une direction tout à fait arbitraire; *prenons* sur ces droites des parties égales AA′=BB′=CC′...; et *joignons* deux à deux les points A′, B′, C′,... : FIG. 106.

Le polygone ainsi formé est encore égal au polygone donné.

Car les côtés AB et A′B′, AC et A′C′,... sont respectivement égaux (n° 74); les angles sont aussi égaux (n° 82); donc, etc.

SCOLIE. — Les deux derniers moyens de construction font connaître de nouveaux cas d'égalité relatifs aux polygones; le suivant mérite seul d'être énoncé :

Deux polygones sont égaux lorsque leurs côtés, considérés chacun à chacun, sont égaux, parallèles, et de même sens.

On peut même dire, dans ce cas, que le second polygone (*fig.* 106) n'est autre que le premier *transporté dans son plan parallèlement à lui-même*. — [*Voir* le *lemme* du n° 62.] FIG. 106.

PROBLÈME VI. (*Fig.* 58.) FIG. 58.

N° 164. — *Construire un polygone, connaissant un de ses côtés,* AF, *ainsi que les distances de chacune des extrémités de ce côté aux autres sommets du polygone.*

SYNTHÈSE. — Avec la droite AF et les deux distances, supposées connues, du point B aux points A, F, *construisons* (n° 157, 3e cas) un triangle ABF : — le sommet B se trouvera ainsi déterminé de position.

Même construction pour les autres sommets, C, D,...

(*Voyez*, ci-après, n° 167, la remarque qui termine ce paragraphe.)

PROBLÈME VII. (*Fig.* 82.) FIG. 82.

N° 165. — *Un polygone régulier,* ABCDE..., *étant déjà inscrit à une circonférence, construire le polygone régulier circonscrit du même nombre de côtés;* — et *réciproquement.*

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — Par les sommets A, B, C,... du polygone inscrit, *menons* des tangentes à la circonférence :

Elles détermineront un nouveau polygone qui sera le polygone demandé (n° 154).

DEUXIÈME CONSTRUCTION. — Par les extrémités I, K, L, . . . des rayons abaissés perpendiculairement sur les côtés AB, BC, . . . du polygone inscrit, *menons* des tangentes qui détermineront encore le polygone demandé.

N. B. — On a prouvé (n° 155) que les deux polygones A′B′C′D′E′, A″B″C″D″E″, obtenus par ces deux moyens, sont *égaux*.

RÉCIPROQUEMENT : — Pour obtenir le polygone inscrit, connaissant déjà le polygone circonscrit A′B′C′D′E′, *joignons deux à deux* les points de contact consécutifs, A, B, C,..., du polygone circonscrit.

Ces cordes de jonction, AB, BC, CD, . . ., sont égales, puisque leurs arcs, AIB, BKC, . . ., sont égaux ; et elles font entre elles des angles égaux entre eux comme ayant même mesure (n° 122).

Ou bien encore, en partant du polygone circonscrit A″B″C″D″E″, *joignons deux à deux* les points A, B, C, . . ., où les droites OA″, OB″, OC″, . . ., menées du centre aux sommets du polygone circonscrit, rencontrent la circonférence.

Le polygone ABCDE est régulier, puisque, les angles au centre A″OB″, B″OC″, ... étant égaux, il en est de même des arcs qui les mesurent, et par suite des cordes de ces arcs.

FIG. 107. PROBLÈME VIII. (*Fig.* 107.)

N° 166. — *Étant donnés deux polygones réguliers*, l'un *inscrit*, l'autre *circonscrit*, *d'un même nombre de côtés*, *inscrire et circonscrire les polygones réguliers d'un nombre de côtés* DOUBLE OU SOUS-DOUBLE.

Soient AB et MN deux côtés des polygones donnés.

1° — Pour obtenir le polygone *inscrit* d'un nombre de côtés *double*, il suffit évidemment de *joindre* les points A, B, au point

I, milieu de l'arc AB, et de répéter la même opération pour chacun des arcs BC, CD,.. :

Les cordes AI, IB, BL,..., sont égales comme soutendant des arcs égaux. — *Donc*, etc.

2° — On obtient le polygone *circonscrit* correspondant, en *menant* par les points A, B, deux tangentes, que l'on termine aux points m, n, sur la tangente MN; puis *on répète* la même opération aux points C, D,...

La droite mn est le côté du polygone circonscrit d'un nombre de côtés *double;* et Am, nB, en sont des demi-côtés.

En effet, les triangles rectangles OAm, OIm, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, OA = OI; d'où il suit que Am = Im, et que *angle* AOm = *angle* IOm.

On démontrerait pareillement que Bn = nI = Im = mA,

et que *angle* BOn = *angle* IOn = *angle* IOm = *angle* AOm.

On voit ainsi que l'angle mOn est moitié de l'angle au centre de chacun des polygones donnés, et n'est autre que l'*angle au centre* du polygone cherché.

Donc enfin mnp... est le polygone circonscrit demandé.

3° — Quant aux polygones inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés *sous-double,* on les obtient en *tirant* par les points alternatifs A, C, E,... les cordes AC, CE,..., puis *menant* des tangentes par les points A, C, E,..., abstraction faite des points intermédiaires B, D, F,...

N. B. — Il faut évidemment, dans ce troisième cas, pour que le problème soit *possible*, admettre que les polygones donnés ont un *nombre* PAIR de côtés.

REMARQUES IMPORTANTES *sur la détermination d'un polygone d'après certaines données.*

N° **167**. — Nous avons déjà dit (n° **90**) que [sauf certaines restrictions dont plusieurs ont été indiquées] deux polygones de n côtés sont égaux lorsqu'ils ont ($2n$ — 3) de leurs éléments égaux, chacun à chacun.

D'où il résulte qu'un polygone est généralement *déterminé* quand on donne ($2n$ — 3) de ses éléments, *angles, côtés,* ou *diagonales.*

On conçoit, en outre, combien doit être considérable le nombre des problèmes qui ont pour objet de — *Construire un polygone d'après certaines de ses parties.*

Il y a plus : si l'énoncé se tait sur la disposition mutuelle de ces parties, il peut arriver que le nombre des solutions d'un même problème soit très-grand.

Prenons, pour exemple, la question suivante :

FIG. 108. *Deux points*, A, B (*fig.* 108), *étant donnés de position sur une droite indéfinie*, LL', *trouver un troisième point dont les distances aux deux premiers soient égales à deux lignes données*, m, n.

La question est ramenée à — *Construire un triangle, connaissant les trois côtés*, AB, m, et n.

Pour cela (n° 187), des points A et B comme centres, avec des rayons respectivement égaux aux lignes données m et n, *décrivons* deux circonférences qui se couperont généralement en deux points, C et C'.

Ces points satisferont l'un et l'autre à l'énoncé, puisque, d'après la construction, l'on a

$$CA = C'A = m, \quad \text{et} \quad CB = C'B = n.$$

Maintenant, si l'on échange les rayons entre eux, c'est-à-dire qu'on prenne n pour le rayon du cercle à décrire du point A comme centre, et m pour le rayon du cercle à décrire du point B, on obtiendra deux autres points, D, D', qui satisferont également à la question, parce que rien ne dit dans l'énoncé, si le point cherché doit être plus éloigné du point A que du point B.

A la vérité, en joignant les points C, C', D, D', aux points A et B, on forme *quatre* triangles qui sont *égaux* et *superposables*, comme ayant les côtés égaux chacun à chacun ; en sorte que, s'il ne s'agissait que de construire un triangle avec ses trois côtés, le problème n'aurait, à proprement parler, qu'*une solution*. Mais, en tant qu'il faut *déterminer de position* sur un plan, *un point* qui remplisse certaines conditions, le problème offre *quatre solutions* différentes.

La question que nous venons de résoudre fait sentir la nécessité

de spécifier, dans le problème du n° 164, de quelle manière les sommets du polygone cherché doivent être placés les uns par rapport aux autres; car, sans cela, on pourrait obtenir une foule de polygones satisfaisant également à la question.

C'est encore pour cette raison que, dans le troisième cas d'égalité établi au n° 92, nous avons dû ajouter à l'énoncé : *disposés* ou *assemblés de la même manière*.

N° 168. — Il y aurait encore bien d'autres remarques à faire sur la construction des polygones en général; mais cela nous entraînerait trop loin.

Nous ferons seulement observer que, quand on connaît d'avance l'espèce du polygone à construire, le nombre $(2n - 3)$ des données généralement nécessaires peut être considérablement restreint. — C'est ainsi, par exemple, que deux données suffisent (n° 161) pour un triangle, soit *isoscèle*, soit *rectangle*. — Pour le quadrilatère, qui exige généralement $(2 \times 4 - 3)$ ou 5 données, si la figure doit être un *parallélogramme*, il suffit de *trois* données, parce que la condition du parallélisme des côtés opposés compte pour *deux*. — Dans le *losange*, *deux* données sont suffisantes; dans le *carré*, il suffit d'*une*, son côté ou sa diagonale.

Enfin, dans un polygone *régulier*, le *côté*, et une seconde donnée qui sera, soit l'*angle au centre*, soit l'*angle* même *du polygone*, soit enfin le *nombre des côtés* ou l'espèce du polygone, suffisent complétement, puisqu'il ne s'agit, pour obtenir le polygone, que de *construire* (n° 161) *un triangle isoscèle*, *connaissant un côté et l'angle opposé*, ou *un côté et l'un des angles adjacents*, moitié de l'angle du polygone.

Nous terminerons ce paragraphe par la résolution d'une double question sur le triangle, assez curieuse sous le rapport de la *discussion*, et même du mode à employer pour la résoudre.

PROBLÈME. (*Fig.* 109 et 110.) FIG. 109 et 110.

N° 169. — *Étant donnés dans un triangle, un côté* AB, *l'angle opposé* [égal à l'angle M], *et la somme* s ou *la différence* d *des deux autres côtés, construire le triangle.*

PREMIER CAS. — ANALYSE. — Observons d'abord que le sommet C du triangle doit appartenir à l'arc de cercle ACB décrit sur AB, comme capable de l'angle donné M. D'un autre côté, si l'on prolonge AC d'une longueur CD = CB, et que l'on tire DB, le triangle CDB est isoscèle, et donne (n° 58)

$$angle\ \mathrm{CDB} = angle\ \mathrm{CBD},$$

d'où (n° 55)

$$angle\ \mathrm{CDB} = \tfrac{1}{2}\, angle\ \mathrm{ACB} = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}.$$

On voit donc que le point D [dont la position, une fois déterminée, fera connaître aisément celle du point C sur l'arc ACB] est l'intersection d'un arc de cercle, capable de l'angle $\frac{1}{2}$M et construit sur AB, avec une circonférence de cercle décrite du point A comme centre avec un rayon égal à la somme donnée *s*.

Ainsi, l'on parviendrait à la solution du problème, en *construisant* séparément sur AB (n° 186) deux arcs de cercle capables, l'un de l'angle M, l'autre de l'angle $\frac{1}{2}$M, puis *décrivant* du point A comme centre, avec *s* pour rayon, un troisième arc de cercle qui couperait le second en un certain point D. — La droite AD rencontrerait le premier arc en un point C; et le triangle ACB serait le triangle demandé.

Mais cette construction n'est pas la plus simple qu'on puisse donner. — En effet, observons que le point I, où la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB rencontre le premier arc, est nécessairement *le centre* du second; car si, de ce point comme centre, avec IA pour rayon, l'on décrit un cercle, l'angle qui a son sommet sur cette circonférence, étant moitié de l'angle au centre AIB, est par conséquent égal à $\frac{1}{2}$M. — On arrive ainsi à la construction suivante :

SYNTHÈSE. — 1° — Sur AB *décrivons* un arc de cercle capable de l'angle donné M : la perpendiculaire élevée sur le milieu G de AB [laquelle a dû servir dans cette première construction] rencontre cet arc en un point I; — 2° — de ce point I comme centre, avec le rayon IA, *décrivons* une circonférence de cercle; — 3° — du point A comme centre, avec un rayon égal à la droite

donnée s, *décrivons* un arc de cercle qui coupe la seconde circonférence en un point D; — 4° — *menons* la droite DA, et *joignons* le point B au point C où DA rencontre l'arc ACB :

Nous obtenons ainsi ACB pour le triangle demandé.

En effet, d'après la construction, l'angle ACB étant double de l'angle ADB ou CDB, est par conséquent égal à M. D'ailleurs, ACB étant égal à CBD + CDB (n° 58), il s'ensuit que CBD = CDB; d'où (n° 60) CD = BC.

Donc enfin $$AC + CB = AC + CD = s.$$

C. Q. F. D.

Discussion. — Pour que le problème soit *possible*, il faut que la somme donnée *s ne soit pas plus grande que le diamètre* AIL du cercle décrit du point I comme centre; — et, en supposant que l'on ait $s < AL$, il y aura deux points d'intersection, D, D'; par suite, *deux triangles*, ACB, AC'B, satisferont également à la question. Mais il serait facile de reconnaître que ces deux triangles sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

Si l'on a $s = AL$, les *deux solutions* se réduisent à *une seule*, savoir, le triangle AIB.

Or ceci nous apprend que,

De tous les triangles construits sur une même droite AB, *et ayant même angle opposé à ce côté, le triangle isoscèle* AIB *est celui qui a le plus grand périmètre* (n° 58).

Deuxième cas. — Analyse. — Ainsi que dans le cas précédent, le sommet C du triangle (*fig.* 110) appartient à l'arc décrit sur AB, Fig. 110.
comme capable de l'angle donné M. — Si maintenant on prend sur CA une partie CD = CB, il ne s'agit, pour obtenir le point C sur ce segment, que de fixer la position du point D. Or, puisque l'on a CD = CB, il en résulte (n° 58) DBC = BDC;

d'où $$DBC + BDC = 2BDC,$$

et par suite (n° 58) $$2BDC + DCB = 2 \text{ droits};$$
donc
$$BDC = 1 \text{ droit} - \tfrac{1}{2}DCB = 1 \text{ droit} - \tfrac{1}{2}M;$$

ce qui donne pour ADB, supplémentaire de BDC,

$$\text{ADB} = 2dr. - (1dr. - \tfrac{1}{2}\text{M}) = 1dr. + \tfrac{1}{2}\text{M}.$$

On voit, d'après cela, que le point D est à l'intersection d'un second arc de cercle décrit sur AB comme capable de l'angle *obtus*, ($1dr. + \frac{1}{2}$M), et de la circonférence décrite du point A comme centre, avec un rayon égal à la *différence* donnée *d*.

Or je dis que, comme dans le premier cas, le centre de ce second arc n'est autre que le point I où la perpendiculaire élevée par le milieu de AB, rencontre la seconde partie de la circonférence dont l'arc capable de l'angle M est la première partie. —En effet, décrivons du point I comme centre, avec le rayon IA, une circonférence : l'angle *au centre* AIB est double de l'angle *inscrit* ALB, ce qui donne ALB $= \frac{1}{2}$ AIB. D'un autre côté, ce même angle AIB, considéré par rapport à la circonférence AIBH, est supplémentaire de AHB (nº 122) ou de l'angle M; on a donc AIB égal à ($2\,dr.$ — M). Ainsi l'angle ALB vaut ($1\,dr. - \frac{1}{2}$M); et par conséquent ADB, qui est le supplément de celui-ci, vaut

$$2\,dr. - (1dr. - \tfrac{1}{2}\text{M}), \quad \text{ou} \quad 1dr. + \tfrac{1}{2}\text{M}.$$

C. Q. F. D.

De là résulte la construction suivante :

Synthèse. — 1° — Sur AB *décrivons* un arc de cercle capable de l'angle M, et *achevons* la circonférence : la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB rencontre la partie AIB de cette circonférence en un certain point I; — 2° — de ce point comme centre, avec le rayon IA, *décrivons* une nouvelle circonférence, (en ne considérant que le segment situé du même côté que le premier, par rapport à AB); — 3° — du point A comme centre, avec le rayon *d*, *décrivons* un arc de cercle qui coupe le précédent au point D; — 4° — *tirons* la corde AD en la prolongeant jusqu'à sa rencontre en C avec le premier arc.

Le triangle ACB ainsi obtenu est le triangle demandé; ce qu'on démontrerait facilement en reprenant, dans un ordre inverse, les raisonnements de l'*analyse*.

SCOLIE. — Nous n'entrerons dans aucun détail sur la discussion de ce second cas; mais nous ferons remarquer que les deux parties du problème qui vient d'être résolu, offrent l'exemple d'une question où, par une première analyse, on est conduit à un mode de construction qui n'est pas le plus simple qu'on puisse donner, et que l'on parvient ensuite à simplifier par des considérations, souvent assez délicates, qui avaient échappé au premier abord.

§ III. — *Problèmes sur les contacts.*

PROBLÈME I. (*Fig.* 111 et 112.) FIG. 111 et 112.

N° **170.** — *Par un point donné* A *hors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle.*

[Le cas où le point est donné sur la circonférence n'offre aucune difficulté, puisqu'il suffit (n° **102**) d'élever une perpendiculaire à l'extrémité du rayon.]

ANALYSE. — Le point de contact [et par suite la tangente] serait déterminé si l'on pouvait trouver sur la circonférence un point M (*fig.* 111), tel qu'en le joignant aux points O et A, l'on eût au point M un angle *droit*. FIG. 111.

SYNTHÈSE. — 1° — *Menons* la droite OA; — 2° — sur cette droite comme diamètre (n° **153**, 1°) *décrivons* une circonférence qui rencontre la première en deux points, M, M'; — 3° — *tirons* les droites AM, AM'.

Nous obtenons ainsi *deux solutions* de la question.

Car les angles OMA, OM'A, sont droits (n° **123**); donc AM, AM', sont des tangentes au cercle (n° **102**).

DISCUSSION. — Le problème est évidemment toujours *possible* tant que le point donné est extérieur au cercle O, puisque, d'après la construction, les deux points O et A de la seconde circonférence sont, l'un *intérieur*, l'autre *extérieur* à la première (*voyez* le n° **136**).

Si le point donné était en A' sur la première circonférence, les

deux cercles se toucheraient au point A′, qui serait alors le point de contact.

Seconde construction. — Analyse. — En supposant le pro-
Fig. 112 blème résolu, prolongeons le rayon OM (*fig.* 112) qui passe par le point de contact, d'une longueur MC = MO, et menons les droites OA, CA : ces droites sont égales (nº 40), et l'on voit que le point C [dont la position une fois déterminée fera connaître facilement celle du point M], est à une distance du point O égale au double du rayon OM, et à une distance du point A égale à OA.

Synthèse. — 1° — *Tirons* la droite OA [que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en B avec le cercle donné]; — 2° — des points O et A comme centres, et avec les rayons respectifs 2OB ou A′B, et AO, *décrivons* deux circonférences qui se coupent en deux points C, C′; — 3° — *tirons* OC, OC′, qui rencontrent la circonférence donnée aux points M, M′; — 4° — enfin, *traçons* les droites AM et AM′ :

Ce sont les deux tangentes demandées.

En effet, les deux triangles AOC, AOC′ sont isoscèles; de plus, on a CM = MO, C′M′ = M′O; donc (nº 61) les droites AM, AM′, sont perpendiculaires aux rayons OM, OM′, et par conséquent tangentes au cercle.

Discussion. — Tant que le point donné A sera extérieur au cercle donné, les deux circonférences *décrites* se couperont nécessairement : en effet, le point O de la circonférence AO est évidemment *intérieur* à la *circonférence* 2OB; et il est facile de voir que, pour toute position du point A sur OA, pourvu que l'on ait OA > OA′, la circonférence AO aura un second point D, situé sur le prolongement de OA, *extérieurement* à la circonférence 2OB. Ainsi (nº 156) les deux cercles se couperont, et le problème sera *toujours possible*.

Si le point A est en A′ sur le cercle donné, les deux circonférences 2OB et A′O se toucheront en un certain point E pour lequel on a EA′ = A′O; et le point A′ est alors le point de contact.

N. B. — Le second mode de construction est, dans le fait,

plus simple que le premier, parce que les rayons des deux circonférences à décrire, 2OB et OA, sont donnés *à priori*; tandis que le premier mode exige que l'on détermine d'abord (n° 180) *le milieu* de la distance AO.

PROBLÈME II. (*Fig.* 113.) FIG. 113.

N° 171. — *Mener une tangente commune à deux cercles donnés.*

ANALYSE. — Soit MNC la tangente commune aux deux circonférences données; tirons les rayons OM, O'N, et par le point O' menons O'D parallèle à MC. — Cela posé, observons que les rayons OM, O'N, étant perpendiculaires à la tangente MC, sont parallèles; et comme O'D est aussi parallèle à MC, il s'ensuit que la figure DMNO' est un parallélogramme, et donne (n° 74) DM = O'N; ainsi OD est égal à *la différence des rayons* des deux cercles. En outre, la même figure DMNO' est un rectangle, puisque les angles en M et en N sont droits; donc la droite O'D est perpendiculaire à OD, et par conséquent tangente au cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à la différence des rayons donnés.

De là résulte la construction suivante :

SYNTHÈSE. — 1° — Du point O comme centre, avec un rayon égal à la différence des rayons des deux cercles donnés, *décrivons* une circonférence; — 2° — *menons* du point O' (n° 170) une tangente à cette circonférence; — 3° — *joignons* le centre O au point de contact D, et *prolongeons* la droite OD jusqu'en M; — 4° — *menons* du point O' le rayon O'N parallèle à OM (n° 184); — 5° enfin — *tirons* la droite MN :

Nous obtenons ainsi la tangente demandée.

En effet, d'après la construction, DM est égal et parallèle à O'N, puisque OD est la différence des rayons; donc (n° 74) la figure DMNO' est un parallélogramme, et de plus un rectangle, à cause de OD perpendiculaire sur O'D : ainsi la droite MN est perpendiculaire aux rayons OM, O'N; *donc*, etc.

N. B. — Comme, du point O', on peut mener deux tangentes

O'D, O'D', à la circonférence OD, on a également *deux* droites MN, M'N', pour *solutions* du problème.

SCOLIE. — Mais il est facile de voir que, dans le cas où les
FIG. 113. cercles sont extérieurs l'un à l'autre, comme dans la *fig.* 113, il existe encore *deux autres* solutions *mn*, *m'n'*, qu'on peut appeler des *tangentes intérieures*, comme rencontrant la ligne des centres entre les points O et O' en un point C'; tandis que les deux autres, MN, M'N', nommées *tangentes extérieures*, la rencontrent en un point C situé sur le prolongement de cette droite.

Pour obtenir ces deux autres solutions [l'analyse étant sous-entendue], — 1° — du point O comme centre, avec un rayon égal à la somme des rayons des deux cercles donnés, *décrivons* une circonférence; — 2° — *menons*, du point O', les deux tangentes O'*d*, O'*d'*; — 3° — *tirons* les rayons O*d*, O*d'*; — 4° — *menons* du point O' les rayons O'*n*, O'*n'*, parallèles à O*d*, O*d'*, ou aux rayons O*m*, O*m'*; — 5° enfin — *traçons* les droites *mn*, *m'n'* :

Nous aurons les deux tangentes demandées.

Même démonstration que ci-dessus.

Nous nous dispenserons de discuter ce problème, qui est évidemment susceptible de *quatre*, *trois*, *deux*, *une seule* solution, ou bien n'en admettre *aucune*, suivant celle des *cinq* positions relatives de deux circonférences, qui appartiendra aux cercles proposés.

FIG. 114.

PROBLÈME III. (*Fig.* 114.)

N° 172. — *Deux cercles* O, O', *étant tracés sur un plan, mener une transversale* MC, *telle, que chacune des parties* MN, mn, *de cette droite, comprises dans l'intérieur des circonférences, soit égale à une ligne donnée* a.

ANALYSE. — Supposons le problème résolu; et soit MN*mn*C la droite demandée. Traçons au hasard, dans les cercles donnés, deux autres cordes DE, *de*, égales entre elles et à la droite donnée *a*; puis des centres O, O', abaissons les perpendiculaires respectives OG, OI, et O'*g*, O'*i*, sur MN, DE, et *mn*, *de*.

Cela posé, puisque DE = MN = *de* = *mn*, on a (n° 109) OG=OI, O'*g* = O'*i*; de plus, les deux circonférences décrites des

points O, O′, comme centres, avec les rayons respectifs OG, Og, seront (n° 102) tangentes en G, I, et *g*, *i*, à ces cordes égales.

D'où résulte évidemment la construction suivante :

SYNTHÈSE. — Après avoir *pris* avec le compas, sur les deux circonférences, des cordes DE, *de*, égales à *a*, et *abaissé* (n° 149) les perpendiculaires OG, O′*g*, *décrivons* des points O, O′, comme centres, et avec les rayons respectifs OG, O′*g*, deux autres circonférences; *menons*-leur une tangente commune M*n*C (n° 170) : — Nous obtenons ainsi la droite demandée.

En effet, d'après la construction, les deux parties MN, *mn*, de cette tangente, comprises dans les cercles donnés, sont à même distance de leurs centres respectifs O, O′, que les cordes DE, *de*; on a donc

$$MN = DE = a, \text{ et } mn = de = a.$$

N. B. — Ce problème peut avoir, comme le précédent, *quatre*, *trois*, etc., solutions, suivant la position relative des deux circonférences; et, pour qu'il soit *possible*, *la droite donnée* doit évidemment *ne pas dépasser* le diamètre du plus petit cercle. Mais cela ne suffit pas encore, comme on pourrait le voir d'après une discussion plus développée.

SCOLIE. — Au problème Ier, et à celui-ci comme cas particulier, se rattache le suivant :

Par un point donné dans le plan d'un cercle, mener une droite qui le coupe de telle manière que la partie de cette droite, interceptée par le cercle, soit égale à une ligne donnée.

Après avoir *tracé* dans le cercle une corde égale à la ligne donnée, *décrivons*, comme dans le problème précédent, une circonférence tangente à cette corde; puis *menons*, du point donné, une tangente à ce nouveau cercle : nous aurons la droite demandée.

Ce problème offre une discussion assez intéressante que nous nous dispenserons toutefois d'exposer ici, nous bornant à observer que, dans le cas où le point donné est intérieur, la question, pour être *possible*, exige que la droite donnée soit comprise entre deux limites, — 1° — le diamètre du cercle, — 2° — la

corde perpendiculaire à la droite menée du centre au point donné. (*Voyez* le n° 112.)

Fig. 60.

Problème IV. (*Fig.* 60.)

N° 173. — *Décrire un cercle tangent à trois droites données* de position sur un plan.

La résolution de ce problème est une conséquence immédiate des théorèmes établis aux n°s 95 et 127 :

Construisons (n° 153, scolie I) les bissectrices des deux angles CAB, CBA; puis du point O, où ces droites se rencontrent nécessairement (n° 34), *abaissons* une perpendiculaire sur AB ; et de ce même point comme centre, avec un rayon égal à cette perpendiculaire, *décrivons* un cercle : sa circonférence sera tangente aux trois côtés du triangle ABC, puisque (n° 127) les perpendiculaires abaissées du point O sur ces côtés, sont égales entre elles.

Mais on peut encore obtenir d'autres solutions du problème, en traçant, par exemple, les bissectrices des angles BCL, CBI, respectivement supplémentaires des angles C et B du triangle.

On trouverait ainsi, en général, *quatre* solutions, savoir : un cercle *intérieur* au triangle déterminé par les trois droites, et que l'on nomme, pour cette raison, *le cercle inscrit;* puis trois autres cercles *extérieurs* à ce triangle, que l'on désigne sous le nom de cercles *ex-inscrits.*

Lorsque deux des trois droites données sont parallèles, il ne peut exister que *deux* solutions.

Dans le cas général, les centres des quatre cercles et les sommets du triangle forment 6 systèmes de *trois points* situés *sur une même ligne droite;* et ces 6 *lignes droites* sont *perpendiculaires* 2 à 2.

Il suffit d'exécuter en entier la construction pour se rendre compte de ces propriétés.

Fig. 115.

Problème V. (*Fig.* 115.)

N° 174. — *Tracer une circonférence qui touche une droite donnée* LM *en un point donné* B, *et qui passe par un second point donné* hors de la droite.

Il est évident que le centre du cercle cherché doit se trouver à

la rencontre de la perpendiculaire élevée par le point B sur LM, avec la perpendiculaire menée sur AB par son milieu C.

SYNTHÈSE. — *Construisez* ces deux perpendiculaires (n°s 149, 150); et du point O où elles se coupent, avec le rayon OA ou OB, *décrivez* une circonférence : vous aurez ainsi le cercle cherché.

Ce problème est toujours *possible*, et n'admet qu'*une solution*.

Si les points A et B étaient donnés sur une même perpendiculaire à LM, le centre se trouverait au milieu de la distance AB.

PROBLÈME VI. (*Fig.* 116.)

FIG. 116.

N° 175. — *Décrire un cercle qui touche une droite donnée* LM *et une circonférence donnée* O, *connaissant le point* I *de contact avec la droite.*

On reconnaîtrait aisément par l'*analyse*, que ce problème peut être ramené au précédent.

SYNTHÈSE. — En supposant d'abord que le cercle cherché doive être extérieur au cercle O,

1° — *élevons* au point I une perpendiculaire indéfinie IK; — 2° — *prenons* sur IK, et du côté de la droite LM opposé au point O, une partie II′ égale au rayon OB du cercle donné; — 3° — *menons* par le point I′ la droite L′M′ parallèle à LM; — 4° — *déterminons* (n° 174) le centre O′ d'un cercle passant par le point O et tangent à L′M′ au point I′; — 5° enfin, — de ce point O′ comme centre, et avec le rayon O′I, *décrivons* un cercle.

Ce cercle sera tangent en même temps à la droite LM et au cercle O.

D'abord, il est tangent à LM, puisque le rayon O′I est perpendiculaire à cette droite.—En second lieu, la *distance des centres* O′O, étant égale à O′I′ par construction, se compose du rayon O′I augmenté du rayon OB, c'est-à-dire, est *égale à la somme des deux rayons :* donc les deux cercles se touchent en un certain point C.

N. B. — La discussion de ce problème offre quelque intérêt sous le rapport du *nombre des solutions* dont il est susceptible,

suivant les positions relatives du cercle donné, de la droite donnée, et du point donné. — On peut avoir un cercle *tangent extérieurement* au cercle donné, ou *enveloppant* ce cercle, ou bien un cercle *intérieur* au cercle donné.

FIG. 117.

PROBLÈME VII. (*Fig.* 117.)

N° 176. — *Décrire un cercle qui touche une droite donnée* AB *et une circonférence donnée* O, *connaissant le point* C *de contact avec la circonférence.*

Menons au point C la tangente LM; et *prolongeons* le rayon OC jusqu'à sa rencontre en O′ avec la *bissectrice* MK de l'angle LMB:

Le point O′ pourra être pris pour centre d'un cercle tangent à la droite AB en un certain point, ainsi qu'à la droite LM au point C, et par conséquent aussi au cercle donné.

N. B. — Ce problème est susceptible de *deux* solutions, dont la seconde s'obtient en menant la *bissectrice* MK′ de l'angle supplémentaire LMA.

FIG. 118.

PROBLÈME VIII. (*Fig.* 118.)

N° 177. — *Décrire un cercle qui touche en un point donné* A *une circonférence donnée* OA, *et qui passe par un second point* donné B [extérieur ou intérieur à cette circonférence].

ANALYSE et SYNTHÈSE réunies. — *Joignons* d'abord le point O au point A: le centre du cercle cherché doit se trouver sur la droite indéfinie OAL. — Puis, sur le milieu de AB ou AB′, *élevons* la perpendiculaire IK ou I′K′: les deux droites OL et IK, ou OL et I′K′, se rencontrent nécessairement (n° 80) en un point O′ ou O″. — Enfin, de ce point comme centre et avec le rayon O′A ou O″A, *décrivons* une circonférence qui touchera le cercle donné *extérieurement* ou *intérieurement*, suivant que le point donné sera *extérieur* ou *intérieur* à la circonférence O, et qui passera en même temps, soit par le point A, soit par le point A′.

N. B. — Le problème est *toujours possible*. — Toutefois, si le

point donné B ou B′, et le point A, étaient placés sur une même perpendiculaire à OL, le cercle cherché se réduirait à la tangente AB.

PROBLÈME IX. (*Fig.* 119.) FIG. 119.

N° 178. — *Décrire un cercle d'un rayon donné qui touche une droite donnée* AB *et une circonférence donnée* O.

Il est facile de reconnaître que le centre O′ du cercle cherché doit se trouver sur une parallèle, A′ B′, à la droite AB, menée à une distance de cette droite, égale au rayon donné, et sur une circonférence concentrique au cercle donné, décrite d'un rayon R′ égal à la somme ou à la différence des deux rayons, suivant le mode de tangence. — Ce centre une fois déterminé, le cercle pourra ensuite être décrit, puisque l'on connaît son rayon, R′.

Il y aura généralement *quatre* solutions, quand la droite donnée sera *extérieure* ou *tangente* au cercle donné. — Il pourra y en avoir jusqu'à *huit*, quand la droite coupera la circonférence R. — Mais le nombre de ces solutions est susceptible, suivant les circonstances, de se réduire beaucoup, et même de devenir tout à fait *nul*.

PROBLÈME X. (*Fig.* 120.) FIG. 120.

N° 179. — *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui touche deux circonférences données* O *et* O′.

En se bornant à la construction du cercle qui doit être *extérieur* aux deux cercles donnés, il faut, pour l'obtenir, *décrire* des points O, O′, comme centres, avec des rayons respectivement égaux à (R + R″), (R′ + R″) [R, R′, R″, désignant les rayons des cercles donnés et du cercle cherché], deux circonférences qui se couperont généralement en deux points O″, O‴; et ces points seront les centres de *deux* cercles ayant pour rayon R″ et satisfaisant également à la question.

Scolie général *sur les contacts.*

N° 180. — Nous avons cru devoir abréger l'analyse, la synthèse, et la discussion des derniers problèmes, parce que ces diverses parties de la solution, la *discussion* surtout, exigeraient beaucoup de détails. Il faudrait, en effet, avoir égard, non-seulement à la position relative des lignes données, mais encore au *nombre des solutions* dont la question est susceptible, ainsi qu'aux diverses conditions sous lesquelles ces solutions peuvent exister.

Nous ferons seulement observer que, quand deux cercles sont donnés de position sur un plan, on peut avoir diverses sortes de cercles qui leur soient tangents, savoir : des cercles *extérieurs à l'un et à l'autre*, des cercles *extérieurs à l'un* et *enveloppant* l'autre, ce qui donne deux combinaisons, des cercles *enveloppant l'un et l'autre*, des cercles *intérieurs* à l'un et à l'autre, etc. — D'où il suit que, dans les différents *modes de construction* à employer, il faut avoir continuellement présente à l'esprit la condition de contact de deux circonférences, savoir : *La distance des centres égale à la somme ou à la différence des rayons*, suivant que le contact doit être *extérieur* ou *intérieur*.

Nous ajouterons que, si un grand nombre de problèmes sur les contacts peuvent se résoudre à l'aide des principes établis jusqu'à présent, il en est une foule d'autres qui supposent la connaissance de certaines *relations numériques* entre les données et les inconnues. Or ces relations ne peuvent être développées et démontrées que dans le *second livre*, ou dans l'*appendice* aux deux premiers livres.

LIVRE DEUXIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS UN PLAN.

INTRODUCTION. — Ainsi que nous l'avons déjà dit (nº 23), ce livre sera, comme le premier, divisé en *trois* chapitres, dont l'un traitera des *lignes proportionnelles*, de la *similitude*, de la détermination des *aires* et de leur *comparaison* dans les figures *rectilignes*; le deuxième, des *lignes proportionnelles* considérées dans le cercle, de la détermination des *aires circulaires*, et du *rapport de la circonférence au diamètre*; le troisième, enfin, sera consacré à la résolution des *problèmes*.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉTENDUE DANS LES FIGURES RECTILIGNES.

§ I. — *Des lignes proportionnelles.*

THÉORÈME I. (*Fig.* 121.) FIG. 121.

Nº 181. — *Deux droites indéfinies*, LM, L'M', *étant tracées sur un plan, si, sur la première*, LM, *on prend des distances consécutives égales entre elles*, AB, BC, CD,..., *et que par les points de division*, A, B, C, D,..., *l'on mène des parallèles dans une direction arbitraire, ces parallèles détermineront sur l'autre droite*, L'M', *des parties*, A'B', B'C', C'D',..., *aussi égales entre elles.*

Cette proposition renferme, comme cas particulier, le théorème ou plutôt la réciproque du théorème établi au *numéro* 81; et elle se démontre d'une manière tout à fait analogue.

Par les points A, B, C, D,..., menons les droites A*a*, B*b*,

Cc,..., parallèles à L′M′, et terminées respectivement aux droites BB′, CC′, DD′,...; nous obtenons ainsi une série de triangles, ABa, BCb, CDc,..., tous égaux entre eux, comme ayant un côté égal, AC = BC = CD = ..., adjacent à des angles égaux chacun à chacun; d'où l'on déduit Aa = Bb = Cc = Dd = ..., et par suite A′B′ = B′C′ = C′D′ = D′E′ = ... (n° 72).

Fig. 122.

Théorème II. (*Fig.* 122.)

N° 182. — *Dans tout trapèze* ABDC, *une droite quelconque*, EF, *menée parallèlement aux deux bases, divise les côtés latéraux* (n° 81) *en segments directement proportionnels;* — c'est-à-dire que l'on a

AE : EB :: CF : FD.

Supposons d'abord que les segments AE, EB, soient *commensurables* entre eux, et que l'on ait, par exemple,

AE : EB :: 7 : 11;

je dis que les deux autres segments CF, FD, sont aussi dans le même rapport.

Pour le prouver, concevons la droite entière AB divisée en (7+11) ou 18 parties égales, et menons par les points de division des parallèles à BD: la droite CD se trouvera elle-même divisée en 18 parties égales (n° 181), dont 7 seront contenues dans CF, et 11 dans FD. On a donc également

CF : FD :: 7 : 11.

Maintenant, soient AE, EB, *incommensurables* entre eux; et désignons (n° 118) par $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''},\ldots$, les valeurs approchées successives du rapport de AE à EB. Nous allons prouver que ces mêmes nombres sont aussi, au même degré d'approximation, les valeurs approchées successives du rapport de CF à FD: et alors la proposition sera démontrée généralement.

Divisons le segment BE en n parties égales, et portons l'une de ces parties m fois sur le segment EA; puis, par tous les points

de division, menons des parallèles à BD. — Comme, par hypothèse, le rapport de AE à EB, est compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, il s'ensuit que le segment EA, outre les m parties qui ont été portées, contient un reste moindre que chaque partie. — De même, en considérant la droite CD, on a, sur DF, n parties égales (nº 181), et sur FC, m de ces parties, avec *un reste* qui doit être nécessairement moindre que chaque partie; d'où il résulte que le rapport de CF à FD est compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$; ce qui prouve que $\frac{m}{n}$ représente les rapports de AE à EB, et de CF à FD, avec le même degré d'approximation.

Un raisonnement analogue s'appliquerait aux autres nombres, $\frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$ — Donc, etc.

Théorème III. (*Fig.* 123.) Fig. 123.

Nº 183. — *Dans un triangle quelconque,* ABC, *toute droite,* DE, *menée parallèlement à l'un des côtés,* BC, *divise les deux autres côtés en parties directement proportionnelles;* — [c'est-à-dire que l'on a

$$AD : DB :: AE : EC].$$

Menons par le point A une parallèle à BC, puis par un point quelconque, G, de cette parallèle, la droite GK parallèle à AB; et prolongeons DE jusqu'en F. — On a, d'après le théorème précédent,

$$AD : DB :: GF : FK;$$

mais, à cause des parallèles AC, GK, $GF = AE$, $FK = EC$; donc aussi

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Réciproquement : — *Si une droite* DE *divise deux des côtés d'un triangle en parties directement proportionnelles, cette droite est parallèle au troisième côté.*

Car, si cela n'était pas, on pourrait mener par le point D une

autre droite, DI, parallèle à BC; ce qui donnerait, d'après la proposition directe,

AD : DB :: AI : IC;

mais, par hypothèse,

AD : DB :: AE : EC;

donc, à cause du rapport commun,

AI : IC :: AE : EC, ou AI : AE :: IC : EC,

résultat absurde, puisque l'on a

$AI < AE$, et $IC > EC$.

N° 184. — Scolie I. — Quoique ce théorème soit un corollaire presque immédiat du théorème II, nous avons cru devoir le faire ressortir comme proposition principale, non-seulement à cause de son importance propre, mais encore pour les nombreuses conséquences que l'on en peut tirer dès à présent, et qui seront d'un usage continuel dans la suite.

Corollaire. — De la proposition

AD : DB :: AE : EC,

on déduit, en se fondant sur les propriétés des proportions,

AD + DB : AD : DB :: AE + EC : AE : EC,

ce qui donne les deux nouvelles proportions

AB : AD :: AC : AE, et AB : DB :: AC : EC.

Réciproquement, si une droite DE est menée de telle manière que l'on ait

AB : AD :: AC : AE,

comme on déduit de là

AB — AD : AD :: AC — AE : AE,

ou bien

BD : AD :: EC : AE, ou AD : DB :: AE : EC,

il s'ensuit que la droite DE est parallèle à BC (n° 183, *récip.*).

N° 185. — Scolie II. — Quand on veut appliquer à la proportion

$$AD : DB :: AE : EC,$$

la propriété fondamentale des proportions, on est conduit à l'égalité

$$AD \times EC = DB \times AE.$$

Or, pour comprendre le sens qu'on doit attribuer à ces mots : *le produit de deux lignes*, $AD \times EC$, ou $DB \times AE$, il faut supposer que les droites AD, EC, DB, AE, aient été rapportées à une même *unité linéaire*; et au lieu de lignes proprement dites, on n'a plus à considérer, en réalité, que des *nombres abstraits* exprimant les rapports de ces lignes à leur unité, nombres que l'on peut alors *multiplier* entre eux. On devra donc, comme en arithmétique, attacher au mot *produit* l'idée de la multiplication de deux nombres.

Nous serons également conduits, par la suite, à multiplier *une surface par une ligne*, *une surface par une surface*, et même *un volume par un volume*, etc. Mais, par toutes ces expressions, il faudra toujours entendre qu'on *multiplie* entre eux *les rapports* de ces grandeurs géométriques à leurs *unités* respectives.

D'après cela, que l'on ait à *multiplier une droite* AB *par elle-même*, on écrira $AB \times AB$, ou, pour abréger, AB^2; et cette expression représentera le *carré* ou plutôt la *seconde puissance* du nombre abstrait qui représente le rapport de la droite à son unité.

De même, $2AB^2$, $3AB^2$,..., exprimeront *le double, le triple*,... de la seconde puissance de AB.

De même encore, $\sqrt{AB \times CD}$, $\sqrt{AB^2 + CD^2}$,..., seront les *racines carrées* des nombres abstraits exprimés par $AB \times CD$, $AB^2 + CD^2$,..., et ainsi de suite.

Les commençants ne sauraient faire trop d'efforts pour se familiariser avec ces notations, qui seront d'un usage continuel dans le second livre.

§ II. — *Caractères et propriétés des figures semblables.*

N° 186. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — Il n'est personne qui n'ait une idée de la *similitude* ou de la *ressemblance* : ainsi, par les mots *figures semblables*, tout le monde entend sur-le-champ deux figures dont l'une est *en petit* ce que l'autre est *en grand* ; c'est-à-dire deux figures telles qu'il n'est aucun point de l'une qui n'ait dans l'autre son *correspondant*, ou, comme on s'exprime en *Géométrie*, son *homologue* ; de sorte que si, par la pensée, on mène de toutes les manières possibles des droites qui lient deux à deux tous les points de la première figure, puis, que l'on exécute la même opération pour la seconde figure, les rapports numériques de chaque couple de lignes homologues seront tous égaux entre eux. — Ce rapport commun se nomme le *rapport de similitude* des deux figures.

Or, comme la théorie suivante le fera voir, toutes ces conditions, qui paraissent être en nombre infini, se réduisent cependant, en définitive, à un petit nombre de conditions réellement différentes. — On conçoit, en effet, que la détermination complète d'une figure d'*une espèce donnée*, se ramenant toujours [ainsi qu'on l'a vu dans le second paragraphe du chapitre précédent] à la détermination de certaines *lignes principales* desquelles dépendent toutes les autres, il doit en résulter que le nombre des rapports dont il est nécessaire d'établir l'égalité, n'est autre que le nombre même de ces lignes principales.

D'après cette considération, et vu l'impossibilité de s'assurer directement si toutes les lignes correspondantes que l'on peut concevoir dans deux figures, sont proportionnelles, on adopte d'abord une *définition géométrique* restreinte et purement *conventionnelle*, qui ne porte que sur les éléments nécessaires à la détermination de chaque figure, et cela d'abord pour *les triangles* ensuite pour *les polygones quelconques*, sauf à montrer plus tard que les figures qui satisfont à cette définition sont *semblables* dans le sens général indiqué plus haut.

N° 187. — Cela posé, un triangle étant déterminé par ses trois côtés (n° 160), nous dirons que

Deux triangles, ABC, A′B′C′ (*fig.* 124), *sont semblables lorsqu'ils ont les côtés proportionnels;* — c'est-à-dire lorsqu'on a Fig. 124

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

Ensuite, tous les polygones étant décomposables en triangles, et de plus, un polygone étant déterminé quand on connaît un assemblage de triangles qui le composent, il s'ensuit que

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer [d'une manière quelconque (n° 83)] *en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et assemblés de la même manière;* — cette dernière expression devant être prise dans le même sens qu'au *numéro* 92.

Telle est la définition géométrique des polygones semblables, réduite aux seules conditions strictement nécessaires; et il s'ensuit que la théorie de la similitude des figures planes quelconques se ramène entièrement et dans tous les cas, à celle des triangles semblables.

N° 188. — Nous avons défini plus haut (n° 186) les *points homologues*, en nous contentant de dire que l'on nommait ainsi les points *correspondants;* et cette définition est suffisamment intelligible. Cependant, pour mettre plus de rigueur dans nos expressions, nous devons donner aussi une définition géométrique du mot *homologue*, employé soit pour les *points*, soit pour les *lignes*, soit pour les *angles*.

D'abord, pour les triangles, les CÔTÉS HOMOLOGUES sont ceux dont le rapport n'est autre que le *rapport de similitude* (n° 186) des deux triangles. — Ainsi, dans les triangles semblables ABC, A′B′C′ (*fig.* 124), comme on a, par hypothèse, Fig. 124

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',$$

les côtés AB, A′B′ sont des côtés *homologues;* et il en est de même des côtés AC, A′C′, et des côtés BC, B′C′.

Maintenant, pour les polygones,

1° — Les CÔTÉS HOMOLOGUES sont des côtés *homologues* des dif-

férents triangles semblables qui composent ces polygones, d'après la définition (n° 187);

2° — Les SOMMETS HOMOLOGUES sont les sommets communs à des couples de côtés *homologues;*

3° — Les ANGLES HOMOLOGUES sont ceux que forment des couples de côtés *homologues;*

4° — Les DIAGONALES HOMOLOGUES sont celles qui joignent des sommets *homologues;*

5° — Généralement, on donne le nom de *points homologues* à des points placés de la même manière sur les plans des deux polygones, c'est-à-dire des points liés à des côtés *homologues* par des triangles semblables [et pareillement disposés];

6° — Enfin, on nomme LIGNES HOMOLOGUES les droites qui joignent des couples de points *homologues* quelconques.

N° 189. — Il est facile de conclure des principes établis ci-dessus, que l'égalité des polygones n'est qu'un cas particulier de leur similitude; et cette proposition sera prouvée généralement, si on peut la démontrer pour deux triangles. Or, en reprenant la

FIG. 124. relation posée plus haut (n° 187, *fig.* 124),

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C',$$

si l'on y fait $AB = A'B'$, on en tire aussi $AC = A'C'$, $BC = B'C'$; donc alors les deux triangles sont égaux entre eux, comme ayant les côtés égaux chacun à chacun.

Ainsi — *Deux triangles,* — et par suite — *deux polygones semblables, sont égaux lorsqu'ils ont un côté homologue égal.*

On peut encore voir facilement que

Deux triangles, ABC, A'B'C', *semblables à un troisième,* A''B''C'', *sont semblables entre eux.*

Car, des deux relations supposées,

$$\frac{AB}{A''B''} = \frac{AC}{A''C''} = \frac{BC}{B''C''},$$

et

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{A'C'}{A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''},$$

on déduit, en divisant ces relations membre à membre,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

donc les deux triangles ABC, A'B'C', sont semblables.

Donc aussi, d'après la définition (n° 187),

Deux polygones semblables à un troisième sont semblables entre eux.

N° 190. — Enfin, pour faciliter l'étude des propriétés des figures semblables, nous supposerons que les deux polygones aient été disposés dans leur plan, de manière que *deux côtés homologues* soient *parallèles et de même sens;* ce qui est toujours permis d'après le lemme établi au n° 62. Par ce moyen, les points, les lignes, les angles *homologues* se trouveront naturellement disposés de la même manière dans les deux polygones.

Commençons par les triangles.

Propriétés des triangles semblables.

LEMME. (*Fig.* 125.) FIG. 125.

N° 191. — *Toute droite* DE, *menée parallèlement à l'un des côtés d'un triangle* ABC, *détermine un second triangle* ADE *semblable au premier;*

[c'est-à-dire que l'on a

AB : AD :: AC : AE :: BC : BE].

En effet, puisque DE est parallèle à BC, on a d'abord (n° 184, *scol.* I),

AB : AD :: AC : AE.

Traçons ensuite EF parallèle à AB; on a (*même scol.*)

AC : AE :: BC : BF ou DE;

donc, en formant une seule suite de rapports égaux,

AB : AD :: AC : AE :: BC : DE.

Fig. 124.

Théorème I. (*Fig.* 124.)

N° 192. — *Deux triangles semblables* ABC, A′B′C′ [c'est-à-dire qui ont les côtés proportionnels], *ont leurs angles homologues égaux chacun à chacun.*

Prenons sur AB une partie AB″ = A′B′, et menons B″C″ parallèle à BC; les deux triangles A′B′C′, AB″C″, étant, chacun, semblables à ABC, l'un par hypothèse, l'autre en vertu du lemme précédent, sont semblables entre eux (n° 189); et comme on a, par construction, AB″ = A′B′, ces mêmes triangles sont égaux (*même* n°). Or, à cause du parallélisme des droites BC, B″C″, les angles du triangle AB″C″ sont, chacun à chacun, égaux aux angles du triangle ABC, c'est-à-dire que l'on a, l'angle A commun, B″ = B, C″ = C; donc aussi

$$A' = A,\ \ B' = B,\ \ C' = C.$$

N. B. — On voit, par la nature même de la démonstration, que les *angles égaux* dans les deux triangles, sont opposés à des *côtés homologues.*

Fig. 124.

Théorème II. (*Fig.* 124.)

N° 193. — Réciproquement: — *Deux triangles*, ABC, A′B′C′, *qui ont les angles égaux chacun à chacun, sont semblables;* — et les *côtés opposés* aux angles égaux sont des côtés *homologues.*

Soient A = A′, B = B′, C = C′. Prenons, comme ci-dessus, AB″ = A′B′, puis menons B″C″ parallèle à BC. — Les deux triangles A′B′C′, AB″C″, sont égaux comme ayant un côté égal, A′B′ = AB″, adjacent à des angles égaux chacun à chacun, savoir : A′ = A, B′ = B = B″. Or, le triangle AB″C″ est semblable au triangle ABC (n° 191); donc aussi les deux triangles A′B′C′, ABC, sont semblables; et l'on a la suite de rapports égaux

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'.$$

N. B. — Les côtés homologues AB et A′B′, AC et A′C′, BC et B′C′, sont, comme on le voit, *opposés* à des angles égaux C′ = C, B′ = B, A′ = A.

THÉORÈME III. (Sans figure.)

N° 194. — *Deux triangles sont semblables lorsque les côtés de l'un sont parallèles ou perpendiculaires aux côtés de l'autre, chacun à chacun;* — et les *côtés homologues* sont les côtés *parallèles* ou *perpendiculaires.*

D'après le théorème précédent, tout se réduit à prouver que ces triangles ont les angles égaux chacun à chacun.

Soient AB et A′B′, AC et A′C′, BC et B′C′, respectivement parallèles ou perpendiculaires; je dis que l'on doit avoir

$$C = C', \quad B = B', \quad A = A'.$$

En effet, nous savons déjà (n° 70) que les angles C et C′, B et B′, A et A′, ne peuvent être qu'égaux ou supplémentaires. Or, en premier lieu, on ne saurait admettre que les *six* angles soient supplémentaires deux à deux; car alors on aurait

$$A + A' + B + B' + C + C' = 6 \textit{ droits},$$

ce qui est *absurde* (n° 88).

On ne peut admettre non plus que *quatre* angles seulement, par exemple, A et A′, B et B′, soient supplémentaires deux à deux, car il en résulterait

$$A + A' + B + B' = 4 \textit{ droits},$$

ce qui est également *absurde.*

Il faut donc nécessairement que deux angles au moins du premier triangle soient égaux à deux angles du second, chacun à chacun; et par conséquent (n° 88) que le troisième angle du premier triangle soit égal au troisième angle du second. Ainsi l'on a

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C';$$

d'où (n° 193) la suite de rapports égaux,

$$BC : B'C' :: AC : A'C' :: AB : A'B'.$$

N. B. — Les côtés *homologues* BC et B′C′, AC et A′C′, AB et A′B′, sont les côtés *parallèles* ou *perpendiculaires* entre eux.

FIG. 124 THÉORÈME IV. (*Fig.* 124.)

N° 195. — *Deux triangles,* ABC, A′B′C′, *sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

Supposant que l'on ait

$$A = A', \quad \text{et} \quad AB : A'B' :: AC : A'C',$$

prenons sur AB, AC, deux parties AB″ = A′B′, AC″ = A′C′; puis, tirons la droite B″C″. Les deux triangles A′B′C′, AB″C″, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Or on a, par hypothèse, AB : A′B′ :: AC : A′C′, et par conséquent, AB : AB″ :: AC : AC″; donc (n° 183, *récip.*) B″C″ est parallèle à BC; et le triangle AB″C″ est semblable à ABC (n° 191); donc aussi A′B′C′ est semblable à ABC.

SCOLIE. — Les quatre théorèmes qui précèdent constituent les cas *principaux* de la similitude des triangles. — Il en est encore un autre qui correspond au quatrième cas d'égalité (n° 159), et qu'on peut énoncer ainsi :

Deux triangles sont semblables lorsque deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre, et que, des quatre angles respectivement opposés à ces côtés, deux sont égaux, et les deux autres sont de même espèce.

Mais ce cas se présente rarement dans les applications.

Des polygones semblables.

FIG. 126. THÉORÈME V. (*Fig.* 126.)

N° 196. — *Deux polygones semblables,* ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, *ont les côtés homologues proportionnels, et les angles homologues égaux chacun à chacun.*

Car, — 1° — de la similitude des triangles ABC et A′B′C′, ACD et A′C′D′, ADE et A′D′E′,..., on déduit les suites de rapports égaux,

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C' :: \ldots,$$
$$AC : A'C' :: AD : A'D' :: CD : C'D' :: \ldots,$$
$$AD : A'D' :: AE : A'E' :: DE : D'E' :: \ldots,$$
. . . .

ou, omettant les rapports communs à ces suites,

AB : A′B′ :: BC : B′C′ :: CD : C′D′ :: DE : D′E′ :: ......

2° — De cette même similitude, on déduit l'égalité des angles des triangles (nº 192), et par suite celle des angles respectifs des deux polygones, angles qui ne sont que des assemblages d'angles partiels égaux chacun à chacun : [par exemple,

DCB = D′C′B′, puisque ACB = A′C′B′, ACD = A′C′D′].

Ainsi l'on a A = A′, B = B′, C = C′, D = D′,.... ;
C. Q. F. D.

Nº 197. Scolie. — Nous ferons ici deux remarques importantes : La *première*, c'est que, dans le cas où, comme nous l'avons supposé, deux côtés homologues, AB, A′B′, sont parallèles et de même sens, tous les autres *côtés homologues* BC et B′C′, CD et C′D′, DE et D′E′,... sont aussi *parallèles et de même sens*; et il en est de même des *diagonales homologues* AC et A′C′, AD et A′D′,...

C'est une conséquence nécessaire de l'égalité des angles homologues dans les deux polygones et dans les différents triangles. (*Voyez* d'ailleurs ce qui a été dit au nº 62.)

La *seconde* remarque, c'est que la démonstration exposée plus haut n'est pas particulière au mode de décomposition employé dans la figure actuelle ; mais elle s'appliquerait également à tout autre mode de décomposition des deux polygones en triangles. (*Voyez* nº 83.)

Théorème VI. (*Fig.* 126.) Fig. 126.

Nº 198. Réciproquement : — *Deux polygones sont semblables lorsqu'ils ont les côtés* [disposés dans le même ordre] *proportionnels, et les angles* [aussi disposés dans le même ordre] *égaux chacun à chacun ;* c'est-à-dire lorsque l'on a

AB : A′B′ :: BC : B′C′ :: CD : C′D′ :: ....,

et A = A′, B = B′, C = C′, D = D′,...

[L'expression *disposés dans le même ordre* offrira un sens net à l'esprit si l'on observe que, les deux côtés AB, A'B', étant mis dans la position de deux droites parallèles et de même sens (nº 190), tous les côtés supposés proportionnels sont nécessairement parallèles et de même sens; ce qui doit résulter de l'égalité supposée des angles A et A', B et B', ...]

Pour démontrer la proposition, concevons les deux polygones décomposés en triangles par des droites menées des sommets de deux angles égaux, A et A'. — On a d'abord deux triangles, ABC, A'B'C', semblables entre eux (nº 198), comme ayant un angle égal, B = B', compris entre côtés proportionnels, AB, A'B', BC, B'C'; d'où il résulte

angle ACB = *angle* A'C'B', et AC : A'C' :: BC : B'C',

ou, en vertu de l'énoncé, AC : A'C' :: CD : C'D'.

Maintenant, si l'on compare les deux triangles ACD, A'C'D', on voit que les angles ACD, A'C'D', sont égaux comme différences entre des angles égaux, BCD et B'C'D', ACB et A'C'D'; de plus,

on a AC : A'C' :: CD : C'D',

comme on vient de le voir. Donc ces triangles sont encore semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; et ainsi de suite pour tous les couples de triangles, ADE et A'D'E', AEF et A'E'F'.

Donc enfin les deux polygones sont semblables (nº 187).

FIG. 127. THÉORÈME VII. (*Fig.* 127.)

Nº 199. — *Dans deux polygones semblables, les lignes homologues sont proportionnelles aux côtés homologues.*

Soient PQ, P'Q', deux droites menées par des points homologues P et P', Q et Q'.

D'après la définition des lignes homologues (nº 188), les points P et P', Q et Q', sont liés à deux côtés homologues [AB et A'B' par exemple], par *deux couples* de triangles semblables et disposés de la même manière, PAB et P'A'B', QAB et Q'A'B'; d'où l'on

peut conclure, comme dans le numéro précédent, la similitude des deux triangles PBQ, P′B′Q′, et par suite la proportion

$$PQ : P'Q' :: BP : B'P',$$

ou, à cause de $\quad BP : B'P' :: AB : A'B',$

$$PQ : P'Q' :: AB : A'B';$$

C. Q. F. D.

SCOLIE I. — Comme cas particulier du théorème précédent, prenons sur les côtés homologues AF et A′F′, BC et B′C′, deux points, M, N, qui divisent ces droites *en parties* [directement] *proportionnelles*, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$AM : A'M' :: AF : A'F' \quad \text{et} \quad BN : B'N' :: BC : B'C';$$

les points M et M′, N et N′, formeront encore deux couples de points homologues; et je dis que l'on a

$$MN : M'N' :: AB : A'B'.$$

Cela résulte évidemment de la comparaison des triangles semblables AMN et A′M′N′, ABN et A′B′N′.

SCOLIE II. — Si, dans l'énoncé du théorème n° 89 (*fig.* 58), FIG. 58. les droites AF, A′F′, au lieu d'être égales, sont entre elles dans un rapport quelconque $m : n$, et que les distances respectives AE et A′E′, AD et A′D′, . . ., BE et B′E′, BD et B′D′, . . ., soient aussi entre elles dans le même rapport $m : n$, on obtiendra alors deux polygones ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, non plus égaux, mais *semblables entre eux*.

Nous nous dispenserons de donner ici la démonstration de ce nouveau théorème; car elle se déduirait facilement de tout ce qui vient d'être dit.

N° 200. — SCOLIE GÉNÉRAL *sur les polygones semblables*.

Nous terminerons cette théorie par une remarque sur le *nombre total* des conditions strictement nécessaires pour que deux polygones de n côtés soient *semblables*.

Puisqu'on passe du cas d'égalité de deux polygones au cas de

similitude, en supposant que deux côtés homologues, au lieu d'être *égaux*, soient entre eux *dans un rapport quelconque* (*scol.* précédent, et nº 189, 1re *pr.*), il s'ensuit que, le nombre des conditions relatives à l'égalité étant, comme nous l'avons vu (nº 90), exprimé par $(2n - 3)$, le nombre des conditions nécessaires pour la similitude, sera $(2n - 4)$.

C'est ainsi que, pour les triangles, la relation

$$AB : A'B' :: AC : A'C' :: BC : B'C'$$

équivaut aux *deux* conditions $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Toutefois, lorsqu'on donne *l'espèce* des polygones, le nombre de ces conditions peut être considérablement restreint.

Ainsi, pour le *parallélogramme*, il suffit de *deux* conditions: par exemple: — *Deux parallélogrammes sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels* [$A = A'$, et $AB : A'B' :: AC : A'C'$].

Pour le *losange*, il ne faut qu'*une* condition [*angle* A = *angle* A', par exemple].

Tous les carrés sont des figures *semblables*; proposition d'ailleurs évidente par elle-même, puisque les angles sont égaux et que les côtés sont aussi égaux.

*Tous les polygones réguliers d'*UN MÊME NOMBRE DE CÔTÉS *sont* des figures *semblables*, etc.

§ III. — *Autres théorèmes sur les lignes proportionnelles. — Propriétés des triangles rectangles et obliquangles.*

FIG. 128. THÉORÈME I. (*Fig.* 128.)

Nº 201. — *Les portions de deux parallèles*, AL, A'L', *interceptées entre un nombre quelconque de droites*, PA, PB, PC, PD, ... *concourantes* [en un point P], *sont proportionnelles.*

[Le point P peut être indifféremment situé hors des deux parallèles ou entre ces deux parallèles.]

La comparaison des divers couples de triangles semblables PAB et PA'B', PBC et PB'C', ..., donne lieu aux suites de rapports égaux

1° PA : PA' :: AB : A'B' :: PB : PB',

2° PB : PB' :: BC : B'C' :: PC : PC',

3° PC : PC' :: CD : C'D' :: PD : PD',

4° . . . .

Or, tous ces rapports sont égaux, à quelque suite qu'ils appartiennent, puisque le dernier de chaque ligne est le premier de la ligne suivante; donc, en ne tenant compte que des rapports intermédiaires, on obtient la nouvelle suite

AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: ...;

ce qui démontre la proposition.

N. B. — Lorsque le point P est *intérieur* aux parallèles, la proposition ne cesse pas d'être vraie; seulement les segments de la droite A'L' qui correspondent aux segments de la droite AL, sont situés *en sens contraire* par rapport à ceux-ci.

Réciproquement : — *Un nombre quelconque de droites*, AA', BB', CC', DD',..., *qui divisent deux parallèles*, AL, A'L', *en parties proportionnelles, concourent en un même point.*

En effet, ne considérons d'abord que les trois droites AA', BB', CC' (*fig.* 129); et supposons que P soit le point de rencontre des deux premières. — Si la droite CC' ne passait pas par le même point P, on pourrait joindre ce point avec le point C, par une droite PC qui rencontrerait A'L' en un point C'' différent de C'; et alors on aurait, en vertu de la proposition directe, Fig. 129.

AB : A'B' :: BC : B'C'';

mais on a aussi, par hypothèse,

AB : A'B' :: BC : B'C';

on arriverait donc au résultat *absurde* B'C'' = B'C'.

Ainsi les trois droites AA′, BB′, CC′, doivent concourir en un même point P. — On démontrerait de même que DD′ doit concourir avec les trois premières; *donc*, etc.

SCOLIE I. — On présente quelquefois la suite de rapports ci-dessus, sous la forme

$$AB : BC : CD : DE \ldots :: A'B' : B'C' : C'D' : D'E' : \ldots,$$

en écrivant d'abord tous les antécédents, et ensuite tous les conséquents des rapports égaux. — Or, cela est permis, d'après la théorie connue des proportions; et il en résulte une écriture plus abrégée de ces rapports.

On voit immédiatement par là que si l'on a

$$AB = BC = CD = DE = \ldots,$$

on doit avoir aussi

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = \ldots$$

SCOLIE II. — Si, dans les premières suites de rapports établies au commencement de ce *numéro*, l'on ne tient compte que des rapports extrêmes, on est conduit à la nouvelle suite

$$PA : PA' :: PB : PB' :: PC : PC' :: PD : PD' :: \ldots,$$

ou bien (n° 184)

$$PA' : AA' :: PB' : BB' :: PC' : CC' :: PD' : DD' :: \ldots;$$

ce qui démontre que

Des droites PA, PB, PC, PD, ..., *en nombre quelconque, partant d'un même point* P, *sont coupées* elles-mêmes *en parties proportionnelles par deux droites*, AL, AL′, *parallèles entre elles*; — proposition dont celle du *numéro* 183 n'est qu'un cas particulier.

FIG. 130. THÉORÈME II. (*Fig.* 130.)

N° 202. — *Dans tout triangle* ABC, *la bissectrice* AD *de chaque angle* A *divise le côté opposé* BC *en deux segments* BD, DC, *di-*

rectement proportionnels aux côtés adjacents; — et *réciproquement.*

Il n'y a lieu à démontrer la proposition que dans le cas où les deux côtés AB, AC, sont inégaux, et où, par conséquent, AD est oblique sur BC (*voyez* le n° 61).

Dans cette hypothèse, abaissons des sommets B, C, sur AD, les perpendiculaires BE, CF. — Il en résulte deux triangles ABE, ACF, semblables comme équiangles (n° 193); d'où la proposition

AB : AC :: BE : CF.

Mais les deux triangles BDE, CDF, sont aussi semblables par la même raison, et donnent

BE : CF :: BD : DC;

donc AB : AC :: BD : DC;

C. Q. F. D.

La *réciproque* est *évidente* (n° 21), puisqu'il n'y a qu'une seule droite qui, menée du point A sur BC, puisse diviser BC en deux parties qui soient entre elles dans le rapport donné, AB : AC.

Scolie I. — La bissectrice, AD′, de l'angle B′AC supplémentaire de l'angle A, c'est-à-dire (n° 43, *scol.* 3) la perpendiculaire à la bissectrice AD, détermine aussi sur le côté BC prolongé, deux segments BD′, CD′, tels que l'on a la proportion

AB : AC :: BD′ : CD′;

il suffirait, pour le démontrer, d'abaisser des mêmes points B, C, des perpendiculaires sur AD′; et l'on trouverait successivement

AB : AC :: BE′ : CF′, BE′ : CF′ :: BD′ : CD′;

d'où la proportion qui vient d'être énoncée.

Scolie II. — Des deux proportions démontrées, on tire la suivante :

BD : CD :: BD′ : CD′;

et la droite BC est dite *divisée harmoniquement* aux points D et D′.

Nous reviendrons plus loin sur la division *harmonique* des lignes.

FIG. 131. THÉORÈME III. (*Fig.* 131.)

Nº 203. — *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC, *on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse*, cette perpendiculaire partagera le triangle total en deux triangles partiels également rectangles, et l'hypoténuse en deux segments; — Cela posé :

1° — *Les deux triangles partiels*, ABD, ACD, *sont semblables au triangle total, et* par conséquent (nº 189) *semblables entre eux;*

2° — Les lignes étant supposées évaluées en nombres (nº 185), — *La perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments*, BD, CD, *de l'hypoténuse;*

3° — *Chaque côté de l'angle droit*, AB ou AC, *est moyen proportionnel entre le segment adjacent de l'hypoténuse*, BD ou DC, *et l'hypoténuse entière* BC.

En effet, — 1° — Les triangles ABC, ABD, ont un angle commun B, et chacun un angle droit; donc ils sont semblables (nº 193). Il en est de même des triangles ACB, ACD; donc ces triangles sont aussi semblables entre eux. — On peut même remarquer que ces triangles partiels ont leurs côtés *perpendiculaires* chacun à chacun; ce qui rendra plus facile la comparaison de leurs côtés homologues (nº 194).

2° — Comparant entre eux les triangles partiels ABD, ACD, et profitant de la remarque qui vient d'être faite, on a

$$BD : AD :: AD : DC.$$

3° — Comparant le triangle total ABC avec le triangle partiel ABD, observant que, dans ces triangles, BC et AB sont homologues comme hypoténuses, que AB et BD sont aussi homologues comme opposés à des angles égaux, BCA, BAD, on obtient la proportion

$$BC : AB :: AB : BD.$$

La comparaison des triangles ABC, ACD, donnerait également

$$BC : AC :: AC : DC.$$

N. B. — Ces mêmes triangles, comparés deux à deux, donnent lieu à d'autres proportions qui sont rarement employées, mais qu'on peut, au besoin, obtenir facilement.

Les *réciproques* sont *vraies;* et nous nous bornerons à citer la suivante :

Lorsque la perpendiculaire AD, *abaissée du sommet* A *de l'un des angles d'un triangle* ABC *sur le côté opposé* BC, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce côté* [déterminés par la perpendiculaire], *l'angle formé par les deux autres côtés est* DROIT, et *le triangle est rectangle* en A.

En effet, de la proportion supposée

$$BD : AD :: AD : DC,$$

on déduit la similitude des triangles rectangles ADB, ADC, comme ayant un angle égal en D, compris entre côtés proportionnels (n° 198); ce qui donne alors

$$\textit{angle}\ BAD = \textit{angle}\ ACD, \quad \text{et} \quad \textit{angle}\ ABD = \textit{angle}\ CAD.$$

Mais on a $\quad BAD + ABD = 1\ \textit{droit}$ (n° 86);

donc aussi $\quad BAD + CAD = 1\ \textit{droit}.$

Ainsi le triangle ABC est rectangle en A.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 131.) FIG. 131.

N° 204. — *Dans un triangle rectangle* ABC, *le carré* [ou la deuxième puissance] de la valeur numérique *de l'hypoténuse*, BC, *est égal à la somme des carrés* des valeurs numériques *des deux autres côtés.*

Cette proposition résulte presque immédiatement de la troisième du *numéro* précédent. On a, en effet,

$$AB^2 = BC \times BD, \quad AC^2 = BC \times DC;$$

d'où, en ajoutant, membre à membre,

$$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + DC) = BC \times BC,$$

donc $\quad AB^2 + AC^2 = BC^2;$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Lorsque AB = AC, on a $BC^2 = 2AB^2$; donc *Dans tout triangle rectangle isoscèle, le carré de l'hypoténuse* [ou de la base du triangle] *est double du carré de l'un des côtés de l'angle droit.*

Par conséquent, — *La deuxième puissance de* la valeur numérique de *la diagonale d'un carré, est double de celle du côté.*

Donc — *La diagonale et le côté du carré* [étant dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1] *sont incommensurables entre eux.*

SCOLIE I. — Des deux relations

$$AB^2 = BC \times BD, \quad AC^2 = BC \times DC,$$

on déduit la proportion

$$AB^2 : AC^2 :: BC \times BD : BC \times DC, \quad \text{ou} \quad :: BD : DC.$$

De même, l'identité $BC^2 = BC^2$, combinée avec les deux relations ci-dessus, donne

$$BC^2 : AB^2 :: BC \times BC : BC \times BD, \quad \text{ou} \quad :: BC : BD$$

et $$BC^2 : AC^2 :: BC \times BC : BC \times DC, \quad \text{ou} \quad :: BC : DC.$$

D'où l'on voit que

Dans tout triangle rectangle, les carrés [ou deuxièmes puissances] *des côtés de l'angle droit et de l'hypoténuse, sont directement proportionnels aux segments de cette hypoténuse et à l'hypoténuse entière;* — [c'est-à-dire que l'on a (nº 201, *scol.*)

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BD : DC : BC].$$

Nº 208. — SCOLIE II. — Les segments BD, DC, formés par la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse BC, sont dits les *projections* des deux côtés de l'angle droit AB, AC, sur cette hypoténuse. — En général, la PROJECTION d'une droite déterminée de longueur, MN (*fig.* 132), sur une droite indéfinie AB, est la *distance* PQ *des pieds des perpendiculaires* abaissées des extrémités de la première sur la seconde.

FIG. 132.

En menant par le point M, la droite MR parallèle à PQ, ce qui

donne MR = PQ (n° 72), on forme un triangle rectangle MNR dans lequel on a, en vertu du théorème précédent,

$$MN^2 = MR^2 + NR^2 = PQ^2 + (NQ - MP)^2.$$

Donc — *Le carré d'une droite* [de longueur déterminée] *est égal au carré de sa projection sur une autre droite, plus le carré de la différence des perpendiculaires qui déterminent cette projection.*

Théorème V. (*Fig.* 133.)

Fig. 133.

N° 206. — *Dans un triangle obtusangle* ABC, *le carré du côté* BC *opposé à l'angle obtus* A, *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*, PLUS *le double produit de l'un de ces deux côtés*, AB par exemple, *par la projection* AD *de l'autre côté* AC *sur le prolongement du précédent;* — c'est-à-dire que l'on a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD.$$

En effet, le triangle BCD donne d'abord

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

On a ensuite $BD = AB + AD$,

d'où, élevant au carré,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD \ (*).$$

Substituant cette valeur de BD^2 dans la première égalité, et observant que le triangle rectangle ACD donne $CD^2 + AD^2 = AC^2$, on obtient $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$;

C. Q. F. D.

Théorème VI. (*Fig.* 134.)

Fig. 134.

Dans un triangle quelconque ABC, *le carré de chaque côté* BC *opposé à un angle aigu* A, *est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*, MOINS *le double produit de l'un de ces deux côtés*,

---

(*) D'après la formule d'*algèbre* $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$.

AB, *par la projection* AD *de l'autre côté* AC *sur le précédent* AB [prolongé si cela est nécessaire (n° 87)].

En effet, on a, comme ci-dessus,

$$BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

Maintenant, suivant que la perpendiculaire CD tombe au dedans ou au dehors du triangle ABC, on a

$$BD = AB - AD, \quad \text{ou bien} \quad BD = AD - AB;$$

mais dans un cas comme dans l'autre, on obtient, en élevant au carré (*), $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$;

d'où, en substituant comme précédemment dans la première égalité, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AD.$

N. B. — Cette égalité a toujours lieu, même quand la perpen-
Fig. 134. diculaire CD se confond avec le côté CB (*fig.* 134); car alors, en vertu de AD = AB, l'égalité se réduit à

$$BC^2 = AC^2 - AB^2, \quad \text{ou} \quad AC^2 = BC^2 + AB^2;$$

et elle est encore vraie (n° 204), puisque le triangle ABC est rectangle en B.

Scolie I. — On peut comprendre les deux théorèmes ci-dessus dans un seul et même énoncé :

Dans tout triangle obliquangle, le carré d'un côté quelconque est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus ou moins *le double produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur celui-ci, suivant que l'angle opposé au côte que l'on compare aux deux autres, est* obtus ou aigu.

Scolie II. — D'après le principe du *numéro* 21, un triangle est *rectangle, acutangle,* ou *obtusangle,* suivant que le carré du plus grand côté est *égal, inférieur,* ou *supérieur,* à la somme des carrés des deux autres côtés.

(*) D'après la formule d'*algèbre* $(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$.

Soient, par exemple,

1° $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$;.... $3^2 + 4^2 = 5^2$;

donc le triangle est rectangle [en A].

2° $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$;.... $2^2 + 3^2 < 4^2$;

donc le triangle est obtusangle.

3° $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$;.... $4^2 + 5^2 > 6^2$;

donc le triangle est acutangle.

4° $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$;.... $5^2 + 12^2 = 13^2$;

donc encore le triangle est rectangle, etc.

[*Voyez* le n° **94**, où l'on a donné un autre moyen de reconnaître l'*espèce* d'un triangle.]

Théorème VI. (*Fig.* 135.)

Fig. 135.

N° **207**.—*Dans un triangle quelconque* ABC, *la somme des carrés de deux côtés quelconques* AC, BC, *est égale au double du carré de la moitié du troisième côté* BC, *plus le double du carré de la droite* AD *qui joint le milieu* D *de ce côté au sommet opposé* C.

Abaissons du point C la perpendiculaire CE sur AB.

Les deux triangles ADC, CDB, l'un obtusangle, l'autre acutangle en D, donnent (n° **206**),

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \times DE,$$
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2DB \times DE;$$

ou, ajoutant et observant que $AD = DB$,

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2;$$

C. Q. F. D.

N. B. — Lorsque $CA = CB$ (n° **204**, *corol.*), la proposition est évidente.

Corollaire. — *Dans tout parallélogramme la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des diagonales;* cette conséquence est trop facile à déduire du théorème précédent pour que nous nous y arrêtions.

Plus généralement : — *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux de ces diagonales* (Proposition à démontrer).

§ IV. — *Détermination des aires.*

N° **208**. — *Définitions et notions préliminaires.* — Dans l'évaluation des surfaces, on convient d'appeler BASES d'un *parallélogramme* deux des côtés parallèles; LA HAUTEUR est alors la perpendiculaire commune aux deux bases, dont l'une est dite la base *inférieure* et l'autre la base *supérieure* (*voir* la remarque du n° **147**).

Dans le *rectangle*, deux côtés consécutifs quelconques forment la base et la hauteur; — on peut prendre indifféremment pour base le plus *grand côté* ou le plus *petit*.

Dans le *carré*, la base et la hauteur sont *égales*.

De même, on nomme *base* d'un triangle un quelconque de ses côtés; sa *hauteur* est alors la perpendiculaire abaissée sur ce côté, du sommet opposé.

N° **209**. — L'*aire* d'une surface, ou son *étendue superficielle*, est, comme nous l'avons déjà dit (n° **3**), le *rapport numérique* de cette surface à son unité. Or, on conçoit facilement que des figures *de formes très-différentes* peuvent néanmoins avoir *la même étendue superficielle*.

FIG. 54. Ainsi, par exemple, dans la *figure* 54, relative au théorème du *numéro* **81**, comme on a démontré l'égalité des deux triangles BFG, DFH, il s'ensuit que le parallélogramme AGHC a *la même étendue superficielle* que le trapèze ABDC.

Pour exprimer cette propriété de deux figures qui ont *même étendue*, ou *même aire*, sans cependant être *égales* ou *superposables*, on dit qu'elles sont *équivalentes*. — Dans la *figure* 54, (FIG. 54.) le parallélogramme AGHC et le trapèze ABDC sont *équivalents* : ils sont composés d'une partie commune, AGFDC, et de deux triangles égaux, BGF, DFH, mais réunis à la partie commune

par des angles *différents*, GFB, FDH ; ce qui fait voir pourquoi ils ne sont pas superposables.

Ainsi, deux polygones composés d'un même nombre de triangles égaux, mais *non assemblés de la même manière*, sont *équivalents* comme formés par l'assemblage de figures égales et superposables *chacune à chacune*.

Un polygone quelconque peut être *équivalent* à un *triangle*, ou même à un *carré*.

N° 210. — Maintenant, il est facile de reconnaître, d'après la théorie des triangles égaux, que

Deux parallélogrammes quelconques de même base et de même hauteur sont équivalents.

En effet, comme nous pouvons toujours supposer les deux figures placées l'une sur l'autre de manière que leurs bases inférieures coïncident, soient ABCD (*fig.* 136) le premier parallélogramme, et ABEF [ou ABE′F′] le second: ces parallélogrammes auront nécessairement leurs bases supérieures, CD, EF [ou E′F′], situées sur une même droite indéfinie, LL′, parallèle à la base inférieure, puisque, par hypothèse, ils ont aussi même hauteur. Fig. 136.

Cela posé, en ne considérant que les parallélogrammes ABCD, ABEF, nous voyons d'abord que les deux triangles ADF, BCE, sont égaux comme ayant un angle égal [DAF = CBE (n° 82)] compris entre côtés égaux [AD = BC, AF = BE (n° 72)]. Mais si du quadrilatère ABED nous retranchons alternativement les deux triangles ADF, CBE, ce qui doit donner deux restes égaux en surface, nous obtenons, d'une part le parallélogramme ABEF, de l'autre le parallélogramme ABDC. — Donc ces deux parallélogrammes sont *équivalents*.

On prouverait de la même manière que ABCD, ABE′F′, sont équivalents.

Comme cas particuliers, — 1° — *Un parallélogramme est équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur ;*

2° — *Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux*, et par conséquent *équivalents*.

N° 211. — *Un triangle quelconque est la moitié d'un parallélogramme* [ou d'*un rectangle*] *de même base et de même hauteur.*

FIG. 137. Car, si par les sommets B et C du triangle ABC (*fig.* 137), on mène BD, CD, parallèles aux côtés AC, AB, respectivement opposés, on forme ainsi un parallélogramme, ABDC, dont ABC n'est que la moitié (n° 72); donc, *etc.*

Conséquemment aussi : — *Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents*, comme moitiés de parallélogrammes équivalents.

Ainsi, tous les triangles CAB, C′AB, C″AB, C‴AB, . . ., qui ont même base AB, et leurs sommets C, C′, C″, C‴,. . . situés sur une même droite parallèle à AB, sont équivalents, comme ayant CH pour *hauteur commune.*

Ces premières notions étant établies, nous pouvons passer à l'*évaluation* des différentes sortes de surfaces.

FIG. 138. LEMME. (*Fig.* 138.)

N° 212. — *Deux rectangles* ABCD, A′B′C′D′, *de même base* [AB = A′B′] *sont proportionnels à leurs hauteurs*, AD, A′D′; — [c'est-à-dire que l'on a

ABCD : A′B′C′D′ :: AD : A′D′].

En effet, supposons d'abord que les hauteurs soient commensurables entre elles, et dans le rapport 13 : 7 par exemple; je dis que les rectangles sont aussi dans le même rapport.

Portons la commune mesure 13 fois sur AD et 7 fois sur A′D′; puis menons par les points de division, des parallèles aux bases AB, A′B′; nous obtiendrons ainsi, dans le premier rectangle, 13 rectangles partiels, et dans le second, 7. Or, tous ces rectangles sont égaux entre eux (n° 210) comme ayant même base et même hauteur; donc le rapport de ABCD à A′B′C′D′ est aussi 13 : 7.

Quant au cas de deux hauteurs incommensurables entre elles, le moyen de démonstration est tout à fait analogue à celui des *numéros* 118 et 182:

Il suffit de prouver que chacune des valeurs approchées,

$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots$ du rapport de AD à A′D′, exprime avec le même degré l'approximation celui de ABCD à A′B′C′D′; et pour cela, en divisant d'abord A′D′ en n parties égales, et portant l'une de ces parties n fois sur AD, puis, menant par tous les points de division des parallèles à AB, A′B′, on parvient à faire voir que le rapport des deux rectangles se trouve compris entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, etc.

N. B. — Comme on peut (nº 208) prendre indifféremment la hauteur pour la base, et *vice versâ*, il s'ensuit encore que

Deux rectangles de même hauteur sont proportionnels à leurs bases.

Corollaire. — *Deux rectangles quelconques*, ABCD, AEFG (*fig.* 139), *sont proportionnels aux produits de leurs bases par leurs hauteurs.* Fig. 139.

Plaçons d'abord les rectangles de manière qu'ils aient un angle commun A. Cela posé, soit I le point d'intersection de DC avec EF (prolongé s'il est nécessaire); on aura d'abord, en comparant les deux rectangles ABCD, AEID, qui ont même hauteur AD,

$$\text{ABCD} : \text{AEID} :: \text{AB} : \text{AE};$$

puis les deux rectangles AEID, AEFG, qui ont même base AE,

$$\text{AEID} : \text{AEFG} :: \text{AD} : \text{AG};$$

d'où, en multipliant ces proportions par ordre, et supprimant le facteur commun AEID (*voyez* nº 185),

$$\text{ABCD} : \text{AEFG} :: \text{AB} \times \text{AD} : \text{AE} \times \text{AG};$$

C. Q. F. D.

Scolie. — On pourrait étendre cette proposition et le *lemme* qui y a conduit, à deux parallélogrammes qui auraient *les mêmes angles*, en remplaçant dans les énoncés, la base et la hauteur par *deux côtés consécutifs*.

FIG. 139. **THÉORÈME I.** (*Fig.* 139.)

N° 213. — *Un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur;* — en d'autres termes, — *L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

On doit entendre par ces deux énoncés, que le nombre *abstrait* qui exprime le rapport du rectangle à *l'unité de surface,* ou *la mesure* du rectangle (n° 3), est égal au produit des nombres abstraits qui expriment les rapports respectifs de sa base et de sa hauteur à *l'unité linéaire.*

Or, si nous considérons les deux rectangles ABCD, *abcd*
FIG. 138. (*fig.* 138), le corollaire précédent donne

$$\mathrm{ABCD} : abcd :: \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} : ab \times ad;$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{abcd} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}}{ab \times ad} = \frac{\mathrm{AB}}{ab} \times \frac{\mathrm{AD}}{ad};$$

d'où l'on pourrait conclure, généralement, que le rapport d'un rectangle à un autre rectangle quelconque pris pour *unité,* ou *la mesure* du premier rectangle, est égal *au produit des rapports respectifs* de sa base à celle du second prise pour *unité de base,* et de sa hauteur à celle du second prise à son tour pour *unité de hauteur;* c'est-à-dire que, dans ce cas, on aurait *deux* unités linéaires *différentes* pour la base et pour la hauteur.

Mais *le carré* étant la plus simple de toutes les figures (n° 80), on prend ordinairement pour unité de surface *le carré construit sur l'unité linéaire.* — Dès lors, il suffit de poser dans l'égalité ci-dessus, $\mathrm{ABCD} = 1,\ ab = 1,\ ad = 1;$

et l'on obtient alors $\mathrm{ABCD} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD};$

C. Q. F. D.

N. B. — On ne doit toutefois pas perdre de vue que l'égalité précédente, pour avoir un sens raisonnable, exige que la base et la hauteur du rectangle étant rapportées *à une même unité li-*

néaire, le rectangle lui-même soit rapporté au *carré construit sur cette unité linéaire.*

N° 214. — COROLLAIRES. — Un parallélogramme étant équivalent à un rectangle de même base et de même hauteur (n° 210), il s'ensuit que

Tout parallélogramme a aussi pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; — ou bien,

L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

Donc — *Deux parallélogrammes de même base sont proportionnels à leurs hauteurs respectives;* — et *vice versâ.*

THÉORÈME II.

N° 215. — *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur;*

Car ce triangle est (n° 211) la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

COROLLAIRE I. — *Les aires de deux triangles de même base, sont entre elles comme les hauteurs;* — et *vice versâ.*

COROLLAIRE II. — *L'aire d'un trapèze* ABDC (*fig.* 54) *est égale au produit de la demi-somme de ses bases*, AB, CD, *par sa hauteur* IK ou MN, — ou bien encore, — *au produit de sa hauteur* IK *par la droite* EF *menée à égale distance des deux bases.* FIG. 54.

En effet, ce trapèze se compose de deux triangles, CAB, BCD; or on a, d'après le *théorème* II,

$$ABC = \frac{AB \times IK}{2}, \quad BCD = \frac{CD \times IK}{2};$$

donc

$$ABDC = \frac{AB \times IK}{2} + \frac{CD \times IK}{2} = \frac{AB + CD}{2} \times IK;$$

et comme on a prouvé d'ailleurs (n° 81) que $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$,

il en résulte encore $\quad ABDC = IK \times EF.$

COROLLAIRE III. — Un polygone pouvant toujours se décomposer en un certain nombre de triangles (n° 83), il s'ensuit que

La mesure ou *l'aire d'un polygone quelconque est égale à la somme des aires de tous les triangles dont il est formé.*

L'évaluation des diverses étendues superficielles se ramenant presque toujours à celle du triangle, il peut être utile de connaître plusieurs expressions de son *aire*. Nous démontrerons, en conséquence, les théorèmes suivants :

FIG. 140.

THÉORÈME III. (*Fig.* 140.)

N° 216. — *L'aire d'un triangle,* ABC, *est égale à la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.*

Soit O le centre du cercle inscrit (n° 127). — Abaissons de ce point les perpendiculaires OD, OE, OF, respectivement sur les côtés AB, BC, AC, et tirons les droites AO, BO, CO.

Cela posé, on a évidemment

$$\text{ABC} = \text{AOB} + \text{COB} + \text{AOC};$$

mais (n° 215)

$$\text{AOB} = \frac{\text{AB} \times \text{OD}}{2}, \quad \text{COB} = \frac{\text{BC} \times \text{OE}}{2}, \quad \text{AOC} = \frac{\text{AC} \times \text{OF}}{2};$$

donc, à cause de OD = OE = OF,

$$\text{AOB} = \frac{(\text{AB} + \text{BC} + \text{AC}) \times \text{OD}}{2};$$

C. Q. F. D.

SCOLIE. — Désignons, pour abréger, par s l'aire du triangle, par a, b, c, les trois côtés, et par r le rayon du cercle inscrit; l'égalité ci-dessus devient

$$s = \frac{a + b + c}{2} \times r,$$

expression facile à retenir, et qui, donnant d'ailleurs

$$r = \frac{2s}{a + b + c},$$

conduit à cet autre théorème :

Le rayon du cercle inscrit à un triangle a pour valeur numérique le quotient du double de l'aire de ce triangle divisé par son périmètre.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 141.)

FIG. 141.

N° 217. — *L'aire d'un triangle*, ABC, *est égale au quotient de la division du produit des trois côtés par le double du diamètre du cercle circonscrit.*

Soit O′ le centre du cercle circonscrit (n° **127**); tirons le diamètre CO′D, et la corde AD; soit, en outre, CH la hauteur du triangle.

Les deux triangles CAD, CHB, sont rectangles, l'un en A (n° **123**), l'autre en H; de plus, les angles en D et en B sont égaux comme inscrits dans le même segment ADBC (n° **126**). Ainsi, ces triangles, ayant deux angles égaux, sont semblables (n° **193**); et, en comparant leurs côtés homologues, on a

$$CD : CB :: AC : CH;$$

d'où

$$CH = \frac{CB \times AC}{CD}.$$

Mais on a aussi (n° **216**)

$$ABC = \frac{AB \times CH}{2};$$

donc, en mettant dans cette expression la valeur de CH, on obtient

$$ABC = \frac{AB \times CB \times AC}{2CD};$$

C. Q. F. D.

SCOLIE. — En conservant les mêmes notations que dans le *numéro* précédent, et désignant seulement par r', au lieu de r, le rayon du cercle circonscrit, on a

$$s = \frac{a \times b \times c}{4r'};$$

d'où

$$r' = \frac{a \times b \times c}{4s};$$

c'est-à-dire que

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle a pour expression le produit des trois côtés divisé par le quadruple de l'aire du triangle.

Nous ferons connaître encore, par la suite, d'autres expressions de l'aire du triangle.

N° 218. — Scolie général *sur les aires des figures rectilignes.*

Nous pouvons maintenant expliquer le sens de certaines dénominations usitées en Géométrie (*voyez*, au n° 3, *la note* du bas de la page).

On nomme *dimensions* d'un rectangle la *base* et la *hauteur* de ce rectangle; et l'on dit alors que

Un rectangle a pour mesure le produit de ses deux dimensions; ou bien, que — *L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.*

De là viennent les dénominations de Géométrie *à deux dimensions* et de Géométrie *à trois dimensions*, données aux deux *parties principales* de cette science (n° 23) : c'est qu'en effet l'un des principaux objets de la première partie est la mesure de l'*étendue à deux dimensions* [la ligne est l'*étendue à une dimension*], tandis que la seconde, comme nous le verrons plus tard, pour donner l'évaluation des corps, exige la connaissance d'une *troisième dimension*.

Les deux dimensions d'un *rectangle* s'appellent encore *la longueur* et *la largeur*; mais ordinairement, c'est *la plus grande* dimension que l'on nomme *la longueur*.

Dans le *parallélogramme*, les deux dimensions ne sont plus deux côtés consécutifs, mais bien l'un des côtés pris pour *bases*, et la *perpendiculaire commune* à ses deux bases. Celles-ci sont ordinairement les *côtés les plus grands* : ils représentent alors *la longueur*; et la perpendiculaire commune est *la largeur*.

Les deux dimensions d'un *triangle* sont, le côté pris pour *base*, et la *moitié de la hauteur*. — Celles du *trapèze* sont la *hauteur* et la *droite menée à égale distance des* deux *bases*.

Lorsque le polygone est tout à fait irrégulier, on ne peut se former une idée nette de ses deux dimensions prises séparément. — En faisant, comme nous l'avons vu plus haut, l'addition des nombres exprimant les aires des triangles dans lesquels le poly-

gone a été décomposé, on obtient un résultat qui représente le produit effectué de ces deux dimensions (*).

L'opération qui a pour but de *déterminer l'aire* d'une surface quelconque, se réduisant, en dernière analyse, à une évaluation en *carrés unitaires*, porte le nom de QUADRATURE.

C'est encore ici le lieu d'expliquer comment, dans le *système des nouvelles mesures* de superficie, dans les mesures *agraires* par exemple, les *multiples* et les *sous-multiples* de l'*unité principale* deviennent de 100 fois en 100 *fois plus grandes* ou *plus petites* que cette unité, lorsque les dimensions linéaires deviennent de 10 en 10 fois plus grandes ou plus petites que l'unité linéaire.

Le *mètre* valant 10 *décimètres*, il s'ensuit que le *mètre carré* équivaut à 10 $\times$ 10, ou 100 *décimètres carrés ;*

De même, le *décimètre carré* vaut à 100 *centimètres carrés, etc....*

L'*are*, ou le *décamètre carré*, équivaut à 100 *mètres carrés ;* — l'*hectare* à 100 $\times$ 100, ou 1 00 00 *mètres carrés.*

Et ainsi de suite.

Nous dirons enfin que les mots *rectangle* et *carré*, employés dans les diverses parties des mathématiques, tirent leur origine de la géométrie : ils sont, comme on le sait, synonymes des expressions : *produit de deux nombres*, et *seconde puissance d'un nombre*, parce qu'en effet ces deux produits représentent, en *unités carrées*, la superficie d'un rectangle ou d'un carré.

(*) On peut *enceindre* le polygone par un rectangle dont chaque côté passe par quelqu'un des sommets, comme le montre la *figure* 142 ; et alors on donne quelquefois, dans la *Géométrie pratique*, le nom de *longueur* du polygone à la plus grande dimension du rectangle, et de *largeur* à la plus petite. — Mais ces dénominations sont impropres, puisque le produit de ces deux lignes surpasse évidemment l'*aire* du polygone. FIG. 142.

Pour obtenir cette aire, *il faut retrancher de celle du rectangle* LMNP qui enveloppe le polygone, les parties excédantes ABCL, CDEM, ENF,..., lesquelles, au moyen de perpendiculaires abaissées sur les côtés du rectangle, sont ramenées soit à des *triangles* APK, ABI,..., soit à des *trapèzes*, IBCL,... Ce moyen d'évaluer l'aire d'un polygone est le seul qu'on puisse employer dans certaines circonstances : par exemple, lorsqu'il s'agit d'*évaluer la superficie* d'un bois, d'un étang, etc.

§ V. — *Comparaison des aires.*

Nous commencerons par établir les relations qui existent entre les aires des figures semblables.

Rapports entre les aires des figures semblables.

FIG. 143. **LEMME.** (*Fig.* 143.)

N° **219.** — *Les aires de deux triangles*, ABC, ADE, *qui ont un angle égal* A, *sont proportionnelles aux rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal.*

Après avoir superposé les angles égaux, menons BE; les triangles ABC, ABE, peuvent être considérés comme ayant respectivement pour bases AC, AE, et pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet commun B sur AC; donc (n° **215**, *corol.* I) ils sont proportionnels à leurs bases, et l'on a

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

En comparant de même les triangles ABE, ADE, on a encore

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Maintenant, si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, et que l'on supprime dans les deux termes du premier rapport, le facteur commun ABE, il vient

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE;$$

C. Q. F. D.

N. B. — La *réciproque* n'est pas vraie.

COROLLAIRE. — S'il arrive qu'après la superposition des deux
FIG. 144. triangles, le côté DE (*fig.* 144) du second soit parallèle au côté BC du premier, le *triangle* ABE est alors *moyen proportionnel* entre les triangles ABC, ADE.

En effet, on a, dans ce cas (n° **183**),

$$AB : AD :: AC : AE;$$

et les deux premières proportions du lemme précédent, étant liées par deux rapports égaux, donnent

ABC : ABE :: ABE : ADE.

THÉORÈME I. (*Fig.* 145.) FIG. 145.

N° 220. — *Les aires des triangles semblables* ABC, A'B'C', *sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues.*

En effet, ces triangles étant équiangles (n° 187), on a, d'après le lemme précédent,

$$ABC : A'B'C' :: AB \times AC : A'B' \times A'C';$$

mais comme d'ailleurs (*même* n°)

$$AC : A'C' :: AB : A'B',$$

on en conclut, en multipliant ces proportions par ordre, et supprimant le facteur AC dans les antécédents, ainsi que le facteur A'C' dans les conséquents,

$$ABC : A'B'C' :: AB^2 : A'B'^2.$$

SCOLIE. — Soient AD, A'D', les hauteurs des deux triangles. Les triangles rectangles ABD, A'B'D', sont aussi semblables, comme *équiangles;* on a donc

$$AD : A'D' :: AB : A'B';$$

et

$$AD^2 : A'D'^2 :: AB^2 : A'B'^2;$$

d'où l'on déduit, en comparant cette proportion avec la précédente,

$$ABC : A'B'C' :: AD^2 : A'D'^2.$$

Ainsi — *Les aires de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des hauteurs.*

THÉORÈME II. (*Fig.* 126.) FIG. 126.

N° 221. — *Les périmètres de deux polygones semblables* ABCDEF, A'B'C'D'E'F', *sont proportionnels aux côtés homologues;* — et — *Leurs aires sont proportionnelles aux carrés des côtés.*

12.

On a d'abord, à cause de la similitude des polygones (n° 196),

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D' :: DE : D'E' :: \ldots;$$

d'où, en vertu de la théorie des proportions,

$$\frac{AB + BC + CD + DE + \ldots}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + \ldots} = \frac{AB}{A'B'};$$

ou *périmètre* ABCD... : *périmètre* A'B'C'D'... :: AB : A'B';
ce *qui démontre* la première partie de la proposition.

Ensuite, les deux polygones étant, d'après leur définition (n° 187), composés de triangles semblables, qui, comparés entre eux, sont chacun à chacun, dans un même rapport, celui des carrés des côtés homologues, il s'ensuit, d'après les propriétés des proportions, que la somme des triangles qui constituent le premier polygone, ou l'*aire* de ce polygone, est à la somme des triangles qui constituent le second, ou à l'*aire* de ce second polygone, dans le rapport de ces mêmes carrés; c'est-à-dire que l'on a

$$ABCDEF : A'B'C'D'E'F' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2.$$

Corollaire. — *Les aires des figures semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs lignes homologues* (n° 199).

Théorème III.

N° 222. — *Lorsque les lignes homologues de deux figures semblables sont proportionnelles aux lignes homologues de deux autres figures semblables* [entre elles, mais non pas nécessairement semblables aux premières], *les aires des quatre figures sont proportionnelles;* — et *réciproquement.*

Soient A, B, les deux premières figures, et a, b, deux de leurs lignes homologues; on a (n° 221)

$$A : B :: a^2 : b^2.$$

Soient de même C, D, les deux dernières figures, et c, d, deux

de leurs lignes homologues; on a encore

$$C : D :: c^2 : d^2;$$

mais, par hypothèse, $a : b :: c : d;$

d'où $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2;$

donc $A : B :: C : D.$

Réciproquement, si QUATRE *figures* semblables *deux* à *deux*, sont liées par la proportion $A : B :: C : D,$

comme on a d'ailleurs $A : B :: a^2 : b^2$

et $C : D :: c^2 : d^2,$

il en résulte $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2;$

d'où $a : b :: c : d.$

N. B. — La proposition a également lieu quand les figures proposées sont toutes quatre semblables entre elles.

COROLLAIRE. — Si trois figures sont semblables, et qu'une *ligne* de l'une soit *moyenne proportionnelle* entre les lignes homologues des deux autres, l'*aire* de la première figure sera *moyenne proportionnelle* entre les aires des deux dernières; — et *réciproquement*.

Comparaison des carrés construits sur certaines lignes.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 146.) FIG. 146.

N° 223. — *Le carré* BCED *construit sur l'hypoténuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC, *est équivalent à la somme des carrés*, ABFG, ACIK, *construits respectivement sur les deux autres côtés*, AB, AC.

Ce théorème n'est, au fond, que celui du n° 204; mais son importance et sa fécondité en ont fait rechercher des démonstrations fondées uniquement sur l'*égalité* et l'*équivalence* des figures. Nous nous bornerons à exposer celle qui est le plus généralement admise dans les Traités de Géométrie.

Les trois carrés étant supposés construits en dehors du triangle ABC, abaissons du sommet A de l'angle droit, une perpendiculaire AL sur l'hypoténuse, et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de DE en M : le carré BCED se trouve ainsi décomposé en deux rectangles BDML, LCEM. Tirons, de plus, AD et CF.

Cela posé, les angles ABD, FBC, sont égaux comme composés d'un angle droit chacun, et d'une partie ABC commune à tous deux ; de plus, les lignes AB et BF, BC et BD, sont égales comme étant deux à deux les côtés d'un même carré ; donc les triangles BAD, BFC, sont égaux (n° 63, 2ᵉ *cas*).

Maintenant, le triangle BAD est moitié du rectangle BLMD (n° 211), puisque ces deux figures ont même base BD et même hauteur BL ; de même, le triangle BFC est moitié du carré ABFG, comme ayant même base BF et même hauteur AB; donc

BLMD = ABFG.

On prouverait de la même manière, en tirant AE, BI, que

LMEC = ACIK;

et comme le *carré* BDEC équivaut à BLMD + LMEC, il en résulte enfin *carré* BDEC = *carré* AEFG + *carré* ACIK;

C. Q. F. D.

FIG. 147. COROLLAIRE I. — *Le carré* MNPQ (*fig.* 147) *construit sur la diagonale* BD [ou AC] *d'un autre carré* ABCD, *est double de celui-ci :*

Proposition qui se vérifie d'ailleurs facilement d'après la figure. — En effet, les quatre carrés AOBM, AODN, BOCQ, DOCP, sont égaux, et respectivement doubles des triangles AOB, AOD, BOC, DOC, dont la somme est égale au carré ABCD.

COROLLAIRE II. — Nous venons de voir que les carrés ABFG,
FIG. 146. ACIK (*fig.* 146), sont respectivement équivalents aux rectangles BLMD, LMEC; d'ailleurs, ces rectangles et le carré BCED ont tous trois pour hauteur commune BD; donc, en vertu du lemme établi

au nº **212**, ils sont entre eux comme leurs bases BL, LC, et BC. Ainsi, on a la relation :

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 :: BL : LC : BC.$$

Corollaire III. — De ce que les deux carrés ABFG, ACIK, sont équivalents aux rectangles BLMD, LMEC, on déduit encore séparément (nº **213**),

$$AB^2 = BC \times BL, \qquad AC^2 = BC \times LC;$$

d'où les proportions,

$$BC : AB :: AB : BL, \qquad BC :: AC :: AC : LC.$$

Ces deux proportions, jointes à la relation du corollaire précédent, ne sont autre chose que la troisième partie du théorème du nº **203**, et la proposition qui forme le corollaire du nº **204**. — On retombe ainsi, par d'autres moyens, sur des propriétés déjà démontrées.

Corollaire IV. — Enfin, si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC, on suppose construits trois polygones *semblables* entre eux, comme ces polygones sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues (nº **221**), et que l'on a entre ces côtés la relation

$$BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

il en résulte aussi que, de ces trois polygones semblables,

Le polygone construit sur l'hypoténuse est *équivalent* à la somme des polygones construits sur les côtés de l'angle droit.

Les deux formules d'algèbre

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq, \quad (p - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq,$$

qui ont servi de base aux théorèmes du numéro **206**, et cette autre

$$(p + q)(p - q) = p^2 - q^2,$$

également connue, étant traduites en langage géométrique, donnent lieu à de nouveaux théorèmes sur les aires, par lesquels nous terminerons ce paragraphe.

Fig. 148.

THÉORÈME V. (*Fig.* 148.)

N° 224. — *Le carré construit sur la somme* ou *sur la différence de deux lignes, est équivalent à la somme des carrés construits respectivement sur ces deux lignes, plus* ou *moins le double de leur rectangle.*

L'inspection seule de la figure est presque suffisante pour faire reconnaître la vérité de cette double proposition.

Soient, *en premier lieu*, AE la plus grande des deux lignes données, EB la plus petite; construisons les deux carrés AEIG, ABCD; puis, prolongeons EI jusqu'à sa rencontre en F avec CD.

Le carré construit sur AB, somme des deux lignes, se compose évidemment des carrés AEIG, IKCF, construits sur la ligne AE et sur la ligne IK = EB, augmentés des deux rectangles BEIK, GIFD, lesquels ont pour bases respectives GI = AE, EI = AE, et pour hauteurs GD = EB, IK = EB.

On a donc

carré AB = *carré* AE + *carré* EB + 2 . *rectangle* AE × EB;

ce qui démontre *le premier cas* de la proposition.

En second lieu, soient AB la plus grande ligne, BE la plus petite, ce qui donne AE pour la différence des deux lignes; et construisons la même figure que ci-dessus, en ajoutant toutefois en dehors de cette figure un carré GDLM égal à IKCF.

Cela posé, le carré AEIG est égal au carré ABCD, *plus* le carré GDLM, *moins* les deux rectangles EBCF, MIFL. Or ces deux rectangles ont respectivement pour bases FE = AB, IM = GK = AB, et pour hauteurs BE = IK = IF; donc enfin,

carré AE = *carré* AB + *carré* EB — 2 fois *rectangle* AB × BE;

ce qui démontre *le second cas.*

Fig. 149.

THÉORÈME VI. (*Fig.* 149.)

N° 225. — *Le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes, est équivalent à la différence des rectangles construits sur ces deux lignes.*

Soient AB la plus grande ligne, BE = BE′ la plus petite, en

sorte que AE représente la somme des deux lignes, et AE′ leur différence. Construisons sur AE comme base, et AG = AE′ comme hauteur, le rectangle AENG, ainsi que le carré ABCD; élevons d'ailleurs la perpendiculaire E′IF, ce qui donne le carré AE′IG.

Cela posé, les deux rectangles BENK, GIFD, sont égaux comme ayant même base et même hauteur, savoir : BK=AG=GI=AE′, EB = E′B = IK = IF = DG ; d'où il suit que le rectangle AENG est équivalent à lafigure DFIKBA. Mais celle-ci est la différence des carrés construits sur AB et sur IK = BE′ = BE ; on a

donc *rectangle* AENB = *carré* AB — *carré* BE ;

C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

DE L'ÉTENDUE DANS LES FIGURES CIRCULAIRES.

Ce chapitre aura *trois* paragraphes, savoir : — 1° — la théorie des *lignes proportionnelles* considérées dans le *cercle ;* — l'*évaluation des côtés et des aires* dans les polygones réguliers ; — 3° — la *mesure du cercle* sous le double rapport de son *étendue linéaire* et de son *étendue superficielle.*

§ I. — *Des lignes proportionnelles considérées dans le cercle.*

THÉORÈME I. (*Fig.* 150.) FIG. 150.

N° 226. — *Les segments de deux cordes* AA′, BB′, *qui se coupent en un point* P *intérieur à un cercle, sont inversement proportionnels :*

[Ce qui veut dire que les segments de l'une des cordes forment *les extrêmes* d'une proportion dont les segments de l'autre corde forment *les moyens.*]

Tirant les cordes auxiliaires AB, A′B′, on obtient ainsi deux

triangles, PAB, PA′B′, semblables entre eux comme ayant les angles égaux (nº 193), 1º en P, 2º en A et en B′, 3º en B et en A′ (nº 122).

Donc, en comparant leurs côtés homologues, on a la proportion AP : PB′ :: PB : PA′; *C. Q. F. D.*

FIG. 151. SCOLIE I. — Si l'une des cordes est un diamètre AA′ (*fig.* 151), et que l'autre corde, BB′, soit perpendiculaire à ce diamètre, comme on a alors BP = PB′ (nº 108), la proportion devient

AP : PB :: PB : PA′.

La perpendiculaire PB au diamètre AA′ se nomme une *ordonnée* à ce diamètre. D'où il résulte que,

Dans le cercle, toute ordonnée à un diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segments de ce diamètre.

Au reste, cette propriété est aussi une conséquence de celles des triangles rectangles; car, si l'on joint A, A′, au point B, on forme un triangle ABA′ rectangle en B (nº 123); ce qui donne (nº 203, 2º) la proportion AP : PB :: PB : PA′.

SCOLIE II. — Le même triangle rectangle ABA′ donne (nº 203, 3º) la proportion AA′ : AB :: AB : AP;

d'où l'on voit que

Toute corde menée par l'une des extrémités d'un diamètre, est moyenne proportionnelle entre sa projection (nº 208) *sur ce diamètre et le diamètre entier.*

FIG. 152. THÉORÈME II. (*Fig.* 152.)

Nº 227. — *Deux sécantes*, PA, PB, *partant d'un même point* P *extérieur à un cercle, sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures.*

Menons, comme dans le théorème précédent, les cordes AB′ et BA′ : les deux triangles PAB′, PBA′, semblables comme ayant l'angle P commun et les deux angles en A, B, égaux entre eux (nº 122), donnent la proportion

PA : PB :: PB′ : PA′.

[Une sécante entière et sa partie extérieure forment *les extrêmes*,

ndis que l'autre sécante et sa partie extérieure forment *les oyens.*] *C. Q. F. D.*

N. B. Cette propriété s'accorde avec le *scolie du numéro* **144**.

THÉORÈME III. (*Fig.* 153.) FIG. 153.

N° **228**. — Si une sécante PA et une tangente PB partent d'un ême point P,

La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière sa partie extérieure.

Ce théorème n'est, à proprement parler, qu'un cas particulier précédent : c'est le cas où les deux points B, B′, de la sécante B, viennent à se réunir en un seul (*voyez* n° **110**).

Mais on le démontre directement en menant les cordes AB, ′B. — On a, en effet, deux triangles, PAB, PA′B, semblables mme ayant l'angle P commun et les deux angles en A, B, égaux tre eux (nos **122**, **124**); ce qui donne la proportion

$$PA : PB :: PB : PA'.$$

SCOLIE. — Il existe un cas très-remarquable de la proportion i vient d'être démontrée :

Supposons que, la sécante PA (*fig.* 154) passant par le centre FIG. 154. u cercle, on ait en même temps la tangente PB égale au diaètre, c'est-à-dire PB = AA′; la proportion devient alors

$$PA : AA' :: AA' : PA';$$

t l'on dit, dans ce cas, que la *droite* PA est *divisée* au point A′, MOYENNE ET EXTRÊME (*), c'est-à-dire *en deux segments, dont* un [qui est nécessairement le plus grand] *est moyen proportionnel entre la droite entière et l'autre segment.*

En outre, la proportion ci-dessus donne (n° **184**)

$$AA' : PA - AA' :: PA' : AA' - PA',$$

u

$$AA' : PA' :: PA' : AA' - PA'.$$

(*) La locution usitée généralement de division *en moyenne et extrême* aison, provient d'une altération dans le texte d'Euclide, comme il sera démontré ailleurs; c'est pourquoi nous rétablissons ici la seule expression ...ique de ce mode de division.

Or, si l'on prend sur PB une distance PA″ = PA′, ce qui donne [à cause de AA′ = PB],

$$AA' - PA' = PB - PA'' = A''B,$$

il en résulte $$PB : PA'' :: PA'' : A''B.$$

D'où l'on voit que la droite PB est elle-même divisée au point A″, *en moyenne et extrême.*

Remarque sur les trois théorèmes précédents.

N° 229. — Les proportions que comportent les énoncés de ces propositions donnant lieu aux égalités

$$PA \times PA' = PB \times PB', \quad \text{et} \quad PA \times PA' = PB^2,$$

il s'ensuit qu'elles peuvent être toutes trois comprises sous un même énoncé :

Le produit des distances d'un point constant P, *intérieur* ou *extérieur à un cercle, à deux points de ce cercle, pris sur la même direction, est un nombre constant, quelle que soit cette direction.*

[Le cas de la *tangente* se trouve implicitement renfermé dans cet énoncé, puisqu'il suffit de supposer les deux points *réunis en un seul.*]

Et cette manière de grouper les trois théorèmes permet de donner un énoncé également plus concis de leurs réciproques, qui sont d'ailleurs des conséquences nécessaires du *numéro* 21 :

Fig. 150, 152, 153. 1° — Si quatre points, A et A′, B et B′ (*fig.* 150, 152, 153), sont situés deux à deux sur deux droites passant par un même point P, de telle manière qu'on ait

$$PA \times PA' = PB \times PB',$$

ces *quatre points* appartiennent à *une même circonférence* de cercle.

2° — Si deux points, A, A′, sont situés sur une droite passant par un point P, et un autre point B situé sur une seconde droite passant par le même point P, de manière que l'on ait

$$PB^2 = PA \times PA',$$

les *trois points* se trouvent placés *sur une même circonférence tan-*

gente à la droite PB au point B; — ou bien encore, le *cercle passant par le point* A, et *tangent à la droite* PB *au point* B, *passe* aussi *par le point* A'.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 155.) FIG. 155.

N° 230. — *Dans tout quadrilatère inscriptible* ACBD, *le rectangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés* [c'est-à-dire que l'on a

$$AB \times CD = AC \times BD + AD \times BC].$$

En effet, menons par le point C une droite CE qui forme avec CA l'angle ACE égal à l'angle BCD; ce qui donne aussi

$$angle\ ECB = angle\ ACD.$$

Cela posé, on forme ainsi deux triangles, CEA, CBD, semblables entre eux comme ayant deux angles égaux, savoir: les angles ACE, DCB, égaux par construction, ainsi que les angles CAE, CDB (n° 122).

D'où l'on déduit d'abord, en comparant les côtés homologues,

$$AC : CD :: AE : BD;$$

donc

$$CD \times AE = AC \times BD.$$

La comparaison des côtés homologues dans les triangles semblables BEC, ADC, donnerait également

$$AD : CD :: BE : CB;$$

d'où

$$CD \times BE = AD \times BC.$$

Si maintenant on ajoute, membre à membre, les égalités qu'on vient d'obtenir, il en résulte

$$CD \times AE + CD \times BE = AC \times BD + AD \times BC,$$

ou

$$CD \times AB = AC \times BD + AD \times BC;$$

C. Q. F. D.

N° 231. — SCOLIE. — Ce théorème est susceptible d'une foule d'applications dont voici les principales :



88 LIV. II. — CHAP. II. — § I.
Or, si l'on prend sur PB une distance PA″ = PB
cause de AA′ = PB],
AA′ — PA′ = PB — PA″
en résulte PB : PA″ :: PA″
D'où l'on voit que la droite PB est
″, en moyenne et extrême.
Remarque sur les trois
Nº 229. — Les proportions
ropositions donnant lieu au
PA × PA′ = PB ×
s'ensuit qu'elles peuv
ième énoncé :
Le produit des dist
rieur à un cercle,
ction, est un nom
[Le cas de la
et énoncé, pui
n seul.]
Et cette
onner un
ont d'aill
1º —
ont sit
oint
re].
AB = c (fig
, BC = a, de ce
er b = a, dans la fo
quand on veut exprimer par une se
gle quelconque, il est d'usage de rep
ent par les lettres, en petits caractères,
ngles opposés. — Ainsi, a, b, c, sont
, B, C
LES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE.
PB au point B; — on bien encore, le
et tangent à la droite PB au point
ME IV. (Fig. 155.)
adrilatère inscrip
à la somme des
D + AD
droite CE qui
donne aussi
CD.
CEA, CBD, sem
, savoir : les
que les angles
analogues,
rique de
opérations
56), du
le préc
(fig.

$$\overline{\quad a^2} + \frac{a}{2r} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2},$$

$$\overline{-a^2}.$$

…'un arc, *connaissant la*

… la corde de l'arc
… rapport à a.
… moyen de la

Fig. 156.

$$\ldots_{2} = \frac{c}{2}\Big].$$

$$\ldots r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2};$$

$$\sqrt{4r^2 - c^2}\ (*).$$

…us loin ces applications, qui renfer- … algébriques; mais nous engagerons les … habitude de ces sortes de calculs, à dégager … formule (1), ce qui donnera *la corde* a *ou* b *de la* … *deux arcs, au moyen des cordes* c *et* b *ou* a *de ces arcs.*

… même, en supposant connus a, b, c, tâcher de déter- … r; ce qui donne alors *la valeur numérique du rayon du* … *cle circonscrit à un triangle, au moyen de ses trois côtés.*

(*) Cette expression peut d'ailleurs être transformée en

$$\sqrt{r\left(r+\frac{c}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r+\frac{c}{2}\right)};$$

… ar en élevant l'une ou l'autre au carré, on trouve également

$$2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

1° — *Trouver la corde* AB *de la somme de deux arcs* AC, CB, *connaissant les cordes de ces arcs.*

Nommons, pour abréger, a, b, c, les trois côtés BC, AC, AB, du triangle ABC (*), et r le rayon du cercle circonscrit à ce triangle; tirons d'ailleurs le diamètre $COC' = 2r$, ainsi que les cordes AC', BC' [que l'on peut nommer *supplémentaires*, comme soutendant des arcs AC', BC', supplémentaires de AC, BC].

Cela posé, le quadrilatère inscrit ACBC' donne, en vertu du théorème précédent,

$$AB \times CC' = AC \times BC' + AC' \times CB;$$

mais, des triangles CAC', CBC', rectangles en A et B (n° 125), on déduit (n° 204)

$$AC' = \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{AC}^2}, \quad BC' = \sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{BC}^2};$$

ou, à cause de $CC' = 2r$, $AC = b$, $BC = a$,

$$AC' = \sqrt{4r^2 - b^2}, \qquad BC' = \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

L'égalité ci-dessus devient donc

$$c \times 2r = b \, . \sqrt{4r^2 - a^2} + a \, . \sqrt{4r^2 - b^2};$$

d'où (1) $$c = \frac{b}{2r} \, . \sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{a}{2r} \, . \sqrt{4r^2 - b^2},$$

formule qui détermine la valeur numérique de c, en fonction de a, b, et r: [il reste à effectuer les opérations arithmétiques indiquées par le second membre].

FIG. 156. 2° — *Trouver la corde,* $AB = c$ (*fig.* 156), *du double d'un arc, connaissant la corde,* $BC = a$, *de cet arc.*

Il suffit de poser $b = a$, dans la formule précédente, qui donne

---

(*) Quand on veut exprimer par une seule lettre chacun des côtés d'un triangle quelconque, il est d'usage de représenter ces côtés, respectivement par les lettres, en petits caractères, qui désignent les sommets des angles opposés. — Ainsi, a, b, c, sont les côtés opposés aux angles A, B, C

alors

$$c = \frac{a}{2r} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} + \frac{a}{2r} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2},$$

ou simplement,

(2) $$c = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

3° — *Trouver la corde de la moitié d'un arc, connaissant la corde de cet arc.*

Puisque c est la corde de l'arc double, et a la corde de l'arc simple, tout se réduit à résoudre l'égalité (2) par rapport à a.

Mais on peut arriver au même résultat, par le moyen de la figure 156. — On a, en effet, dans le triangle CBC', FIG. 156.

$$\mathrm{CB}^2 = \mathrm{CI} \times \mathrm{CC'} \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{226}, \textit{scol.}\ \text{II}).$$

Or, $\mathrm{CI} = \mathrm{OC} - \mathrm{OI} = \mathrm{OC} - \sqrt{\mathrm{OB}^2 - \mathrm{BI}^2}$ (n° **204**);

d'où $\mathrm{CI} = r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}$ $\left[\text{à cause de BI} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{c}{2}\right]$.

Donc $$a^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right) = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2};$$

et par conséquent,

(3) $$a = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}}\ (*).$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces applications, qui renferment quelques difficultés algébriques; mais nous engagerons les jeunes gens qui ont l'habitude de ces sortes de calculs, à dégager soit a, soit b de la formule (1), ce qui donnera *la corde* a *ou* b *de la différence des deux arcs, au moyen des cordes* c *et* b *ou* a *de ces arcs.*

On peut même, en supposant connus a, b, c, tâcher de déterminer r; ce qui donne alors *la valeur numérique du rayon du cercle circonscrit à un triangle, au moyen de ses trois côtés.*

(*) Cette expression peut d'ailleurs être transformée en

$$\sqrt{r\left(r + \frac{c}{2}\right)} - \sqrt{r\left(r + \frac{c}{2}\right)};$$

car en élevant l'une ou l'autre au carré, on trouve également

$$2r^2 - r\sqrt{4r^2 - c^2}.$$

N° **252.** — SCOLIE GÉNÉRAL. — Les questions traitées dans ce paragraphe, et dans quelques-uns du chapitre précédent, peuvent être considérées comme servant de base à la *géométrie analytique*, puisqu'elles fournissent, sous une forme générale, des relations numériques entre des lignes connues et des lignes inconnues.

On voit en outre que, plusieurs de ces relations renfermant des radicaux, les lignes inconnues doivent être, en général, *incommensurables* avec les lignes données.

C'est ainsi, par exemple, que, le côté d'un carré étant supposé égal à 1, sa diagonale est représentée par $\sqrt{2}$ (n° **204**, *corol.*); ce qui prouve que

La diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté.

On arrive encore à ce dernier résultat par une simple application du théorème relatif à la tangente (n° **229**).

FIG. 157. Soit, en effet, le carré ABDC (*fig.* 157), dans lequel on suppose AB = 1. Décrivons du point A comme centre, et avec AB pour rayon, une demi-circonférence qui rencontre AD prolongé aux points E, F.

On a (n° **229**) $\quad DE : DB :: DB : DF,$

ou $\quad DE : 1 :: 1 : 2 + DE;$

d'où $$DE = \frac{1}{2+DE}.$$

Donc $$\sqrt{2} = AD = 1 + DE = 1 + \frac{1}{2+DE}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + DE}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + DE}}}$$

etc., etc.

Ainsi l'on trouvera toujours un reste, quelque loin que l'on pousse l'opération, puisque la valeur de AD est exprimée par une *fraction continue périodique*. Par conséquent, le rapport de AD à AB est incommensurable.

N. B. — Il est à remarquer que la démonstration précédente fournit un moyen *géométrique* de développer le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ en *fraction continue*.

Nous aurons bientôt l'occasion de rencontrer d'autres lignes remarquables, qui sont dans un rapport incommensurable avec la ligne prise pour unité.

§ II. — *Evaluation des côtés et des aires dans les polygones réguliers quelconques.*

Observation préliminaire. — Quelques-unes des propositions qui feront partie des paragraphes suivants, sont plutôt des problèmes à résoudre que des théorèmes à démontrer, puisqu'elles ont pour objet spécial la *détermination de certaines grandeurs inconnues*, au moyen d'autres grandeurs supposées connues. Mais comme ce sont des problèmes *théoriques*, nous donnerons à ces propositions la forme ordinaire des théorèmes.

Théorème I. (*Fig.* 81.) Fig. 81.

N° **233**. — *L'aire d'un polygone régulier* quelconque ABCDEF *est égale à la moitié du produit de son périmètre par l'apothème* OG ou le rayon du cercle inscrit.

En effet, les triangles égaux et isoscèles OAB, OBC, OCD,... (n° **132**), donnent

$$\text{OAB} = \text{AB} \times \frac{\text{OG}}{2},$$

$$\text{OBC} = \text{BC} \times \frac{\text{OG}}{2},$$

$$\text{OCD} = \text{CD} \times \frac{\text{OG}}{2}, \ldots \quad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{217});$$

donc $$\textit{aire}\ \text{ABCDEF} = (\text{AB} + \text{BC} + \text{CD} + \ldots) \times \frac{\text{OG}}{2},$$

ou, pour abréger, $$\text{A} = \frac{1}{2}\,\text{P} \times \text{R},$$

A désignant l'aire du polygone, P le périmètre, et r l'apothème, ou le rayon du cercle inscrit.

SCOLIE. — Nommons R le rayon du polygone (n° 132), n le nombre des côtés, et a un côté quelconque.

Le triangle OGA donne $OG = \sqrt{OA^2 - AG^2}$ (n° 204); d'où, en employant les notations convenues, et observant que $AG = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$,

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

On a d'ailleurs $$P = n.a;$$

donc $$A = \frac{na\sqrt{4R^2 - a^2}}{4};$$

ce qui donne l'expression de l'aire d'un polygone, quand on en connaît le *côté*, le *rayon*, et le *nombre* des côtés.

THÉORÈME II.

N° 234. — *Les périmètres de deux polygones réguliers semblables sont proportionnels aux rayons des cercles inscrits* ou *circonscrits;* — et — *Leurs aires sont proportionnelles aux carrés de ces mêmes rayons.*

Nous avons déjà reconnu (n° 200) que deux polygones réguliers d'un *même nombre de côtés* sont des *figures semblables*.

Réciproquement : deux polygones réguliers, pour être semblables, doivent avoir *un même nombre* de côtés; car si le nombre des côtés était différent dans ces polygones, les angles de l'un ne seraient pas égaux aux angles de l'autre (n° 135); ce qui impliquerait contradiction avec la propriété du *numéro* 196.

Il suit de là que les angles au centre ainsi que les angles à la base, sont égaux chacun à chacun dans les deux polygones; donc, les triangles isoscèles qui ont leurs sommets aux centres de ces polygones, sont, chacun à chacun, équiangles et semblables. Les rayons des cercles inscrits et circonscrits sont alors des lignes ho-

mologues; et, en appliquant à ces polygones la proposition générale du n° 221, on est conduit au théorème énoncé ci-dessus.

Soient R et R′, r et r′, a et a′, P et P′, A et A′, les rayons, les apothèmes, les côtés homologues, les périmètres, et les aires, de ces deux polygones; on a les relations

1° $P : P' :: R : R' :: r : r' :: a : a'$;
2° $A : A' :: R^2 : R'^2 :: r^2 : r'^2 :: a^2 : a'^2$.

THÉORÈME III. (*Fig.* 107.) FIG. 107.

N° 238. — *Connaissant le côté* [$AB = a$], *et le rayon* [$OA = R$] *d'un polygone régulier* [de *n* côtés], on peut toujours *obtenir* — 1° — *la valeur du côté* AC *du polygone régulier d'un nombre* SOUS DOUBLE *de côtés;* — 2° — *la valeur du côté* AI *du polygone régulier d'un nombre* DOUBLE *de côtés;* — 3° — enfin, *le rayon* OM *et le côté* MN *du polygone circonscrit* SEMBLABLE *au polygone proposé.*

[Le rayon R est commun aux trois polygones dont AB, AC, AI, sont les côtés.]

1° — Comme AC soutend un arc double de l'arc soutendu par $AB = a$, il suffit de remplacer dans la formule (2) du *numéro* 231, r par AC, et r par R.

Il vient (1) $$AC = \frac{a}{R}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

2° — On obtient de même la valeur de AI, au moyen de la formule (3) du même *numéro*, en y posant $r = R$, et $a' = AI$; ce qui donne

(2) $$AI = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

3° — Quant aux valeurs de OM et de MN, les deux triangles semblables OMN, OAB, dont OI et OK sont des lignes homologues, donnent

$$OM : OA :: OI : OK, \text{ d'où } OM = \frac{OA \times OI}{OK},$$

$$MN : AB :: OI : OK, \text{ d'où } MN = \frac{AB \times OI}{OK};$$

mais on a $OA = OI = R$, $AB = a$, $OK = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$ (n° 204);

donc (3) $OM = \frac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$, $MN = \frac{2a.R}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$;

C. Q. F. D.

SCOLIE. — Connaissant le rayon et le côté de chacun des trois nouveaux polygones, on peut en déduire les valeurs de leurs *aires*, en remplaçant, dans la formule

$$A = \frac{na.\sqrt{4R^2 - a^2}}{4},$$

n, a, R, par les valeurs respectives qu'on vient d'obtenir [n doit être remplacé par $\frac{n}{2}$ pour le premier polygone, par $2n$ pour le second; il reste le même pour le troisième].

FIG. 107. THÉORÈME IV. (*Fig.* 107.)

N° 256. — *Connaissant les aires* A, B, *de deux polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit d'un nombre* n *de côtés* [AB et MN en sont les côtés], on peut toujours obtenir *les aires* A', B', *des deux polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit, d'un nombre* DOUBLE *de côtés.*

Nous avons déjà vu (n° 166) que AI et mn sont les côtés de ces deux polygones.

Remarquons en outre que l'on a, d'après la *figure*, les relations suivantes :

$A = 2n.OAK$, $B = 2n.OMI$, $A' = 2n.OAI$, $B' = 2n.OAmI$;

d'où il suit que les rapports entre les aires A, B, A', B', comparées deux à deux, sont les mêmes qu'entre les aires des trois triangles OAK, OMI, OAI, et du quadrilatère OAmI; ainsi, tout se réduit à déterminer les rapports qui existent entre ces quatre dernières figures.

Cela posé, on a d'abord, en comparant les trois triangles OMI,

OAI, OAK, et observant que AK est parallèle à MI,

$$\text{OMI} : \text{OAI} :: \text{OAI} : \text{OAK} \quad (\text{n}^\circ\ 219, \textit{scolie}),$$

ou, remplaçant ces rapports de triangles par ceux des polygones,

$$\text{B} : \text{A}' :: \text{A}' : \text{A};$$

donc déjà (1) $\text{A}' = \sqrt{\text{A}.\text{B}}.$

En second lieu, comme dans le triangle OMI, la droite Om divise l'angle O en deux parties égales, on a la proportion

$$\text{M}m : m\text{I} :: \text{OM} : \text{OI} \quad (\text{n}^\circ\ 202).$$

Or, les deux triangles OMm, OmI, ayant même hauteur OI, donnent

$$\text{OM}m : \text{O}m\text{I} :: \text{M}m : m\text{I} \quad (\text{n}^\circ\ 218);$$

et d'un autre côté, les triangles OAI, OAK, ayant aussi même hauteur AK, on a

$$\text{OAI} : \text{OAK} :: \text{OI} : \text{OK} :: \text{OM} : \text{OA} :: \text{OM} : \text{OI};$$

il en résulte donc $\text{OM}m : \text{O}m\text{I} :: \text{OAI} : \text{OAK},$

et par conséquent,

$$\text{OM}m + \text{O}m\text{I} : \text{O}m\text{I} :: \text{OAI} + \text{OAK} : \text{OAK},$$

ou, doublant les conséquents, et observant que

$$\text{OM}m + \text{O}m\text{I} = \text{OMI}, \quad \text{et} \quad 2\text{O}m\text{I} = \text{OA}m\text{I},$$

$$\text{OMI} : \text{OA}m\text{I} :: \text{OAI} + \text{OAK} : 2\,\text{OAK}.$$

Substituant enfin, conformément à la remarque qui a été faite plus haut, à la place des trois triangles OMI, OAI, OAK, et du quadrilatère OAmI, les polygones dont ils font partie, on obtient

$$\text{B} : \text{B}' :: \text{A} + \text{A}' : 2\,\text{A}.$$

Donc $\text{B}' = \dfrac{2\,\text{A}.\text{B}}{\text{A}+\text{A}'}$ ou $\text{B}' = \dfrac{2\,\text{A}.\text{B}}{\text{A} + \sqrt{\text{A}.\text{B}}}.$

C. Q. F. D.

Scolie. — En jetant les yeux sur les deux formules qu'on vient

d'obtenir, il est aisé de voir que l'on a les deux relations $A' > A$, mais $B' < B$.

En effet, on a d'abord $\sqrt{A.B} > \sqrt{A.A} > \sqrt{A^2} > A$; donc $A' > A$.

Ensuite $\frac{2A.B}{A + A'}$, pouvant se mettre sous la forme $B \times \frac{2A}{A+A'}$, est moindre que B, puisque $\frac{2A}{A+A'}$ est $< \frac{2A}{2A}$ ou < 1.

Ainsi, — *Les aires des polygones réguliers inscrits* à une même circonférence de cercle, *augmentent de plus en plus*; — et, au contraire, — *Les polygones réguliers circonscrits diminuent de plus en plus, à mesure que le nombre des côtés devient de* 2 *en* 2 *fois plus grand.*

C'est ce qu'on reconnaît aussi facilement à l'inspection de la figure. — Cette remarque nous sera bientôt fort utile.

Évaluation des côtés et des aires dans les polygones réguliers d'une espèce donnée.

FIG. 158. THÉORÈME V. (*Fig.* 158.)

N° 237. — *Le côté* AB *de l'hexagone régulier inscrit est égal au rayon.*

Menons OA et OB; l'angle O du triangle OAB vaut les $\frac{4}{6}$ ou les $\frac{2}{3}$ d'*un angle droit* (n° 80); il reste donc pour les deux autres angles, $2 - \frac{2}{3}$, ou les $\frac{4}{3}$ d'*un angle droit*; et comme on a $OA = OB$, il en résulte *angle* $OAB =$ *angle* $OBA = \frac{2}{3}$; ainsi le triangle OAB est *équilatéral*, et donne

$$AB = OA = OB = R;$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I. — *Le côté* AC *du triangle équilatéral inscrit est au rayon dans le rapport* $\sqrt{3} : 1$.

Si l'on fait dans l'expression (1) du *numéro* 238, $a = R$, on trouve

$$AC = \frac{R}{R} \cdot \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3};$$

d'où $$\mathrm{AC} : \mathrm{R} :: \sqrt{3} : 1.$$

Corollaire II. — Le côté du triangle équilatéral *circonscrit* est *double* du côté du triangle équilatéral inscrit.

Il suffit, pour le faire voir, de remplacer dans la valeur de MN (n° 235), a par $\mathrm{R}\sqrt{3}$; ce qui donne

$$\mathrm{MN} = \frac{2\mathrm{R}\sqrt{3}.\mathrm{R}}{\sqrt{4\mathrm{R}^2 - 3\mathrm{R}^2}} = 2\mathrm{R}\sqrt{3}.$$

N. B. — *La hauteur* EL du premier triangle est égale à $\frac{3}{2}\mathrm{R}$: car on a $\mathrm{EL} = \mathrm{EO} + \mathrm{OL} = \mathrm{R} + \frac{1}{2}\mathrm{R}$ (n° 76), puisque la figure OABC est un losange ; donc $\mathrm{EL} = \frac{3}{2}\mathrm{R}$.

Donc *la hauteur* du second *est égale* à $3\mathrm{R}$ (n° 220).

Corollaire III. — Si dans l'expression (2) du *numéro* 235, on pose $a = \mathrm{R}$, ce qui donne

$$\mathrm{AI} = \sqrt{2\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}\sqrt{3\mathrm{R}^2}} = \mathrm{R}\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

on obtient ainsi le *côté du dédécagone régulier inscrit* (n° 37).

Corollaire IV. — Enfin, soit posé dans les expressions (2) du *numéro* 238, $a = \mathrm{R}$, on trouve pour les valeurs du *rayon* et du *côté* de l'*hexagone régulier circonscrit*,

$$\mathrm{OM} = \frac{2\mathrm{R}^2}{\sqrt{3\mathrm{R}^2}} = \frac{2}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad \mathrm{MN} = \frac{2}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}.$$

Scolie. — Ensuite, à l'aide de la formule générale du *numéro* 233, savoir :

$$\mathrm{A} = \frac{na\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}}{4},$$

on peut calculer les aires de ces différents polygones.

Ainsi, par exemple, si l'on fait $n = 6$, $a = \mathrm{R}$, on obtient pour l'expression de l'*aire* de l'*hexagone régulier inscrit*,

$$\mathrm{A} = \frac{6\mathrm{R}\sqrt{3\mathrm{R}^2}}{4} = \frac{3}{2}\mathrm{R}^2\sqrt{3}.$$

De même, en posant $n = 3$, $a = R\sqrt{3}$, on trouve

$$A = \frac{3R\sqrt{3}.\sqrt{R^2}}{4} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3};$$

et *ainsi de suite*.

Fig. 159. THÉORÈME VI. (*Fig.* 159.)

N° 238. — *Le côté du carré inscrit est au rayon dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.*

Menons les deux diamètres AB, CD, perpendiculaires entre eux, et tirons les cordes AC, CB, BD, DA. La figure ADBC est évidemment un carré; et l'on a

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 = 2R^2;$$

d'où $AC = R\sqrt{2}$, et $AC : R :: \sqrt{2} : 1$.

SCOLIE. — En menant aux points A, D, B, C, des tangentes, on forme le carré circonscrit; et l'on a

$$AN = AB = 2R.$$

Ainsi, — *Le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle.*

Les aires de ces deux polygones sont d'ailleurs exprimées respectivement par $2R^2$ et $4R^2$.

Fig. 160. THÉORÈME VII. (*Fig.* 160.)

N° 239. — *Le côté* AB *du décagone régulier inscrit est égal au plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême* (n° 228, *scolie*).

Menons les rayons OA, OB. — L'angle O du triangle OAB est égal à $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ d'*un angle droit* (n° 86); il reste donc $2 - \frac{2}{5}$, ou $\frac{8}{5}$, pour la somme des deux autres angles; et comme $OA = OB$, il s'ensuit que $OAB = OBA = \frac{4}{5}$.

Ainsi chacun des angles à la base du triangle OAB, est double de l'angle au sommet.

Cela posé, tirons la bissectrice BL de l'angle OBA ; on a la proportion AL : LO :: AB : OB (nº 20).

Mais, à cause de

$$\text{LBO} = \text{LBA} = \text{LOB} = \frac{2}{5}, \quad \text{d'où} \quad \text{ALB} = 2\text{LOB} = \frac{4}{5},$$

les deux triangles OLB, ALB, sont aussi isoscèles, et donnent

$$\text{OL} = \text{LB} = \text{AB};$$

et comme on a d'ailleurs $\text{OB} = \text{OA}$,

la proportion devient

$$\text{AL} : \text{OL} :: \text{OL} : \text{OA}.$$

D'où l'on voit que le point L divise le rayon OA en moyenne et extrême, et que le plus grand segment OL est égal à AB, côté du décagone régulier;

C. Q. F. D.

Pour obtenir la *valeur numérique* de ce côté, il faut avoir recours à la *figure* 154, dans laquelle nous supposerons que PB représente le rayon R de la circonférence, et PA″ le côté cherché AB. Fig. 154.

Or, d'après le scolie du nº 228, le triangle rectangle PBO donne

$$\text{OP} = \sqrt{\text{OB}^2 + \text{PB}^2}; \quad \text{d'où} \quad \text{OP} - \text{OA}' = \sqrt{\text{OB}^2 + \text{PB}^2} - \text{OA}';$$

et, d'après les constructions indiquées dans ce même *numéro,* on a

$$\text{PB} = \text{AA}', \quad \text{PA}'' = \text{PA}' = \text{OP} - \text{OA}', \quad \text{OB} = \frac{1}{2}\text{AA}' = \frac{1}{2}\text{PB};$$

donc l'égalité ci-dessus devient

$$\text{PA}'' = \sqrt{\frac{1}{4}\text{PB}^2 + \text{PB}^2} - \frac{1}{2}\text{PB}, = \frac{1}{2}\text{PB}(\sqrt{5} - 1),$$

ou, remplaçant PB et PA″ par leurs valeurs R et AB,

$$\text{AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\text{R}. \ (*)$$

(*) Cette question, traitée par l'algèbre, donne lieu à une équation du

SCOLIE. — On pourrait, à l'aide des expressions obtenues dans le *numéro* 235, déduire de la valeur précédente, celles des côtés du *pentagone* et des polygones de 20, 40,... côtés, et par suite, celles des polygones circonscrits correspondants.

Mais il existe une relation très-remarquable entre le rayon et les deux côtés du décagone et du pentagone.

FIG. 160. Considérons les côtés AB, BC (*fig.* 160), du décagone, et le côté AC du pentagone. Menons les rayons OB, OC, et la bissectrice OK de l'angle BOC; puis joignons le point B au point I où cette bissectrice coupe le côté AC.

Cela posé, les deux triangles isoscèles ABC, BIC, sont semblables comme ayant l'angle C commun, et les angles CAB, IBC, égaux tous deux à l'angle C; on a donc la proportion

$$AC : BC :: BC : IC; \quad \text{d'où} \quad AC \times IC = BC^2.$$

Pareillement, les deux triangles AOC, AOI, sont semblables : car ils ont d'abord l'angle A commun; de plus, les angles OCA, AOI, sont tous deux égaux aux $\frac{3}{5}$ d'*un angle droit,* le premier, comme valeur de l'angle à la base d'un pentagone régulier (n° 133), le second par construction $\left[\text{puisque } AOK = AOB + \frac{1}{2} OBC = \frac{3}{5}\right]$; et la similitude de ces triangles donne encore la proportion

$$AC : OA :: OA : AI; \quad \text{d'où} \quad AC \times AI = OA^2.$$

---

second degré, dont l'une des racines est le résultat qu'on vient d'obtenir.

Désignons par R le rayon du cercle, et par x la partie de ce rayon qui doit être *moyenne proportionnelle* : — On a la proportion

$$R : x :: x : R - x,$$

d'où l'on déduit $$x^2 + Rx = R^2,$$

ou, résolvant l'équation, $$x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

La valeur qui correspond au signe supérieur est $x = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$; et c'est la seule qui réponde directement à la question; car l'autre, outre qu'elle est négative, est numériquement plus grande que R.

Ajoutons maintenant, membre à membre, les deux égalités qu'on vient d'obtenir ; il vient

$$AC \times IC + AC \times AI, = BC^2 + OA^2,$$

ou, réduisant, $$AC^2 = OA^2 + BC^2;$$

c'est-à-dire que — *Le côté du pentagone régulier inscrit est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit seraient le rayon et le côté du décagone régulier inscrit.*

Théorème VIII.

240. — *Le côté du pentédécagone régulier inscrit est la corde de la différence entre les arcs soutendus respectivement par les côtés de l'hexagone et du décagone ;*

car on a $$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{10 - 6}{60} = \frac{1}{15};$$

ce qui fait voir encore que — *La différence entre les arcs soutendus par les côtés de l'hexagone et du décagone, est égale au quinzième de la circonférence entière.*

Corollaire. — Le *pentédécagone* étant inscrit, on en déduit facilement les polygones de 30, 60,... côtés.

Quant aux *valeurs numériques* de leurs côtés, il faudrait d'abord, pour le pentédécagone, avoir recours à la formule qui (n° **231**) donne la corde de la différence de deux arcs au moyen des cordes de ces arcs, et ensuite faire usage des formules du *numéro* **238**.

Scolie général. — Il résulte de ce qui vient d'être dit dans les quatre derniers *numéros*, et des principes établis dans ce paragraphe, que l'on a

1° — Des méthodes géométriques [c'est-à-dire des méthodes où l'on ne fait usage que de la règle et du compas] pour construire les polygones réguliers inscrits et circonscrits de 3, 6, 12, 24,..., de 4, 8, 16, 32,..., de 5, 10, 20, 40,..., enfin de 15, 30, 60,.... côtés ;

infiniment petits : — ces côtés sont dits alors les *éléments* de la courbe.

Et cette nouvelle définition du cercle, si elle ne paraît pas très-rigoureuse au premier abord, a du moins l'avantage d'introduire plus de simplicité et de précision dans les démonstrations.

D'après l'ordre logique des théories, nous devrions traiter d'abord de la *mesure des circonférences* de cercle, pour passer ensuite à la détermination des aires des figures circulaires. Mais la première question offrant, par sa nature, quelques difficultés d'exposition, et n'étant au fond qu'une série de *problèmes numériques*, sera mieux placée à la fin du paragraphe dont le 3e chapitre [celui des problèmes] doit être la suite immédiate.

Détermination des aires circulaires.

THÉORÈME I.

N° 246. — *L'aire du cercle est égale à la moitié du produit de la circonférence multipliée par le rayon.*

En effet, considérons une série de polygones réguliers circonscrits, dont le nombre de côtés devienne de 2 en 2 fois plus grand. Les superficies de tous ces polygones ont pour mesures respectives (n° 235) la moitié du produit de chaque périmètre multiplié par le rayon [lequel rayon est constant pour tous ces polygones]; donc aussi l'*aire du cercle*, qui est *la limite* de ces polygones (n° 244), a pour expression la moitié du produit de la circonférence [*limite* des périmètres], multipliée par le rayon.

AUTREMENT : — Tout polygone régulier ayant pour mesure la moitié du produit du périmètre par le rayon, le cercle, qui n'est autre chose qu'un polygone régulier d'un nombre infini de côtés (n° 245), a aussi la même mesure. *Donc*, etc.

SCOLIE I. — Soient R, C, et S, le rayon, la circonférence, et l'aire d'un cercle quelconque. — On a

$$S = \tfrac{1}{2}\,C.R.$$

[S est un nombre *abstrait* qui exprime le rapport de la surface du cercle à l'unité de surface, et C, R, les rapports de la circonférence et du rayon à l'unité linéaire (n° 241).]

SCOLIE II. — On peut dire aussi que — *L'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle qui aurait pour base la circonférence rectifiée* (n° **241**), *et pour hauteur le rayon du cercle.*

C'est une conséquence évidente de l'expression que l'on vient de donner pour l'aire du cercle, et de l'expression de l'aire d'un triangle (n° **218**).

THÉORÈME II.

N° **247**. — 1° — *Dans deux cercles quelconques, les circonférences* [C et C′] *sont proportionnelles aux rayons* [R et R′] ou *aux diamètres* [2R et 2R′]; — 2° — *Les aires* [S et S′] *sont proportionnelles aux carrés des rayons.*

1° — Concevons (n° **243**) une série de polygones réguliers dont le nombre des côtés devient de 2 en 2 fois plus grand, circonscrits à la circonférence C, puis une série de polygones, circonscrits à la circonférence C′, et semblables aux premiers; et désignons par R, R′, les apothèmes constants de ces deux séries de polygones, par P, P′, les périmètres de deux polygones semblables, pris, l'un dans la première série, l'autre dans la seconde.

Cela posé, nous aurons (n° **234**) la proportion

$$P : P' :: R : R',$$

proportion applicable à deux quelconques de ces polygones semblables; donc elle devra encore exister pour les *limites* C et C′ de leurs périmètres : ce qui donne

$$C : C' :: R : R', \quad \text{ou} \quad :: 2R : 2R';$$

2° — Multiplions cette dernière proportion par la proportion évidente $\frac{1}{2}R : \frac{1}{2}R' :: R : R', \quad \text{ou} \quad :: 2R : 2R';$

il vient $C \times \frac{1}{2}R : C' \times \frac{1}{2}R' :: R^2 : R'^2, \quad \text{ou} \quad :: 4R^2 : 4R'^2.$

Or, on a $C \times \frac{1}{2}R = S, \; C' \times \frac{1}{2}R' = S';$

donc $S : S' :: R^2 : R'^2, \quad \text{ou} \quad :: 4R^2 : 4R'^2;$

C. Q. F. D.

AUTREMENT : — Les cercles pouvant être considérés comme des polygones réguliers semblables d'un nombre infini de côtés, on peut leur appliquer les deux propriétés du *numéro* 234; donc, *etc.*, *etc.*

N° 248. — COROLLAIRE. — La proportion $C : C' :: 2R : 2R'$

peut être mise sous la forme $C : 2R :: C' : 2R'$;

et comme on aurait pour un nombre quelconque de circonférences, $C : 2R :: C' : 2R' :: C'' : 2R'' :: C''' : 2R''' :: \ldots$,

on peut en conclure que

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant, — quel que soit le cercle que l'on considère.

N° 249. — SCOLIE I. — On désigne ordinairement par π ce nombre constant, qui joue un très-grand rôle dans toutes les parties des *Mathématiques*.

C'est ce nombre, ou le *rapport de la circonférence au diamètre*, dont la détermination complétera ce paragraphe; mais on peut prouver dès à présent qu'il est *compris entre* 3 *et* 4.

En effet, on sait (n° 243) que — *Toute circonférence* C *est plus grande que le périmètre de l'hexagone régulier inscrit, et moindre que celui du carré circonscrit.*

Or, en désignant le rayon par R, on a 6R pour le périmètre du premier (n° 237), et 8R pour celui du second; ce qui donne

$$C > 6R, \quad \text{et} \quad C < 8R,$$

d'où, en divisant par 2R, et remplaçant $\frac{C}{2R}$ par π,

$$\pi > 3, \quad \text{et} \quad \pi < 4;$$

ainsi le nombre π est compris entre 3 et 4;

C. Q. F. D.

N° 250. — SCOLIE II. — Soient R, C, et S, le rayon, la circonférence, et l'aire d'un cercle quelconque.

La proportion $\pi : 1 :: C : 2R$ donne $C = 2\pi R$,

d'où, en multipliant par $\frac{1}{2}$ R, $\quad C \times \frac{1}{2} R = S = \pi R^2$;

ce qui démontre que, pour obtenir *la longueur de la circonférence*, il faut *multiplier par* le nombre constant π *la longueur du rayon* de cette circonférence [ce rayon étant évalué en unités linéaires quelconques]; — quant à l'*aire du* même *cercle*, il faut *multiplier par* π *le carré du rayon*.

THÉORÈME III. (*Fig.* 163.) FIG. 163.

N° **251**. — *L'aire d'un secteur circulaire* OAB *est égale à la moitié du produit de l'arc* AB [rectifié (n° **241**), que l'on nomme sa *base*] *multiplié par le rayon* OA.

En effet, il résulte évidemment de la définition du secteur circulaire (n° **14**), que deux secteurs quelconques d'un même cercle sont proportionnels aux angles, et par conséquent (n° **118**) aux arcs qui leur correspondent.

Ainsi, comparant le secteur OAB au secteur OAC qui correspond à l'angle *droit*, AOC, on a la proportion

$$\textit{secteur}\, OAB : \textit{secteur}\, OAC :: \textit{arc}\, AB : \textit{arc}\, AC,$$

ou, multipliant les deux conséquents par 4, et désignant par C, S, la circonférence et l'aire du cercle,

$$\textit{secteur}\, OAB : S :: \textit{arc}\, AB : C.$$

Multipliant de nouveau par $\frac{1}{2}$ R les deux derniers termes, on

obtient $\quad \textit{secteur}\, OAB : S :: \textit{arc}\, AB \times \frac{1}{2} R : C \times \frac{1}{2} R$;

mais on a $\quad C \times \frac{1}{2} R = S \quad$ (n° **246**);

donc aussi $\quad \textit{secteur}\, OAB = \textit{arc}\, AB \times \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \textit{arc}\, AB \times R$;

C. Q. F. D.

N. B. — On peut dire encore que — *L'aire d'un secteur est égale à celle d'un triangle ayant pour base l'arc* [rectifié] *et pour hauteur le rayon du cercle.* — (*Voir* le *scolie* II du n° **246**.)

COROLLAIRE. — *Le segment circulaire* ANB (n° **14**) *a pour mesure la moitié du produit du rayon* OA *multiplié par la différence*

entre l'arc AB *et la moitié de la corde qui soutend l'arc double de* AB.

Car on a *segment* ANB = *secteur* OANB — *triangle* OAB;

or, *secteur* OANB = $\frac{1}{2}$ *arc* AB × OA, comme on vient de le voir; et, si l'on prend OA pour base du triangle OAB, sa hauteur est alors la perpendiculaire BD abaissée du point B sur OA, ce qui donne *triangle* OAB = $\frac{1}{2}$ BD × OA (n° 218).

Par suite, *segment* ANB = $\frac{1}{2}$ OA (*arc* AB — BD); mais BD est évidemment (n° 108) la moitié de la corde AB qui soutend l'arc BAB′ double de BA. *Donc*, etc.

N° 252. — *Deux secteurs* sont *semblables* dans des cercles de rayons différents, lorsqu'ils *correspondent à un même angle au centre*.

Fig. 164. Théorème IV. (*Fig.* 164.)

Les aires de deux secteurs semblables, OAB, OA′B′, *sont directement proportionnelles aux carrés des rayons* ou *des arcs qui leur servent de bases*.

On a en effet

secteur OAB : *secteur* OA′B′ :: *arc* AB × $\frac{1}{2}$ OA : *arc* A′B′ × $\frac{1}{2}$ OA′;

mais les arcs AB, A′B′, étant évidemment dans le même rapport que les circonférences auxquelles ils appartiennent, et celles-ci dans le rapport des rayons OA, OA′ (n° 247), il en résulte

arc AB : *arc* A′B′ :: OA : O′A′,

d'où *arc* AB × $\frac{1}{2}$ OA : *arc* A′B′ × $\frac{1}{2}$ OA′ :: OA^2 : OA'^2.

Donc aussi

secteur OAB : *secteur* OA′B′ :: OA^2 : OA'^2,

et, par suite,

secteur OAB : *secteur* OA′B′ :: $(arc\ AB)^2$: $(arc\ A'B')^2$;

C. Q. F. D.

Scolie I. — La différence AA′B′B entre les deux secteurs sem-

blables OAB, OA′B′, se nomme un *trapèze circulaire*. Or, on peut obtenir une expression assez simple de l'aire de ce trapèze.

Pour cela, élevons aux points B, B′, les tangentes indéfinies BL, B′L′, et concevons qu'à partir du point B, on ait *développé* l'arc BA sur la tangente BL, c'est-à-dire qu'on ait pris une partie BK égale à cet arc *rectifié*; tirons OK, qui rencontre B′L′ en K′: je dis d'abord que B′K′ représente aussi l'arc B′A′ rectifié.

Car les triangles semblables OBK, OB′K′, et les secteurs OAB, OA′B′, donnent les deux proportions:

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OB'} :: \mathrm{BK} : \mathrm{B'K'},$$

$$\mathrm{OB} : \mathrm{OB'} :: \mathit{arc}\ \mathrm{BA} : \mathit{arc}\ \mathrm{B'A'},$$

d'où
$$\mathrm{BK} : \mathrm{B'K'} :: \mathit{arc}\ \mathrm{BA} : \mathit{arc}\ \mathrm{B'A'};$$

mais $\mathrm{BK} = \mathit{arc}\,\mathrm{BA}$ par construction; donc aussi $\mathrm{B'K'} = \mathit{arc}\,\mathrm{B'A'}$.

Cela posé, les deux secteurs circulaires OAB, OA′B′, étant respectivement équivalents aux triangles OBK, OB′K′ (nº 281, *N. B.*), il en résulte que le trapèze circulaire AA′B′B est équivalent au trapèze rectiligne KBB′K′.

Mais celui-ci a pour mesure $\dfrac{\mathrm{BK} + \mathrm{B'K'}}{2} \times \mathrm{BB'}$ (nº 218, *corol.* 2);

donc
$$\mathit{trapèze}\ \mathrm{AA'B'B} = \frac{\mathit{arc}\ \mathrm{AB} + \mathit{arc}\ \mathrm{A'B'}}{2} \times \mathrm{BB'};$$

ce qui démontre que — *L'aire d'un trapèze circulaire est égale au produit de la demi-somme de ses bases par la différence des rayons.*

N. B. — Il serait d'ailleurs facile de prouver, comme ci-dessus, que la demi-somme des bases [ou la *moyenne différentielle* entre ces deux bases] n'est autre chose que l'arc A″B″ concentrique avec AB, A′B′, et passant par le milieu de BB′.

SCOLIE II. — La *couronne circulaire*, c'est-à-dire l'espace compris entre deux circonférences concentriques OB, OB′ (*fig.* 163), n'est qu'un cas particulier du trapèze circulaire; et par conséquent son aire a pour expression: *le produit de la circonférence* OB″, FIG. 163.

moyenne différentielle entre les circonférences qui la terminent, *multipliée par la largeur* BB′ [différence des rayons OB, OB′].

Mais on peut obtenir une autre expression de cette aire :

Nommons R et R′ les rayons de deux circonférences concentriques. On a

$$cour.\ circ. = cercle\ R - cercle\ R',$$

ou bien $cour.\ circ. = \pi R^2 - \pi R'^2 = \pi (R^2 - R'^2)$ (n° 250);

mais $\pi (R^2 - R'^2) = \pi (R + R')(R - R')$;

et si l'on pose la proportion $R + R' : R'' :: R'' : R - R'$,

il en résulte $R''^2 = (R + R')(R - R')$,

d'où, par conséquent, $cour.\ circ. = \pi R''^2$;

donc — *L'aire d'une couronne circulaire est égale à celle d'un cercle dont le rayon est* MOYEN PROPORTIONNEL [par quotient] *entre la somme et la différence des rayons des deux circonférences concentriques* qui la comprennent, ou bien encore — *d'un cercle ayant pour diamètre une corde* II′ *de la plus grande circonférence* OB, *menée tangentiellement à la plus petite* OB′ (n° 226, *scol.* I).

Il serait d'ailleurs facile de prouver la concordance de ces deux expressions avec l'expression donnée ci-dessus.

REMARQUE *sur les lignes brisées régulières*, ou *portions régulières de polygones.*

FIG. 165. N° 253. — Soit AB (*fig.* 165) un arc de cercle terminé aux deux rayons OA, OB; et concevons cet arc divisé en un nombre quelconque de parties égales; puis tirons les cordes AC, CD,..., des nouveaux arcs. Nous obtenons ainsi une ligne brisée ACD..... B, dite *régulière*, qui, avec les rayons OA, OB, détermine une portion de plan que nous nommerons *secteur polygonal* [par analogie avec le secteur circulaire], et de plus, *secteur polygonal régulier*, attendu que ce secteur jouit des propriétés principales des polygones réguliers.

D'abord, les côtés AC, CD,..., sont tous égaux (n° 108); en outre les triangles OAC, OCD,..., sont égaux et isoscèles; d'où

il suit que *les angles au centre*, ainsi que *les angles à la base* de tous ces triangles, *sont égaux*; enfin, *les perpendiculaires* abaissées du centre sur les côtés, *sont égales*. — Donc le cercle décrit du point O avec un rayon égal à l'une de ces perpendiculaires, sera tangent à tous les côtés du secteur polygonal; et la portion de circonférence, terminée aux rayons OA, OB, pourra être considérée comme un arc de cercle inscrit à ce secteur.

Chaque triangle, tel que OAC, ayant pour mesure $AC \times \frac{1}{2} OI$, on peut en conclure que — *L'aire du secteur polygonal* est *égale à la moitié du produit de son périmètre* [ou de la ligne brisée qui le termine] *multiplié par l'apothème*, c'est-à-dire par le rayon du cercle inscrit, etc.

Tant que l'arc AB sera une *partie aliquote* de la circonférence OA, le secteur polygonal sera lui-même une partie aliquote d'un certain polygone régulier inscrit à la circonférence entière. Mais comme le rapport de l'arc à la circonférence est tout à fait quelconque, c'est-à-dire qu'il peut être incommensurable, on ne peut pas dire en général, que le secteur correspondant est une portion de polygone régulier.

Maintenant, par les milieux G, K,..., des arcs AC, CD,..., menons des tangentes; et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre en A′, C′,..., B′, avec les rayons OA, OC,..., OB [on prouverait facilement que la rencontre a lieu sur ces rayons]: nous obtiendrons ainsi un nouveau *secteur polygonal régulier* qui sera semblable au premier comme composé de triangles OA′C′, OC′D′,..., semblables aux triangles OAC, OCD,....

Ainsi les *périmètres* de ces secteurs, ou les *lignes brisées régulières* qui leur correspondent, sont *proportionnelles aux rayons* du cercle inscrit et du cercle circonscrit; — et leurs *aires* sont *proportionnelles aux carrés des mêmes rayons*.

Appelons B l'aire du secteur polygonal circonscrit, P la ligne brisée correspondante, R le rayon du cercle donné, nous aurons

$$B = P \times \tfrac{1}{2} R, \quad \text{et} \quad \textit{secteur circulaire } OAB = \textit{arc } AB \times \tfrac{1}{2} R.$$

Mais ce dernier secteur est évidemment, d'après la figure, *moindre* que le secteur polygonal. — D'où l'on conclut, à cause du facteur commun $\frac{1}{2}R$, *arc* $AB < P$.

D'ailleurs, l'*arc* AB *est* évidemment *plus grand que toute* ligne brisée inscrite à cet arc.

Donc l'*arc* [rectifié] qui sert de base au secteur circulaire, *est toujours compris*, pour sa valeur numérique, *entre les deux lignes brisées*.

Enfin, par des raisonnements analogues à ceux du n° 244 (voyez la note au bas de la page 206), on prouverait que

La différence entre l'arc et l'une des deux lignes brisées, ou bien *entre le secteur circulaire et l'un des deux secteurs polygonaux*, *peut devenir moindre qu'aucune grandeur donnée*, etc., etc.

Rapport de la circonférence au diamètre.

On démontre par des moyens qui sortent tout à fait des éléments, que le nombre π est *incommensurable*. Mais il existe des méthodes à l'aide desquelles ce nombre peut être calculé avec tout le degré d'approximation qu'on peut désirer.

Nous nous bornerons à exposer ici les trois méthodes élémentaires principales.

Première méthode.

N° 284. — Le premier moyen qui se présente à l'esprit consiste à *évaluer*, pour le cercle dont le rayon est égal à 1, d'après la formule (2) du n° 258, *les côtés des polygones réguliers inscrits* dont le *nombre des côtés devient de 2 en 2 fois plus grand*, en partant d'un des polygones réguliers que l'on sait inscrire et dont on a immédiatement le côté.

Prenons, par exemple, pour point de départ, l'*hexagone régulier inscrit*, dont le *côté* (n° 257) est *égal au rayon*.

Il suffit de faire $a = R = 1$ dans la formule qui vient d'être citée; ce qui donne $a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ [a' désignant le nouveau côté]; d'où l'on déduit pour le périmètre du *dodécagone*, $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$, et par conséquent pour le rapport de ce périmètre au diamètre,

$$6\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Remplaçant dans la même formule (2), R par 1, a par

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \quad \text{et} \quad \text{AI par } a'',$$

on aura à calculer $$a'' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}};$$

donc le rapport du périmètre du polygone de 24 côtés à son diamètre est $$12\sqrt{2 - \sqrt{4 - a'^2}};$$

et *ainsi de suite*.

On sait d'ailleurs (n° 243) que les périmètres de ces polygones approchent de plus en plus de la circonférence à mesure que le nombre des côtés augmente. Ainsi les expressions ci-dessus [que l'on évalue ordinairement *en décimales*] donneront des valeurs de plus en plus approchées du nombre π.

Mais, pour apprécier le degré d'approximation que donne la valeur relative à chaque polygone, il convient de *calculer* d'après la formule (3) du n° 238, le *côté*, et par suite, le *demi-périmètre* du polygone circonscrit semblable à celui auquel on s'est arrêté; et alors *la partie décimale commune* aux expressions des demi-périmètres du polygone inscrit et du polygone circonscrit, représente la valeur de π avec une approximation marquée par l'*unité du dernier ordre* de cette partie commune.

Seconde méthode.

N° 255. — On a démontré (n° 250) que l'*aire* du cercle qui a R pour rayon, est *égale à* πR^2.

Or, si l'on fait $R = 1$ dans cette expression, elle se réduit à π; ce qui démontre que

Le rapport de la circonférence au diamètre est égal à l'aire du cercle dont le rayon est pris pour unité.

Cela posé, prenons pour point de départ le *carré inscrit* et le *carré circonscrit*, dont les *aires* (n° 238) sont exprimées respectivement par 2 et 4; et dans les formules du n° 256,

$$A' = \sqrt{A.B}, \quad B' = \frac{2A.B}{A + A'} \quad \text{posons} \quad A = 2, \quad B = 4;$$

il vient $A' = \sqrt{8}$, $B' = \dfrac{16}{2+\sqrt{8}} = \dfrac{8}{1+\sqrt{2}} = 8(\sqrt{2}-1)$

[on a fait disparaître l'irrationalité du dénominateur]; et ces expressions, réduites en décimales, donneront les valeurs des aires de l'octogone inscrit et de l'octogone circonscrit.

Remplaçant dans les mêmes formules, A et B par les expressions qui viennent d'être trouvées pour A' et B', on obtiendra les aires A'' et B'' des polygones inscrits et circonscrits de *seize* côtés; — et ainsi de suite.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur cette méthode; et nous observerons seulement que, si l'on évaluait la différence $(B' - A')$ au moyen de la différence $(B - A)$, on trouverait

$$B' - A' < \frac{1}{4}(B - A)\ (*);$$

ce qui démontre que, pour un couple de polygones inscrit et circonscrit, d'un rang déterminé, l'*erreur* commise est *moindre que le quart* de l'erreur commise dans le calcul du couple précédent.

(*) Voici le calcul algébrique :

On a $$B' - A' = \frac{2AB}{A+\sqrt{AB}} - \sqrt{AB} = \frac{AB - A\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}},$$

ou bien $$B' - A' = \frac{B\sqrt{A} - A\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{AB}(\sqrt{B}-\sqrt{A})}{\sqrt{B}+\sqrt{A}},$$

ou, multipliant haut et bas par $\sqrt{B}+\sqrt{A}$,

$$B' - A' = \frac{\sqrt{AB}}{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2}(B - A).$$

Or, l'inégalité évidente $(\sqrt{B}-\sqrt{A})^2 > 0$ donne $B + A - 2\sqrt{AB} > 0$;

d'où, en ajoutant $4\sqrt{AB}$, $(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2 > 4\sqrt{AB}$;

donc $\dfrac{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2}{\sqrt{AB}} > 4$, et par conséquent, $\dfrac{\sqrt{AB}}{(\sqrt{B}+\sqrt{A})^2} < \dfrac{1}{4}$;

donc enfin $B' - A' < \frac{1}{4}(B - A)$; *C. Q. F. D.*

Troisième méthode.

N° 256. — Au lieu de chercher la valeur approchée d'une circonférence, ou de l'aire d'un cercle dont le rayon est égal à 1, on peut, au contraire, *Chercher la valeur du rayon pour une circonférence donnée.* — Cette méthode, que l'on nomme la méthode par les *isopérimètres* (n° 242), est préférable aux deux précédentes, à cause de la simplicité des formules dont elle exige l'emploi.

Elle est fondée sur le lemme suivant :

LEMME. (*Fig.* 166.) FIG. 166.

Étant donnés le rayon R, *et l'apothème* r, *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R′, *et l'apothème* r′, *d'un polygone régulier isopérimètre, d'un nombre double de côtés.*

ANALYSE et SYNTHÈSE. — Construisons le cercle circonscrit au polygone donné; et soient AB l'un des côtés, AOB l'angle au centre de ce polygone, OA = R le rayon, et OP = r l'apothème.

Cela posé, l'angle au centre du nouveau polygone devant être moitié de l'angle AOB (n° 133), si nous prolongeons PO jusqu'à sa rencontre en C avec la circonférence, et que nous menions les cordes AC, BC, l'angle ACB, moitié de AOB (n° 122), est l'angle du nouveau polygone.

De même, si nous abaissons OA′ perpendiculaire sur CA, et que nous menions A′B′ parallèle à AB, nous aurons $A'B' = \frac{1}{2}AB$ (n° 184, *scolie* I) pour le côté de ce polygone, ainsi que CA′, CP′, pour son rayon et son apothème.

Tout se réduit donc à déterminer $OA' = R'$, $OP' = r'$. Or, les triangles semblables CAP, CA′P′, donnent d'abord

$$CP' = \tfrac{1}{2}CP = \tfrac{1}{2}(CO + OP) = \tfrac{1}{2}(OA + OP);$$

donc 1° $$r' = \tfrac{1}{2}(R + r).$$

En second lieu, le triangle rectangle OA′C donne (n° 203)

$$CA'^2 = CO \times CP' = OA \times CP';$$

donc 2° $$R' = \sqrt{R \times r'};$$

et comme r' est déjà déterminé, le problème est résolu.

N. B. — Ces formules sont beaucoup plus simples que celles des deux autres méthodes, puisqu'elles n'exigent que la détermination de *moyennes proportionnelles* alternativement par différence $[\frac{1}{2}(R + r)]$ et par quotient $[\sqrt{R \times r'}]$.

Scolie I. — De la première de ces deux formules, à cause de $r < R$, on déduit $r' > \frac{1}{2}(r + r)$, ou $r' > r$;

et la seconde, à cause de $r' < \frac{1}{2}(R + R) < R$,

donne $R' < \sqrt{R \times R}$, ou $R' < R$;

ce qui fait voir que le *rayon* du second polygone est *moindre* que celui du premier; tandis qu'au contraire, l'*apothème* du second polygone est *plus grand* que celui du premier. — D'où il suit que

La différence entre le rayon et l'apothème diminue indéfiniment à mesure que le nombre des côtés devient plus grand.

Scolie II. — De plus, on peut faire voir, comme dans le numéro précédent, que *la différence* $(R' - r')$ *est moindre que le quart de la différence* $(R - r)$.

En effet, soit c le côté du polygone qui est pris pour point de départ; $\frac{c}{2}$ est alors le côté du polygone isopérimètre d'un nombre double de côtés; et l'on a (n° 258) les deux relations

$$R^2 - r^2 = \frac{c^2}{4}, \quad R'^2 - r'^2 = \frac{c'^2}{4} = \frac{c^2}{16} = \frac{1}{4}(R^2 - r^2);$$

d'où l'on déduit

$$R' - r' = \frac{1}{4}(R - r) \times \frac{R + r}{R' + r'} = \frac{1}{4}(R - r)\frac{2r'}{R' + r'};$$

donc, à cause de $2r' < R' + r'$,

$$R' - r' < \frac{1}{4}(R - r); \qquad C. Q. F. D.$$

Ceci démontre avec quelle rapidité diminuent les différences $(R-r)$, $(R'-r')$, $(R''-r'')$ [*voyez* la note au bas de la page 223].

N° 257. — ***Application des deux formules précédentes au calcul du nombre π.***

Observons d'abord que, toute circonférence de cercle étant (n° **244**) la *limite supérieure* d'une série de polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés devient de 2 en 2 fois plus grand, si nous partons du *carré* par exemple, dont le côté est égal à 1, ce qui donne 4 pour son périmètre, et que nous déterminions successivement les rayons R, R′, R″,..., puis les apothèmes r, r', r'',... de ce carré et des polygones de 8, 16, 32,... côtés, *isopérimètres* avec le carré, nous finirons par arriver au rayon $R^{(n)}$ et à l'apothème $r^{(n)}$ d'un polygone dont le périmètre, toujours égal à 4, ne différera pas sensiblement (n° **242**) d'une certaine circonférence de cercle ayant pour rayon $R^{(n)}$. — D'où il suit que $\frac{4}{R^{(n)}}$ sera une valeur très-approchée du rapport de la circonférence à son rayon ; et, en divisant par 2, on obtiendra avec une très-grande approximation, le nombre désigné par π.

Il résulte d'ailleurs de ce qui a été dit au *scolie* du *numéro* **256**, que le nombre π est toujours compris entre les différents couples d'expressions, $\frac{2}{r}$ et $\frac{2}{R}$, $\frac{2}{r'}$ et $\frac{2}{R'}$, $\frac{2}{r''}$ et $\frac{2}{R''}$,..., ce qui permet de déterminer à chaque opération le degré d'approximation obtenu pour π. — *La partie commune* aux deux expressions $\frac{2}{r^{(n)}}$, $\frac{2}{R^{(n)}}$, réduites en décimales, représente la valeur de π, à moins d'une unité près de l'ordre du dernier chiffre à droite de cette partie commune. Il ne s'agit donc plus que de savoir comment on peut calculer les nombres R et r, R′ et r', R″ et r'',....

Or, en supposant dans la *figure* 165, que $AB = 1$ soit le côté du carré, comme le triangle AOP est alors isoscèle $[AP = OP]$, on en déduit Fig. 165.

1° $\qquad OP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, d'où $r = \frac{1}{2}$;

2° $\qquad OA = \sqrt{2\,AP^2} = \sqrt{2.\frac{1}{4}}$; d'où $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

R et r étant connus, les deux formules

$$r' = \frac{1}{2}(R + r), \qquad R' = \sqrt{Rr'},$$

feraient connaître R′ et r', ou le rayon et l'apothème de l'*octogone* régulier isopérimètre avec le carré; et, en remplaçant, dans les mêmes formules, R et r par R′ et r', on obtiendrait le rayon R″ et l'apothème r'' du polygone de *seize* côtés; et ainsi de suite.

Mais si l'on veut convertir immédiatement tous ces résultats en fractions décimales, le *numéro* 286 en fournit le moyen.

Après avoir *réduit en décimales* $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $r = \frac{1}{2}$, *on fait la demi-somme* de ces deux fractions, ce qui donne la valeur de r'; puis *on multiplie* cette valeur de r' *par* la valeur de R, et l'*on extrait la racine carrée* du produit, ce qui donne R′.

On opère ensuite sur R′ et r' comme on a opéré sur R et r; ce qui donne R″ et r''.

Et *ainsi de suite* indéfiniment.

Ce procédé se résume dans la règle suivante :

Formez une suite de nombres commençant par 0 *et* 1, et *dont les suivants soient alternativement, à partir du troisième inclusivement, moyens par différence et moyens par quotient entre les deux qui les précèdent immédiatement : — cette suite converge sans cesse vers la valeur du rayon d'une circonférence égale à* 4.

N. B. — Toutes ces *multiplications* et *extractions de racines carrées* doivent être effectuées d'après les *méthodes abrégées* que fournit l'Arithmétique (*).

Voici d'ailleurs le tableau des calculs exécutés conformément à cette remarque :

(*) *Voyez* le *Traité d'Arithmétique* de M. Bourdon (19e édition), où les calculs relatifs à la détermination du nombre π, sont indiqués avec tous les détails nécessaires.

NOMBRE des côtés.	APOTHÈMES.	RAYONS.
4	r = 0,5000008	R = 0,7071068
8	r' = 0,6035534	R′ = 0,6532815
16	r'' = 0,6284174	R″ = 0,6407289
32	r''' = 0,6345731	R‴ = 0,6376435
64	r^{IV} = 0,6361083	R^{IV} = 0,6368754
128	r^{V} = 0,6364919	R^{V} = 0,6366836
256	r^{VI} = 0,6365878	R^{VI} = 0,6366357
512	r^{VII} = 0,6366117	R^{VII} = 0,6366237
1024	r^{VIII} = 0,6366117	R^{VIII} = 0,6366207
2048	r^{IX} = 0,6366192	R^{IX} = 0,6366199
4096	r^{X} = 0,6366195	R^{X} = 0,6366197
8192	r^{XI} = 0,6366196	R^{XI} = 0,6366196

On voit, par ce tableau, que les valeurs de r^{XI} et R^{XI} ne dif-
ent pas dans les *sept* premières décimales (*).

Ainsi une circonférence égale à 4 a pour rayon 0,6366196...,
pour diamètre 1,2732392....

(*) Il est facile de démontrer *à priori*, d'après la loi de décroissement des antités $\text{R} - r$, $\text{R}' - r'$, $\text{R}'' - r''$,..., qu'il en devait être ainsi.

En effet, on a trouvé (n° **256**, *scol.* II)

$$\text{R}' - r' < \frac{1}{4}(\text{R} - r),\quad \text{R}'' - r'' < \frac{1}{4}(\text{R}' - r') < \frac{1}{4^2}(\text{R} - r),\ldots;$$

nc, en général, $$\text{R}^{(n)} - r^{(n)} < \frac{1}{4^n}(\text{R} - r).$$

Soit $n = 11$; il en résulte $$\text{R}^{(11)} - r^{(11)} < \frac{1}{4^{11}}(\text{R} - r);$$

ais $\text{R} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $r = \frac{1}{2}$, donnent $\text{R} - r < \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) < 0,208\ldots$;
un autre côté, $4^{11} = 2^{22} = 2^{10}.2^{10}.2^2 = 1024 \times 1024 \times 4 = 4194304$;

nc $$\text{R}^{(11)} - r^{(11)} < \frac{208}{4194304000} < \tfrac{1}{2}.0,0000001;$$

C. Q. F. D.

D'où il résulte que le rapport du diamètre à la circonférence est $\frac{1,2732392\ldots}{4}$ ou 0,3183098 ; et le nombre π, ou *le rapport de la circonférence au diamètre*, a pour valeur

$$\frac{1}{0,3183098} \quad \text{ou} \quad 3,141593.$$

Cette division donne la valeur de π à moins d'*une unité* près du 6[e] ordre décimal (*) ; et si l'on voulait avoir une plus grande approximation, il faudrait d'abord calculer R, R', R'',... et r, r', r'',... avec un plus grand nombre de chiffres.

On a, par d'autres méthodes, poussé le calcul jusqu'à 140 décimales. — Voici les vingt premières, qui sont plus que suffisantes pour les usages ordinaires :

$$\pi = 3,14159265358979323846.$$

Il est quelquefois utile d'avoir son logarithme. — On a

$$\log \pi = 0,49714987269415385435.$$

N° 288. — SCOLIE. — Le nombre π, exprimé avec *cinq* décimales seulement, et converti en fraction continue, donne lieu aux réduites suivantes :

$$\frac{3}{1},\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{9208}{2931},\ldots.$$

La seconde réduite, $\frac{22}{7}$, dite *le rapport* d'ARCHIMÈDE, est assez fréquemment employée, parce qu'elle exprime π à moins d'*un centième* près. — La troisième, due à RIVARD, est peu usitée, parce que la suivante, qui porte le nom de *rapport* d'ADRIEN MÉTIUS, donne, avec le même nombre de chiffres, une bien plus grande approximation ; le nombre $\frac{355}{113}$ diffère de π de *moins d'un millionième*. — Il est d'ailleurs facile à retenir, car il s'obtient en partageant en deux tranches de trois chiffres le nombre

113 355 ;

la partie à droite est le numérateur, et *la partie à gauche* le dénominateur.

(*) *Voyez* le *Traité d'Arithmétique* cité plus haut.

Enfin, nous observerons que l'expression $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, réduite en décimales, donne $3,146\ldots$,
nombre qui ne diffère de π que d'*un demi-centième*; c'est-à-dire que le rapport de la circonférence au diamètre est à très-peu près représenté par la somme des côtés du carré et du triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont le rayon est 1 (nos **237**, **238**).

Évaluation des arcs de cercle au moyen du nombre π.

On peut *mesurer* de deux manières un arc de cercle, soit en le rapportant au *quadrant* pris pour grandeur absolue, auquel cas l'arc est exprimé en *degrés* ou en *grades* (n° **120**), soit en cherchant le *rapport* de cet *arc rectifié* (n° **241**) au *rayon* pris pour unité.

De là résultent les deux questions suivantes :

PREMIÈRE QUESTION.

N° **239**. — *Un arc étant évalué en degrés ou en grades, trouver son rapport avec le rayon.*

Remarquons d'abord que π exprimant le *rapport* de la circonférence au diamètre, ou, ce qui revient au même, celui *de la demi-circonférence au rayon*, $\frac{\pi}{2}$ est alors le *rapport du quadrant au rayon*.

Cela posé, il est clair que, pour évaluer en unités de rayon un arc quelconque A dont on connaît le nombre de *degrés* ou de *grades*, il suffit de *multiplier par* $\frac{\pi}{2}$ *le nombre abstrait* $\frac{m}{n}$ (n° **120**) qui exprime son rapport avec le quadrant; ce qui donne la formule

$$(1) \qquad A = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Réciproquement. SECONDE QUESTION :

Connaissant le rapport d'un arc A [rectifié] *au rayon, trouver*

le nombre de degrés ou *de grades* qu'il renferme, ou son *rapport au quadrant*.

On déduit de la formule ci-dessus,

$$(2) \qquad \frac{m}{n} = A : \frac{\pi}{2};$$

ce qui démontre que, pour obtenir le rapport demandé, il faut *diviser le nombre abstrait donné*, supposé réduit en décimales, *par la valeur de π* évaluée aussi en décimales, puis *convertir* [d'après les règles connues de l'Arithmétique] *le quotient obtenu en degrés* ou *en grades*, suivant que l'on a adopté la division *sexagésimale* ou la division *centésimale*.

Nous donnerons dans le 3e *chapitre*, des applications de ces deux règles.

Scolie. — Ces deux règles exigent une modification lorsque le rayon R de l'arc que l'on considère, n'est pas lui-même pris pour unité : on doit, conformément à ce qui a été dit au n° **250** (*scol.* II) dans le premier cas, *multiplier par* R, et dans le second, *diviser par* R, le résultat auquel on est parvenu ; ce qui donne alors

$$A = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{n} = A : \frac{\pi}{2R}.$$

Remarques sur la mesure des angles, et sur les rapports des arcs décrits avec des rayons différents.

N° **260**. — Première remarque. — On a démontré (n° **119**) que l'angle au centre a pour mesure l'arc de cercle compris entre ses côtés, en se fondant sur ce que *deux angles au centre sont proportionnels aux arcs* qu'ils comprennent, et qu'on suppose décrits avec le même rayon. — Mais on peut se demander quel serait le *rapport de deux angles*, et par suite, quelle serait la *mesure d'un angle*, si les *arcs* étaient *décrits avec des rayons différents ?*

Pour résoudre cette question, considérons deux angles quelconques AOB, A'OL (*fig.* 167), que, pour plus de simplicité, nous supposons placés l'un sur l'autre de manière qu'ils aient le

Fig. 167.

sommet commun O et les côtés OA, OA′, dans la même direction ; soient d'ailleurs AB, A′B′, les arcs décrits avec les rayons OA, OA′, et C le point où l'arc A′B′ est rencontré par le côté OB.

Cela posé, les deux angles A′OC, A′OB′, correspondant à des arcs A′C, A′B′, de même rayon, on a la proportion

$$A'OC : A'OB' :: arc\ A'C : arc\ A'B' \quad (n^o\ 119),$$

ou, à cause de $A'OC = AOB$, et de $A'OB' = A'OL$,

$$AOB : A'OL :: arc\ A'C : arc\ A'B'.$$

Mais les deux secteurs semblables OAB, OA′C, donnent la proportion $arc\ A'C : arc\ AB :: OA' : OA$ (n°. 252);

d'où l'on déduit $arc\ A'C = arc\ AB \times \frac{OA'}{OA}$.

Substituant cette valeur de l'arc A′C dans la seconde proportion, on obtient

$$AOB : A'OL :: arc\ AB \times \frac{OA'}{OA} : arc\ A'\ B',$$

ou bien $AOB : A'OL :: \frac{arc\ AB}{OA} : \frac{arc\ A'\ B'}{OA'}$;

ce qui démontre que — *Les deux angles sont proportionnels aux rapports de leurs arcs respectifs aux rayons correspondants.*

Soient, en général, V et V′ deux angles quelconques, A et A′ les arcs compris entre leurs côtés, et décrits respectivement avec les rayons R et R′. — On a la proportion

$$V : V' :: \frac{A}{R} : \frac{A'}{R'}.$$

Prenant toujours l'*angle droit* pour *unité d'angle*, et supposant que V′ soit cette unité, prenons aussi pour *unité d'arc*, *l'arc correspondant* A′, décrit avec le *rayon* R′ égal à l'*unité de longueur* : il vient

$$V : 1 :: \frac{A}{R} : 1, \quad \text{d'où} \quad V = \frac{A}{R};$$

et l'on peut dire alors que — *L'angle au centre*, V, *a pour mesure le quotient de la division de l'arc* qui lui correspond, *par le rayon* R avec lequel l'arc a été décrit.

Mais pour comprendre le sens de l'égalité précédente, il ne faut pas perdre de vue (n° 119) que les grandeurs V, A, R, sont rapportées à leurs unités respectives.

N° 261. — SECONDE REMARQUE. — La proportion

$$arc\ A'C : arc\ AB :: OA' : OA,$$

dont nous nous sommes servi dans le numéro précédent, et qui existe entre deux arcs correspondant à *un même angle* au centre, pouvant être mise sous la forme

$$\frac{arc\ A'C}{arc\ AB} = \frac{OA'}{OA},$$

nous apprend que *le rapport du degré* ou *du grade*, dans un cercle R, *au degré* ou *au grade* dans un cercle R', est *égal à celui des rayons* R et R'.

Ainsi, le degré ou le grade, dans un cercle dont le rayon est 3, n'est que les $\frac{3}{4}$ du degré ou du grade, dans le cercle dont le rayon est 4.

Toutefois, chacune de ces fractions, degré, ou grade, n'en est pas moins une *même partie aliquote* constante de la circonférence à laquelle elle appartient.

La même proposition s'applique aux deux arcs quelconques, A et A', supposés rectifiés, pourvu qu'ils correspondent à *un même angle* au centre :

Car les formules $A = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R$, $A' = \frac{m'}{n'} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R'$ (n° 260, *scolie*), donnent, à cause de $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$,

$$\frac{A}{A'} = \frac{R}{R'}.$$

N° 262. — TROISIÈME REMARQUE. — Nous terminerons ce paragraphe par une proposition dont nous aurons occasion de faire

usage dans le troisième livre, et qui se lie naturellement à tout ce qui vient d'être dit :

THÉORÈME. (*Fig.* 168.) FIG. 168.

De deux arcs AMB, AM′B, situés ou non situés dans la même région (n° 11) par rapport à une corde commune AB, et moindres chacun que la demi-circonférence à laquelle ils appartiennent [on les suppose rectifiés], *le plus petit est celui dont le centre est le plus éloigné du milieu* P *de la corde* AB.

Soient O le centre de l'arc AMB, O′ le centre de l'arc AM′B; et supposons PO > PO′; il en résulte OA > O′A, et par suite,

$$\textit{angle}\ \mathrm{AOB} < \textit{angle}\ \mathrm{AO'B}.$$

Ainsi le rapport $\frac{m}{n}$ de l'angle AOB à l'angle *droit* est moindre que le rapport $\frac{m'}{n'}$ de l'angle AO′B à l'angle *droit*. Or, on a, d'après la formule (1) du *numéro* 239,

$$\textit{arc}\ \mathrm{AMB} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \textit{arc}\ \mathrm{AM'B} = \frac{m'}{n'}\frac{\pi}{2};$$

donc, à cause de $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$, $\quad \textit{arc}\ \mathrm{AMB} < \textit{arc}\ \mathrm{AM'B}$;

C. Q. F. D.

SCOLIE. — Ce théorème donne lieu à une autre proposition générale dont voici l'énoncé :

Si l'on a une série d'arcs de cercle terminés aux extrémités d'une corde commune AB, *le plus petit de tous* [rectification faite de tous les arcs] *est celui qui tourne sa convexité à tous les autres.*

C'est une conséquence évidente de la proposition qui vient d'être démontrée.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR L'ÉTENDUE DANS LES FIGURES PLANES.

Ce chapitre aura *trois* paragraphes, dont le *premier* traitera de la *construction des lignes proportionnelles* et de quelques problèmes qui en dépendent ; le *second* contiendra des *problèmes* sur les *aires* des figures rectilignes et circulaires, et le *troisième*, des *applications* purement *numériques* sur les lignes et les surfaces.

Comme les principes de l'*analyse* et de la *discussion* des problèmes ont été suffisamment développés dans le *troisième chapitre* du *premier livre*, nous insisterons peu dorénavant sur ces deux parties, surtout en ce qui concerne les problèmes les plus élémentaires.

§ I. — *Construction des lignes proportionnelles.*

Fig. 169, 170. Problème I. (*Fig.* 169, 170.)

N° 263. — *Partager une longueur donnée* AB *en un nombre* n *de parties égales.*

Pour fixer les idées, nous supposerons qu'il s'agisse de partager la droite AB en 5 parties égales.

Première construction, fondée sur le théorème du *numéro* 181 :

Fig. 169. — 1° — Au point A (*fig.* 169), *tirons* une droite indéfinie AX qui forme avec AB un angle quelconque ; — 2° — *portons* sur cette droite, à partir du point A, 5 parties égales, A*p*, *pq*, *qr*,..., d'une longueur arbitraire ; — 3° — *joignons* l'extrémité *b* de la dernière partie au point B ; — 4° — par tous les autres points de division *p*, *q*, *r*,..., *menons* (n° 134) des *parallèles* à B*b* ;

La droite AB sera divisée (n° 181) en 5 parties égales par ces différentes parallèles.

N. B. — Ce moyen a l'inconvénient d'exiger la construction d'un grand nombre de parallèles.

SECONDE CONSTRUCTION. — 1° — Aux points A et B *formons* deux angles alternes-internes BAX, ABY (*fig.* 169), égaux entre eux; — 2° — *portons* sur les droites indéfinies AX, BY, et à partir des points A, B, 5 parties toutes égales, mais d'une longueur arbitraire; — 3° — *joignons* deux à deux par des droites les points de division correspondants [ou de même *numéro* d'ordre]; FIG. 169.

Elles diviseront AB en 5 parties égales aux points P, Q, R....

En effet, d'après la construction, les deux droites AX, BY, sont parallèles (n° 47); et comme on a $Ap = ap'$, $pq = p'q'$,..., il s'ensuit que $App'a$, $pqq'p'$,... sont des parallélogrammes (n° 74); donc Aa, pp', qq',... sont parallèles; *donc*, etc.

N. B. — Le moyen que nous venons d'indiquer n'exige, à proprement parler, que la construction directe des deux parallèles AX, BY, puisque toutes les autres pp', qq',... se trouvent déterminées par la jonction de points donnés, pris deux à deux. Du reste, le principe fondamental est toujours le même.

TROISIÈME CONSTRUCTION. — 1° — *Construisez* sur AB un triangle équilatéral CAB (*fig.* 170); — 2° — après avoir porté sur le côté CA [prolongé si cela est nécessaire] 5 parties égales d'une longueur arbitraire, ce qui donne une certaine longueur CA', *prenez* CB' = CA', et *tirez* A'B' : le triangle CA'B' est semblable à CAB (n° 191), et par conséquent équilatéral lui-même; — 3° — *reportez* sur A'B' les mêmes parties que sur CA', et *tirez* les droites Cp, Cq, Cr,... : elles diviseront aussi AB en 5 parties égales (n° 201). FIG. 170.

N. B. — Afin que les points de division P, Q, R,..., de AB, soient déterminés d'une manière plus précise, il convient que la droite AB soit située entre le point C et la droite A'B'; or, on peut toujours remplir cette condition en prenant sur CA' des parties d'une longueur suffisante.

Il existe encore d'autres moyens de résolution, qui tous ont pour but d'éviter l'emploi des parallèles. — Mais le second moyen

indiqué ci-dessus est celui dont on se sert le plus communément dans la *construction* des *échelles* pour le *levé des plans*.

Scolie I. — La division d'une droite en 2, 4, 8,... parties égales n'est qu'un cas particulier du problème précédent; mais le mode de construction du nº 180 est préférable, en ce qu'il n'exige que la description de deux parties de circonférences se coupant en deux points qu'il suffit ensuite de joindre par une ligne droite.

Scolie II. — Nous avons vu précédemment les moyens d'*ajouter des droites*, de *soustraire une droite d'une autre*, de *multiplier une droite par un nombre*; le problème précédent donne le moyen de *diviser une droite par un nombre*; enfin, nous avons exposé (nº 118) le procédé pour *obtenir le rapport de deux droites*, ce qui est la seconde manière d'envisager la division.

Fig. 169, 170, 171.

Problème II. (*Fig.* 169, 170, 171.)

Nº 264. — *Diviser une longueur donnée* AB *en parties proportionnelles à celles d'une autre droite donnée* MN.

Chacun des modes de construction indiqués pour le problème précédent est applicable à celui-ci : la seule différence consiste en ce qu'au lieu de *porter* sur AX (*fig.* 169) ou sur CA (*fig.* 170), des parties égales, il faut *porter* des parties respectivement égales aux lignes M*p*, *pq*, *qr* (*fig.* 171),..., qui composent la droite MN, puis *reporter* ces mêmes parties, mais dans un ordre inverse, sur BY (*fig.* 169) ou sur A'B' (*fig.* 170).

Fig. 172. Nº 265. — Scolie. — On peut avoir à — *Diviser une droite* AB (*fig.* 172) *en parties proportionnelles à deux lignes données* [M et N]; — ce cas particulier mérite une attention spéciale.

Construction. — 1º — Par les points A et B *menez* deux droites AX, BY, sous une direction quelconque, mais parallèles entre elles [ce qui revient à faire deux angles alternes-internes égaux BAX, ABY]; — 2º — *portez* sur AX et BY, des parties AC, BC', respectivement égales à M et N; — 3º — *tirez* la droite CC', qui rencontre AB en D.

La droite AB se trouvera divisée au point D dans le rapport donné.

Car les deux triangles DAC, DBC′, sont évidemment semblables, et donnent AD : DB :: AC : BC′ :: M : N.

N. B. — Si, au lieu de porter N dans le sens BY, on porte cette ligne en sens contraire, de B en C″, et qu'on joigne le point C au point C″, la droite CC″ ira rencontrer la droite AB prolongée en un point D′ qui sera le point *conjugué* du point D (n° **202**, *scol.* II).

En effet, on a

AD′ : BD′ :: AC : BC″ :: M : N :: AD : DB.

N° **268**. — Corollaire. — Le *scolie* précédent fournit le moyen de résoudre une autre question qui se reproduit souvent dans les applications, et dont voici l'énoncé :

Deux droites AB, CD (*fig.* 173), *concourant en un point trop éloigné pour être déterminé sur une feuille de dessin, mener par un point*, O ou O′, *intérieur* ou *extérieur à l'angle des deux droites, une troisième droite*, OL ou O′L′, *qui passe par le point de concours des deux premières.* Fig. 173.

Premier cas. — 1° — Après avoir tiré par le point O une droite quelconque EOF, *menons* par un point G pris à volonté sur AB, la droite GK parallèle à EF ; — 2° — *divisons* GK, qui est connue de longueur, en parties proportionnelles aux deux longueurs EO, OF, aussi connues.

La droite LO sera la droite demandée : — car, puisque l'on a la proportion GL : LK :: EO : OF,

il s'ensuit (n° **201**, *réc.*) que les trois droites GE, LO, KF, concourent en un même point.

Second cas. — 1° — Après avoir *tracé*, comme ci-dessus, les deux parallèles EO′F′, GK′, *déterminons* sur EO′ le point O *conjugué* du point O′ par rapport à EF ; — 2° — *divisons* GK de manière que l'on ait GL : LK :: EO : OF ; — 3° — *déterminons* le point L′ *conjugué* du point L.

La droite L′O′ sera la droite demandée.

En effet, puisque les points O, O′, sont conjugués, on a (n° **202**, *scol.* II) la proportion EO′ : FO′ :: EO : OF.

De même, puisque L et L′ sont conjugués, on a la proportion

$$GL' : KL' :: GL : LK;$$

mais par construction,

$$GL : LK :: EO : OF;$$

donc aussi $\quad GL' : KL' :: EO' : FO',$

ou bien $\quad GK : KL' :: EF : FO'.$

Donc (nº **201**, *récip.*) les trois droites GE, KF, L′O′, concourent en un même point.

N. B. — Dans la construction qui vient d'être exposée, on peut déterminer le point L′ directement, sans qu'il soit besoin de construire d'abord son conjugué L.

FIG. 174, 175. PROBLÈME III. (*Fig.* 174, 175.)

Nº **267**. — *Construire une quatrième proportionnelle à trois lignes données*, M, N, P; — en d'autres termes, — *Trouver une ligne* X, *qui forme le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers soient des lignes données*, M, N, P [M étant le premier terme].

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — 1° — Après avoir formé un angle FIG. 174. quelconque XAY (*fig.* 174), *prenons* sur AX, AB = M, BC = N, et sur AY, AD = P, puis *tirons* BD; — 2° — *menons* par le point C la droite CE parallèle à BD.

Le segment DE sera la quatrième proportionnelle demandée. Car on a (nº **183**)

$$AB : BC :: AD : DE, \quad \text{ou} \quad M : N :: P : DE;$$

mais on doit avoir aussi

$$M : N :: P : X;$$

donc $\quad X = DE.$

DEUXIÈME CONSTRUCTION. — Au lieu de porter les droites M et N sur AX, l'une à la suite de l'autre, on peut les porter à partir

du même point A sur cette droite, c'est-à-dire prendre AB = M, AC' = N; et après avoir pris sur AY, AD = P, joindre le point B au point D, et mener la droite C'E' parallèle à BD.

La droite AE' sera la quatrième proportionnelle demandée:

Car on aura encore

$$AB : AC' :: AD : AE', \quad \text{ou} \quad M : N :: P : AE';$$

donc $$X = AE'.$$

N. B. — Cette deuxième construction a l'avantage de donner une figure moins étendue. — Seulement, il faut avoir le soin, dans chaque construction, de joindre d'abord les extrémités des deux droites qui forment les antécédents de la proportion.

TROISIÈME CONSTRUCTION. — 1° — Sur une droite AX (*fig.* 175), *prenons* AB = M, AC = N; — 2° — au point B *menons*, sous un angle quelconque ABY, une droite BD = P, et joignons le point A au point D; — 3° — par le point C *menons* CE parallèle à BD. FIG. 175.

La droite CE sera la quatrième proportionnelle cherchée:

Car nous aurons

$$AB : AC :: BD : CE, \quad \text{ou} \quad M : N :: P : CE;$$

d'où $$X = CE.$$

N. B. — Quel que soit celui des trois modes de construction que l'on emploie, il est clair que l'on obtiendra toujours la même longueur pour X, puisque cette ligne résulte de la détermination du quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont M, N, P.

Ce sont d'ailleurs les circonstances seules où l'on se trouve placé pour la résolution d'un problème, qui déterminent le mode de construction le plus avantageux à employer.

COROLLAIRE. — On déduit de là immédiatement la solution du problème suivant:

Un point O (*fig.* 176) *étant donné dans l'intérieur d'un angle* YAX, *mener par ce point une droite* DOE *telle, que les segments* DO, OE, *soient entre eux dans un rapport donné*, M : N. FIG. 176.

SYNTHÈSE. — 1° — Par le point O *menez* OB parallèle à AY; — 2° — *construisez* une quatrième proportionnelle aux trois lignes M, N, AB; — 3° — *portez* cette quatrième proportionnelle de B en E sur AX, et *tirez* EOD.

Vous aurez la ligne demandée;

Car, puisque OB est parallèle à AD, il en résulte

$$OD : OE :: AB : BE :: M : N.$$

N. B. — Dans le cas particulier de M = N, il suffit de *prendre* sur AX, BE = AB, et de *tirer* EOD.

Lorsque le point donné O est sur la bissectrice de l'angle YAX, le problème général admet évidemment *deux* solutions.

FIG. 177, 178. PROBLÈME IV. (*Fig.* 177, 178.)

N° 268. — *Construire une troisième proportionnelle à deux lignes données* [M et N]; — c'est-à-dire — *Trouver une ligne* X *qui forme le second extrême d'une proportion dont le premier soit une ligne donnée* M, *et les deux moyens soient égaux à une seconde ligne donnée* N.

A proprement parler, ce problème n'est qu'un cas particulier du problème III, et peut se construire d'après les mêmes moyens.

Mais il est quelquefois plus avantageux d'avoir recours aux deux constructions que nous allons indiquer.

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — 1° — Sur une droite indéfinie AX
FIG. 177. (*fig.* 177) *prenons* AB = M, et *décrivons* sur cette droite une demi-circonférence (n° 181); — 2° — du point A, avec un rayon égal à N *décrivons* un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en un point C; — 3° — *abaissons* du point C la perpendiculaire CD sur AB.

La droite AD est la troisième proportionnelle demandée.

En effet, on a (n° 226, *scol.* II)

$$AB : AC :: AC : AD, \quad \text{ou} \quad M : N :: N : AD;$$

mais on doit avoir aussi

$$M : N :: N : X;$$

donc

$$AD = X.$$

N. B. — Cette construction suppose que M est *supérieur* ou
u moins *égal* à N, tandis que la suivante peut être employée
ians tous les cas.

DEUXIÈME CONSTRUCTION. — 1° — Sur une droite AX (*fig.* 178), FIG. 178.
t en un point quelconque A, *élevons* (n° 148) une perpendiculaire
B = N; — 2° — *prenons* à gauche du point A une distance
C = M, et *tirons* CB; — 3° — au point B *élevons* BD perpen-
iculaire à BC:

Nous aurons AD pour la ligne cherchée.

En effet, on a (n° 205)

CA : AB :: AB : AD, ou M : N :: N : AD;

onc AD = X.

N. B. — L'extrémité D de AD sera d'autant plus éloignée du
int A, que M ou AC sera plus petit par rapport à N ou AB.
ais la construction est toujours possible.

PROBLÈME V. (*Fig.* 179 et 180.) FIG. 179 et 180.

N° 269. — *Construire une moyenne proportionnelle entre deux
nes données,* M et N; — en d'autres termes, — *Trouver une
ne* X *qui forme à la fois les deux moyens d'une proportion dont
deux extrêmes soient deux lignes données*, M et N.

PREMIÈRE CONSTRUCTION. — Sur une droite indéfinie AX
g. 179), *prenez* AB = M, BC = N; puis sur AC = M + N + N,
crivez une demi-circonférence, et *élevez* au point B la perpendi-
laire BD.

Cette perpendiculaire est la ligne cherchée; — car on a

AB : BD :: BD : BC, ou M : BD :: BD : N;

onc BD = X.

DEUXIÈME CONSTRUCTION. — Sur la droite indéfinie AX (*fig.* 180),
rtez M et N de A en B et de A en C; puis sur AB comme diamè-
e, *décrivez* une demi-circonférence, et *élevez* en C la perpendicu-
re CD.

La corde AD sera (n° 226, *scol.* II) moyenne proportionnelle entre AB et AC, c'est-à-dire entre M et N.

TROISIÈME CONSTRUCTION. — Les deux droites M et N étant en-
FIG. 180. core *portées* sur AX (*fig.* 180), de A en B et de A en C, *décrivez* sur la différence CB comme diamètre une demi-circonférence, et *menez* du point A (n° 170) la tangente AD.

AD sera la ligne demandée (n° 228).

N. B. — Le second mode de construction est, en général, le plus simple des trois, parce que la figure est moins étendue ; et l'on ne doit employer le troisième qu'autant que l'on a déjà une demi-circonférence décrite sur la différence des deux lignes données M et N ; ce qui arrive quelquefois d'après la nature de la question que l'on a en vue de résoudre.

N° 270. — SCOLIE GÉNÉRAL *sur les lignes proportionnelles.*

Les trois proportions

$$M : N :: P : X, \quad M : N :: N : X, \quad M : X :: X : N,$$

donnent lieu aux égalités suivantes :

$$X = \frac{N \times P}{M}, \quad X = \frac{N^2}{M}, \quad X^2 = M \times N, \quad \text{ou} \quad X = \sqrt{M \times N}.$$

Ces égalités, desquelles *réciproquement* on déduit les proportions, jointes à ces deux-ci,

$$X = \sqrt{M^2 + N^2}, \quad X = \sqrt{M^2 - N^2},$$

forment ce qu'on appelle, dans la *Géométrie* et dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, les *expressions élémentaires* de la construction des lignes.

L'expression $\sqrt{M^2 + N^2}$ est, comme on l'a déjà vu, l'*hypoténuse* d'un triangle rectangle dont *les côtés* de l'angle droit sont M et N.

L'expression $\sqrt{M^2 - N^2}$ représente *un côté* de l'angle droit d'un triangle rectangle dont M est l'*hypoténuse* et N l'*autre côté*.

Or, nous avons exposé (n° 162) les moyens de construire un

angle rectangle, lorsque l'on connaît — 1° — *les deux côtés de ngle droit*, — 2° — *l'hypoténuse et un côté.*

Ainsi nous possédons tous les matériaux nécessaires pour la *astruction géométrique* des lignes. Cependant, comme il importe familiariser les commençants avec ces sortes d'opérations, nous iquerons encore les moyens de construire quelques *radicaux mériques* [du second degré].

Dans un cercle dont le rayon est supposé égal à 1,

1°. $\sqrt{2}$ est la corde AB (*fig.* 182) du *quadrant;* en d'autres mes, c'est le côté du *carré inscrit;* Fig. 182.

2°. $\sqrt{3}$ est la corde AD du double de l'arc soutendu par le côté $=1$ de l'hexagone : c'est le côté du *triangle équilatéral inscrit;*

3°. $\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{2^2+1}$ est l'hypoténuse AE du trian- rectangle ayant $AA'=2$, $A'E=OB=1$, pour côtés de gle droit;

4°. $\sqrt{6}=\sqrt{4+2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$ est l'hypoténuse d'un ngle rectangle ayant $AA'=2$ et $AB=\sqrt{2}$, pour côtés de gle droit;

Ou bien encore $\sqrt{6}=\sqrt{3\times 2}$ est une moyenne proportion- le entre les lignes exprimées par 3 et par 2.

. . . .

. . . .

En général, soit M un nombre entier composé de deux facteurs t p, $\sqrt{M}$ ou $\sqrt{n\times p}$ est une moyenne proportionnelle en- n et p.

Dans tous les cas $\sqrt{M}$ ou $\sqrt{M\times 1}$ est une proportionnelle en- M et 1.

Nous terminerons ce paragraphe par la résolution de quelques oblèmes dont la construction se réduit, en dernière analyse, à le de lignes proportionnelles.

Problème VI. (*Fig.* 183.) Fig. 183.

N° 271. — *Diviser une ligne donnée* AB *en moyenne et ex- ême.*

Nous avons déjà eu occasion (n° 239) de traiter cette question sous un point de vue *numérique*. — Mais le scolie du n° 228 en fournit une *solution* purement *géométrique*.

SYNTHÈSE. — 1° — Au point B *élevez* la droite BO perpendiculaire à AB et égale à $\frac{1}{2}$ AB, puis *tirez* AO; — 2° — du point O comme centre, avec le rayon OB, *décrivez* une circonférence qui rencontre AO au point C; — 3° — *rabattez* AC de A en D par un arc de cercle :

La droite AB sera divisée au point D en moyenne et extrême

En effet, d'après la construction, AB est une tangente au cercle OB; et si l'on prolonge AO jusqu'à sa rencontre en C′ avec la circonférence, on a (n° 228) la proportion

$$AC' : AB :: AB : AC;$$

d'où
$$AC' - AB : AC :: AB - AC : AC.$$

Or, $AC' = AC + CC' = AC + AB$, d'où $AC' - AB = AC = AD$,

et
$$AB - AC = AB - AD = BD;$$

la proportion devient donc

$$AD : AB :: BD : AD;$$

ou, mettant les moyens à la place des extrêmes,

$$AB : AD :: AD : BD;$$ *C. Q. F. D.*

FIG. 183. PROBLÈME VIII. (*Fig.* 183.)

N° 272. — *Mener une tangente commune à deux cercles.*

Ce problème a déjà été résolu (n° 171) par des considérations fondées sur les théories du *premier livre*. Mais l'emploi des lignes proportionnelles conduit à une solution fort simple.

ANALYSE. — Supposons le problème résolu, et soient MN, *mn*, deux des tangentes, l'une *extérieure* et l'autre *intérieure*, rencontrant la ligne des centres OO′ en deux points C, C′.

Il est clair que, si ces points étaient connus de position, il

suffirait de mener par chacun d'eux (nº 170) une tangente à l'un des cercles donnés; et cette droite, étant nécessairement tangente à l'autre cercle, le problème serait résolu.

Or, en tirant les rayons OM et O'N, O*m* et O'*n*, nous obtenons évidemment deux couples de triangles semblables OMC et O'NC, O*m*C' et O'*n*C', qui donnent les proportions

$$OC : O'C :: OM : O'N,$$
$$OC' : O'C' :: OM : O'N.$$

Mais les rayons OM, O'N, sont des lignes données *à priori;* on voit donc que les points C et C' ne sont autre chose que les points *conjugués* qui divisent (nº 264, *N. B.*) la distance OO' dans le rapport donné OM : O'N. — De là résulte la construction suivante :

Synthèse. — 1º — *Tracez* un diamètre quelconque KO*k* du cercle O, et par le point O' *menez* (nº 184) un rayon O'L parallèle à OK; — 2º — *joignez* les points K et *k* au point L.

Les points C, C', où les droites KL, *k*L, rencontrent la ligne des centres, sont les points cherchés; car on a (nº 191)

$$OC : O'C :: OM : O'N$$
et
$$OC' : O'C' :: OM : O'N.$$

Menez ensuite par chacun de ces points une tangente, soit au cercle O, soit au cercle O' : ces droites seront en même temps tangentes au cercle O' ou O.

Nous renvoyons d'ailleurs au *numéro* 171 pour la discussion de ce problème.

Problème VIII. (*Fig.* 184.) Fig. 184.

Nº 273. *Deux points* A *et* B *étant donnés sur un plan, trouver un troisième point dont les distances aux points* A *et* B *soient entre elles dans un rapport donné m : n.*

Cette question est encore une application fort simple de la division *harmonique* des lignes.

Analyse. — Il est d'abord facile de voir que le problème est,

par sa nature, *indéterminé*, c'est-à-dire qu'il existe sur le plan un nombre *infini* de points satisfaisant à l'énoncé; — car, si du point A comme centre, avec un rayon arbitraire AM, on décrit une circonférence de cercle, et qu'ensuite, du point B comme centre, avec le rayon BM déterminé par le quatrième terme de la proportion $m : n :: AM : BM$, on décrive une seconde circonférence, les deux cercles se couperont en deux points M, N, satisfaisant à l'énoncé. — On reconnaît en outre, par cette construction, que ces points sont *deux à deux* situés sur une même perpendiculaire à la droite AX menée par les points donnés A, B, et à une même distance de cette droite.

Cela posé, commençons par déterminer sur AB, les deux points C et C′, qui remplissent la condition de l'énoncé, ce qui revient à diviser *harmoniquement* la droite AB dans le rapport $m : n$ (n° 264, *N. B.*); je dis que la circonférence décrite sur la droite CC′, comme diamètre, est *le lieu* de tous les points demandés.

En effet, soit M un point quelconque de ce lieu, et joignons ce point aux points A et B. On a, par hypothèse, la proportion

$$AM : MB :: m : n;$$

mais on a aussi, par construction,

$$AC : CB :: m : n;$$

donc $$AM : MB :: AC : CB;$$

ce qui prouve (n° 202, *scol.* I) que la droite MC est *bissectrice* de l'angle AMB.

On trouverait pareillement que

$$AM : MB :: AC' : BC';$$

donc la droite MC′ est *bissectrice* de l'angle supplémentaire MA′. Ainsi (n° 43, *scol.* III) les deux droites CM, C′M sont perpendiculaires entre elles.

Comme le même raisonnement s'appliquerait à tout autre point M′ du *lieu* cherché, on est en droit d'en conclure que ce lieu est la circonférence décrite sur la droite CC′ comme diamètre.

De là résulte la construction du problème proposé :

Après avoir *divisé* la droite AB, au point C, dans le rapport donné $m : n$, et *déterminé* (n° 264, *N. B.*) le point conjugué C′, *décrivez* sur CC′ comme diamètre une circonférence.

Vous obtiendrez ainsi le lieu de tous les points dont les distances aux points A et B sont entre elles dans le rapport $m : n$.

Scolie. — Ce résultat peut être présenté sous la forme d'un théorème dont voici l'énoncé :

Une droite AB (*fig.* 184) *étant donnée de longueur et de position sur un plan, et cette droite étant divisée harmoniquement en deux points*, C, C′, *la circonférence décrite sur la distance* CC′ *de ces points, comme diamètre, est le lieu géométrique de tous les points dont les distances aux extrémités de la droite donnée* AB, *sont entre elles dans un rapport constant*, celui de AC à CB. Fig. 184.

Quant à la démonstration, elle résulte de l'analyse qui vient d'être exposée, et il est inutile de s'y arrêter.

Problème IX. (*Fig.* 185.)

Fig. 185.

N° 274. — *Une droite indéfinie* LM *étant donnée de position, ainsi que deux points* A *et* B, *décrire une circonférence tangente à la droite donnée, et passant par les deux points donnés.*

L'analyse de ce problème n'offrant aucune difficulté, en voici la synthèse :

Construction. — 1° — *Prolongez* la droite BA jusqu'à sa rencontre en P avec LM, et *déterminez* (n° 269) une moyenne proportionnelle entre PB et PA; — 2° — *portez* cette moyenne proportionnelle de P en C sur LM, et *élevez* (n° 148) au point C la perpendiculaire CG; — 3° — *élevez* par le milieu de AB (n° 150) une perpendiculaire IK à cette droite.

Le point O où les droites CG, IK, se coupent (n° 80), est le centre du cercle cherché, lequel alors peut être décrit, puisque l'on connaît le rayon OA.

En effet on a, d'après la construction,

$$PC^2 = PB \times PA;$$

donc (n° 229) les points A, B, C, sont situés sur une circonférence tangente à PC ou à LM.

N. B. — La moyenne proportionelle PB : x :: x : PA peut être construite directement sur la figure :

Décrivez sur PB une demi-circonférence, et *élevez* au point A la perpendiculaire AD ; la corde PD est la moyenne proportionnelle cherchée, qu'il suffit ensuite de rabattre de A en C sur LM par un arc de cercle.

Discussion. — Le problème est toujours *possible* tant que les points A et B sont situés d'un même côté par rapport à LM ; et il ne l'est que dans ce cas.

Il est d'ailleurs susceptible de *deux* solutions, dont la seconde s'obtiendrait en portant PC à la gauche du point B, de B en C'.

Dans le cas particulier où la droite AB serait parallèle à LM, il n'y aurait plus de moyenne proportionnelle à construire ; mais alors le point de contact de LM se trouverait évidemment au point où cette droite serait rencontrée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB ; et il n'y aurait plus qu'*une* solution.

Corollaire. — A ce problème se rattache presque immédiatement le suivant :

Fig. 186. *Deux droites* LM, LN (*fig.* 186), *étant données de position, ainsi qu'un point* A *intérieur à l'angle* NLM, *faire passer par le point* A *un cercle tangent aux deux côtés de l'angle.*

Si l'on tire la bisectrice LI, et qu'après avoir abaissé du point A sur LI une perpendiculaire, on prenne CA' = CA, la circonférence qui aura d'ailleurs son centre sur LI, passera nécessairement par le second point A'; et la question rentrera dans le problème précédent.

Il est également susceptible, en général, de *deux* solutions.

§ II. — *Problèmes sur les aires.*

Transformation des polygones.

On nomme ainsi l'opération graphique qui a pour objet de substituer à un polygone donné, un autre polygone qui lui soit *équivalent* (n° **209**), c'est-à-dire qui ait *même superficie*, mais

dont la forme soit tout à fait différente, tant sous le rapport du nombre des côtés, que sous celui des angles.

PROBLÈME I. (*Fig.* 187.) FIG. 187.

N° 273. — *Transformer un polygone en un autre qui ait un côté de moins que le premier,* et par suite, *en un triangle.*

CONSTRUCTION. — Soit ABCDE.... un polygone quelconque que nous représentons ici par une ligne brisée, afin de mieux faire ressortir la généralité de la construction.

Du point A *traçons* la diagonale AC, de sorte que le sommet B soit par rapport à cette droite dans une région (n° 11) différente de celle où se trouvent placés tous les sommets du polygone, autres que A, B, C. *Menons* ensuite par le point B la droite BI parallèle à AC et prolongée jusqu'à sa rencontre en I avec DC aussi prolongé, et *tirons* AI.

Le polygone AIDE.... est équivalent au polygone donné ABCDE...., et il a un côté de moins que celui-ci.

Car d'abord, puisque BI est parallèle à AC, les deux triangles AIC, ABC sont équivalents (n° 211); et si à ces deux triangles on ajoute la portion de surface, ACDE...., on a, d'une part, le polygone AIDE...., et de l'autre, le polygone ABCDE....; donc aussi ces deux polygones sont équivalents.

Il est évident d'ailleurs que, le côté CI du triangle AIC étant le prolongement du côté DC, les deux côtés AB, BC du premier polygone ont été réellement remplacés par le seul côté AI; donc la seconde figure a un côté de moins que la première.

Opérons actuellement sur le polygone AIDE.... comme sur le premier, c'est-à-dire *tirons* la diagonale AD telle que le sommet I et la portion de polygone ADE... soient placés dans deux régions différentes par rapport à cette diagonale; *menons* ensuite la droite IL parallèle à AD et prolongée jusqu'à sa rencontre avec ED aussi prolongé. — Nous obtenons un nouveau polygone ALE.... équivalent au second et ayant un côté de moins.

En continuant ainsi, nous finirons nécessairement par arriver à un polygone de trois côtés; et le problème sera résolu.

PROBLÈME II.

N° 276. — *Transformer un polygone quelconque en un carré.*

Si le polygone donné est un *triangle*, soient b sa base, h sa hauteur (n° 208), et x le côté du carré cherché.

On doit avoir la relation

$$x^2 = b \times \tfrac{1}{2} h, \quad \text{d'où la proportion} \quad b : x :: x : \tfrac{1}{2} h.$$

Ainsi le *côté* du carré demandé est une *moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur du triangle.*

Cette ligne étant construite, on en déduit facilement la construction du carré.

Lorsque le *polygone* est quelconque, on commence par le *transformer* en un *triangle* (n° 275); puis on transforme celui-ci en un *carré.*

Quand il s'agit d'un *parallélogramme*, ou d'un *rectangle*, ou bien enfin d'une figure dont l'*aire* est *évaluée* immédiatement par le *produit de deux lignes*, tout se réduit, pour obtenir le côté du carré équivalent, à *construire une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes.*

C'est ainsi que, pour un polygone régulier, il suffit, après avoir *développé* sur une droite indéfinie, le périmètre du polygone, de chercher une moyenne proportionnelle entre le *demi-périmètre* et *le rayon du cercle inscrit.*

Pour transformer un *cercle* en un carré, il faudrait d'abord rectifier la circonférence (*); puis on déterminerait une moyenne proportionnelle entre le *rayon* et la *demi-circonférence* [rectifiée].

SCOLIE. — La *quadrature* du cercle est, comme on le voit, intimement liée à la *rectification* d'une circonférence : et si, jusqu'à

(*) On aurait une approximation grossière du résultat de cette *rectification* en portant sur la circonférence, et à partir d'un point quelconque, une ouverture de compas assez petite pour que l'arc de cercle correspondant à cette ouverture puisse être regardé sensiblement comme une ligne droite, et répétant cette opération jusqu'à ce qu'on retombe sur le point de départ.

présent, on n'a pu, à l'aide de la règle et du compas, construire rigoureusement *un carré équivalent à un cercle*, comme on peut le faire pour les figures rectilignes, cela tient à ce que les méthodes connues ne donnent que des valeurs approchées du *rapport de la circonférence au diamètre*.

Cependant nous ne tarderons pas à voir un exemple de figures planes curvilignes qui peuvent être *carrées exactement*, bien qu'on n'ait pas le moyen de *rectifier* rigoureusement les lignes courbes qui les terminent.

Construction de polygones semblables sous certaines conditions.

PROBLÈME III. (*Fig.* 188.) FIG. 188.

N° 277. — *Sur une droite* ab *donnée de longueur, construire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDEF.

PREMIER MOYEN. — Après avoir décomposé le polygone donné en triangles par des diagonales menées de l'un des sommets A à tous les autres, *formez*, aux points *a* et *b*, deux angles *cab*, *abc*, respectivement égaux aux angles CAB, ABC : vous obtiendrez ainsi un triangle *abc* semblable au triangle ABC. — *Construisez* de la même manière sur *ac* un triangle *acd* semblable au triangle ACD; et ainsi de suite.

Le polygone *abcde*.... ainsi obtenu sera semblable au polygone ABCDE....

SECOND MOYEN. — Si le côté *ab* n'est pas nécessairement donné de position, *portez* ce côté de A en B′ sur AB, et par le point B′ *menez* B′C′ parallèle à BC; — de même, par le point C′ où B′C′ rencontre BC, *menez* C′D′ parallèle à CD; et ainsi de suite.

Le polygone AB′C′D′.... sera semblable à ABCD... (n° 167).

En un mot, chacun des cas d'égalité, établis pour les polygones, fournit un moyen de résoudre la question.

COROLLAIRE. — On déduit de là un moyen de — *Construire, sur une droite donnée* AB (*fig.* 158), *un polygone régulier d'une espèce donnée*. FIG. 158.

[Il ne peut être ici question que des polygones réguliers compris dans les séries que nous avons fait connaître au *numéro* **240**, *scol.*].

On commence par *décrire* une circonférence, en prenant pour cela un rayon arbitraire *oa* [la *figure* est sous-entendue]; puis on *inscrit* dans ce cercle le polygone de l'espèce donnée. — Soit *ab* le côté de ce polygone. — On *construit* alors sur AB un polygone semblable à celui dont le triangle isoscèle *oab* fait partie; et l'on obtient ainsi le polygone cherché.

Mais il est encore plus simple, après avoir *construit* sur AB un triangle semblable au triangle *oab*, de *décrire* du point O comme centre, avec le rayon OA, une circonférence sur laquelle *on prend* ensuite des cordes égales à AB.

Problème IV.

N° **278**. — *Deux polygones semblables* A, A' *étant donnés, construire un troisième polygone* A'' *semblable aux deux premiers, et équivalent à leur somme ou à leur différence.*

La solution de ce problème est une conséquence immédiate du scolie établi au n° **223**, *corol.* IV.

Soient a, a', deux côtés homologues des polygones donnés; — sur ces côtés, considérés comme les côtés d'un angle droit, ou comme l'hypoténuse et comme l'un des côtés de l'angle droit, *construisez* (n° **162**) un triangle rectangle; puis, sur le troisième côté a'' du triangle ainsi obtenu, *construisez* (n° **277**) un polygone semblable à l'un des polygones donnés.

Le polygone ainsi construit sera le polygone demandé. — Car, puisque l'on a, par construction,

$$a''^2 = a^2 + a'^2, \quad \text{ou} \quad a''^2 = a^2 - a'^2,$$

il en résulte (n° **223**, *corol.* IV)

$$A'' = A + A' \quad \text{ou} \quad A'' = A - A'.$$

Fig. 189. Scolie. — Soient AMNB, APC, BQC (*fig.* 189), trois demi-circonférences décrites sur les côtés d'un triangle rectangle ABC; et nommons R, R', R'', les rayons de ces cercles, R étant celui du cercle décrit sur l'hypoténuse.

De la relation $R^2 = R'^2 + R''$

on déduit $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi R'^2 + \frac{1}{2}\pi R''^2$;

donc (n° **250**)

demi-cercle AMNB = *demi-cercle* APC + *demi-cercle* BNC.

Cela posé, si, des deux membres de cette égalité, on retranche la somme des segments circulaires, AMCI + BNCL, il reste, d'une part le triangle rectangle ABC, et l'autre la somme des deux figures AMCP, BNCQ.

D'où l'on voit que *l'aire* de l'espace curviligne CMAPCBQN est égale à celle du triangle ABC; et comme ce triangle peut être transformé en un carré (n° **276**), il en est de même de l'espace curviligne.

C'est l'exemple dont il a été question dans ce même *numéro*.

PROBLÈME V. (*Fig.* 190.) FIG. 190.

N° **279**. — *Étant donné un carré* a^2, *trouver un autre carré* x^2, *tel que le premier soit au second dans le rapport de deux lignes données*, m, n; c'est-à-dire tel que l'on ait $m : n :: a^2 : x^2$.

Le corollaire II du n° **223** fournit une construction assez simple de ce problème.

SYNTHÈSE. — 1° — Sur une droite indéfinie BX *prenons* BD = m, DC = n, et sur BC = $m + n$, comme diamètre, *décrivons* une demi-circonférence; — 2° — *élevons* au point D la perpendiculaire DA, et *tirons* les cordes AB, AC, en les prolongeant au delà de B et de C; — 3° — sur AB *prenons* une partie AB′ = a [on suppose ici $a >$ AB], et *menons* B′C′ parallèle à BC.

La droite AC′ sera le côté du carré demandé.

En effet, les deux triangles semblables ABC, AB′C′, donnent

la proportion $AB : AC :: AB' : AC'$,

et par conséquent $AB^2 : AC^2 :: AB'^2 : AC'^2$;

mais on a (n° **223**, *corol.* II) $AB^2 : AC^2 :: BD : DC$, ou $:: m : n$;

donc aussi $AB'^2 : AC'^2 :: m : n$,

ou renversant, et mettant pour AB′ sa valeur a,

$$m : n :: a^2 : AC'^2;$$

donc enfin $$AC' = x.$$

N. B. — S'il arrivait, dans la construction, que la corde AB fût égale à a, la corde AC serait alors le côté cherché, puisqu'on aurait

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC :: m : n,$$

ou $$m : n :: a^2 : AC^2.$$

Autre construction. — Dans le cas de $m > n$, on peut donner une autre construction tirée de la proportion $m : n :: a^2 : x^2$. laquelle peut être mise sous la forme

$$x^2 = \frac{a^2n}{m} = \frac{an}{m}.a, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{\frac{an}{m}}.a.$$

Fig. 191. Seconde construction. — 1° — Sur une droite AB $= a$ (*fig.* 191) *décrivons* une demi-circonférence; — 2° — après avoir formé au point A un angle quelconque XAY, *prenons* sur AY, deux parties AC $= m$, AD $= n$; — 3° — *tirons* CB, et par le point D *menons* DE parallèle à CB; — 4° — *élevons* au point E la perpendiculaire EF, et *tirons* AF.

La corde AF est le côté cherché.

En effet, on a d'abord AC : AD :: AB : AE, ou $m : n :: a : AE$;

d'où l'on déduit $$AE = \frac{a.n}{m};$$

mais on a aussi (n° 203) $$AF^2 = AB \times AE = a \times \frac{an}{m};$$

donc $$AF = \sqrt{a \times \frac{an}{m}} = x.$$

N. B. — Cette construction suppose évidemment

$$AE < AB, \quad \text{ou} \quad \frac{an}{m} < a; \quad \text{d'où} \quad n < m;$$

tandis que la première est exécutable dans tous les cas.

SCOLIE. — Quelquefois, le rapport $m : n$, au lieu d'être donné en lignes, l'est en nombres, 3 : 2, par exemple. Dans ce cas, on prendrait sur une ligne indéfinie, *cinq* parties consécutives égales, dont les trois premières représenteraient le nombre 3, les deux autres le nombre 2; et la question rentrerait dans la précédente.

Au reste, il y a pour ce problème, des cas particuliers qui se construisent d'une manière très-simple :

1° — Soit proposé de — *Construire un carré double d'un autre?*

On doit avoir $x^2 = 2a^2$, d'où $x = a\sqrt{2}$:

Le côté cherché est, comme on l'a vu (n° 238), la *diagonale* du carré donné.

2° — Soit au contraire à — *Trouver le côté d'un carré moitié d'un autre carré donné?*

On a $x^2 = \frac{1}{2}\, a^2$, d'où $x = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2}$:

C'est *la moitié de la diagonale* du carré donné.

PROBLÈME VI.

N° 280. — *Un polygone* P *étant donné, construire un autre polygone* X *semblable au premier, et tel que celui-ci soit au second dans le rapport* m : n.

Soit a un côté du polygone donné, x le côté homologue du polygone cherché; on aura

$$P : X :: a^2 : x^2$$

et

$$P : X :: m : n;$$

d'où

$$m : n :: a^2 : x^2.$$

La question est alors ramenée au problème précédent, puisque x étant connu, il suffira ensuite de construire sur cette ligne un polygone semblable au polygone précédent.

PROBLÈME VII.

N° 281. — *Étant donnés deux polygones*, P et Q, *construire un troisième polygone* X *semblable au premier, et tel que le second soit au troisième dans le rapport* m : n.

ANALYSE et *construction*. — Soient a un côté du polygone P, et x son homologue dans le polygone X ; on aura, d'après les conditions de l'énoncé,

$$P : X :: a^2 : x^2,$$

et

$$Q : X :: m : n.$$

Cela posé, concevons que l'on ait transformé les polygones P et Q en carrés (n° 276) ayant respectivement pour côtés p, q; et soit de même représenté par y le côté du carré équivalent au polygone cherché X ; les proportions précédentes se trouveront transformées en celles-ci

$$p^2 : y^2 :: a^2 : x^2,$$

d'où

$$p : y :: a : x,$$

et

$$p^2 : y^2 :: m : n.$$

Or, la dernière de ces proportions fera connaître y par la construction du problème V (n° 279); et la seconde donnera x par une *quatrième proportionnelle* aux droites p, y, et a : ce sera le côté du polygone cherché, homologue de a.

SCOLIE. — Si le polygone cherché devait être équivalent au polygone Q, on aurait une construction de moins à effectuer ; car alors y ne serait autre chose que q.

Voici quelques nouveaux problèmes sur les aires, qui, sans avoir une liaison immédiate avec les précédents, n'en sont pas moins très-utiles à connaître.

FIG. 192.

PROBLÈME VIII. (*Fig.* 192.)

N° 282. — *Construire un rectangle équivalent à un carré donné* m², *et tel que la somme ou la différence de deux côtés contigus soit égale à une ligne donnée* a.

PREMIER CAS. — La ligne donnée a étant la somme des côtés contigus.

1° — Sur une droite AB $= a$, comme diamètre, décrivons une circonférence (n° 131) ; — 2° — à l'extrémité A du diamètre AB,

élevons une perpendiculaire AC égale à m ; — 3° — *menons* par le point C la droite CL parallèle à AB ; — 4° — du point E ou E′, où cette droite rencontre la circonférence décrite, *abaissons* la perpendiculaire EF ou E′F′ sur AB.

Les distances AF et FB, ou AF′ et F′B, seront les deux côtés contigus du rectangle à construire.

En effet, on a (n° **226**, *scol.* I)

$$AF \times FB = EF^2 = AC^2 = m^2;$$

et
$$AF + FB = AB = a.$$

N. B. — Le problème n'est évidemment *possible* qu'autant que l'on a
$$AC < OI < OA, \quad \text{ou} \quad m < \tfrac{1}{2} a,$$
ou tout au plus
$$m = \tfrac{1}{2} a, \quad \text{d'où} \quad m^2 = \tfrac{1}{4} a^2 :$$

Ce qui démontre que — *Le plus grand rectangle qu'on puisse former avec les deux parties d'une ligne donnée* a, *est le carré construit sur la moitié de la ligne.*

Second cas.—La ligne donnée a étant la différence des deux côtés contigus.

Les deux premières parties de la construction précédente sont absolument les mêmes pour ce second cas ; et si l'on joint le centre O de la circonférence au point C, les deux droites CG, CK, seront les côtés contigus du rectangle demandé.

On a, en effet, d'après la construction,

$$CA^2 = CG \times CK \text{ (n° 228)}, \quad \text{ou} \quad CG \times CK = m^2,$$

et
$$CG - CK = KG = AB = a.$$

N. B. — Le problème est évidemment toujours possible, quels que soient a et m.

Problème IX.

N° **283**. — *Trouver deux longueurs* [x et y] *proportionnelles à deux rectangles donnés*, a $\times$ b, a′ $\times$ b′, [et, en général, à deux polygones quelconques].

Analyse. — On doit avoir, d'après l'énoncé,

$$x : y :: a \times b : a' \times b';$$

ce qui donne $$x = \frac{a \times b \times y}{a' \times b'}.$$

Or, comme une des longueurs, par exemple y, est arbitraire, rien n'empêche de la supposer égale à b' ou a'; et il vient, pour l'hypothèse $y = b'$,

$$x = \frac{a \times b}{a'}, \quad \text{ou} \quad a' : a :: b : x.$$

Synthèse. — Construisons une *quatrième proportionnelle* aux trois *lignes* a', a, et b (n° 267) : — le rapport de cette longueur construite à la longueur b' sera le même que celui des rectangles $a \times b$, $a' \times b'$.

N. B. — Si les rectangles étaient des carrés a^2, a'^2, on serait conduit à chercher une *troisième* proportionnelle aux lignes a' et a.

Ainsi, comme deux polygones quelconques peuvent toujours être *transformés* en carrés, la question sera ramenée au cas de deux carrés donnés.

Mais s'il s'agit de deux polygones *réguliers*, on aura, en désignant par p, p', et r, r', les périmètres et les rayons des cercles inscrits,

$$x : y :: p \times r : p' \times r', \quad \text{d'où, posant } y = p',$$

$$x = \frac{p \times r}{r'} \quad \text{ou} \quad r' : r :: p : x;$$

Et la question se résout directement comme dans le cas de deux rectangles.

Scolie. — On peut, au moyen d'une extension convenable donnée à la méthode précédente,

Trouver deux longueurs [x et y] *dont la première soit à la seconde dans le même rapport qu'un produit de trois longueurs données* [a, b, c] *est à un autre produit de trois longueurs données* [a', b', c'].

Pour cela, on a d'abord

$$x : y :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a \times b \times c \times y}{a' \times b' \times c'};$$

t comme y est arbitraire, on peut supposer $y = c'$;

qui donne $$x = \frac{a \times b \times c}{a' \times b'} = \frac{a \times b}{a'} \times \frac{c}{b'}.$$

Ainsi l'on cherchera, — 1° — une *quatrième proportionnelle* aux ngueurs a', a, et b [résultat que l'on peut représenter par p]; - 2° — une quatrième proportionnelle p' aux longueurs b', p et c: e sera la valeur de x; et l'on aura

$$p' : c' :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'.$$

On opérerait de même pour résoudre la proportion

$$x : y :: a \times b \times c \times d : a' \times b' \times c' \times d';$$

ainsi de suite.

De quelques questions sur les lieux géométriques.

Problème X. (*Fig.* 193.)

Fig. 193.

N° 284. — *Deux points* A *et* B *étant donnés sur un plan, trouver un troisième point* M *tel, que la somme des carrés des distances ce point aux deux points donnés soit égale à un carré donné* m².

Analyse. — Soit C le milieu de la droite qui joint les deux oints A et B. On doit avoir, par hypothèse,

$$MA^2 + MB^2 = m^2;$$

ais on a aussi $MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + 2AC^2$ (n° 207);

onc $2MC^2 + 2AC^2 = m^2$; d'où l'on déduit $MC = \sqrt{\frac{m^2 - 2AC^2}{2}}$.

Or m et AC sont des lignes connues; ainsi la distance du oint C au point cherché est égale à une quantité constante: ce ui démontre, — 1° — que la question proposée est *indéterminée;*

— 2° — que le lieu géométrique de tous les points qui satisfont à l'énoncé, est une circonférence de cercle ayant pour rayon

$$(1) \qquad MC = \sqrt{\frac{m^2 - 2AC^2}{2}}.$$

Toutefois, pour que cette circonférence puisse exister, il faut que le carré donné m^2 ne soit pas *moindre* que $2AC^2$; ce qui revient à dire que le côté m de ce carré doit être au moins égal à $AC.\sqrt{2}$, ou (n° 238) à la diagonale du carré construit sur AC moitié de la distance AB.

Cela posé, voici en quoi consiste la construction de ce problème :

Synthèse. — Nous pouvons d'abord mettre l'expression (1) sous la forme

$$MC = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 4AC^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - AB^2}.$$

— 1° — Sur une droite indéfinie EX *prenons* une partie [EF = m] plus grande que la diagonale CD du carré construit sur AC, et *élevons* au point F une perpendiculaire FG = EF = m, puis *tirons* EG, ce qui donne $EG^2 = 2EF^2 = 2m^2$; — 2° — *décrivons* sur EG comme diamètre une demi-circonférence (n° 181) ; — 3° — du point G comme centre et avec AB pour rayon, *décrivons* un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en un point K ; — 4° — *tirons* EK et *prenons* le milieu I de cette droite ; — 5° — enfin du point C comme centre, avec le rayon EI, *traçons* une circonférence.

Nous obtenons ainsi le lieu géométrique demandé.

En effet, on a, d'après la construction,

$$EI = \tfrac{1}{2}\,EK = \tfrac{1}{2}\sqrt{EG^2 - GK^2}\ (\text{n° } 204) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2m^2 - AB^2}.$$

Discussion. — Tant que m sera plus grand que $AC\sqrt{2}$, ou CD, le cercle existera et croîtra depuis la limite 0 jusqu'à l'infini.

Soit $m = AC\sqrt{2}$; il en résulte $MC = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 2m^2} = 0$; ainsi le cercle a un rayon *nul*.

Soit $m = 2AC = AB$; on en déduit $MC = \frac{1}{2}AB$; d'où l'on

voit que le lieu géométrique est la circonférence décrite sur AB comme diamètre.

Lorsque m sera plus grand que AB, le cercle cherché sera aussi plus grand que le cercle CA. Ainsi le lieu est tantôt plus petit, tantôt plus grand que ce dernier cercle.

Problème XI. (*Fig.* 194.)

Fig. 194.

N° 288. — *Deux points* [A et B] *étant donnés, sur un plan, trouver un troisième point* M *tel, que la différence des carrés des distances de ce point aux deux points donnés, soit égale à un carré donné* n^2.

Analyse. — Abaissons du point M la perpendiculaire MD sur AB. On doit avoir, par hypothèse,

$$\text{MA}^2 - \text{MB}^2 = n^2;$$

mais les triangles rectangles MDA, MDB donnent aussi

$$\text{MA}^2 = \text{MD}^2 + \text{AD}^2, \quad \text{MB}^2 = \text{MD}^2 + \text{BD}^2;$$

d'où

$$\text{MA}^2 - \text{MB}^2 = \text{AD}^2 - \text{BD}^2,$$

et par conséquent,

$$(1) \qquad \text{AD}^2 - \text{BD}^2 = n^2.$$

Ceci nous apprend déjà que tous les points susceptibles de satisfaire à l'énoncé se trouvent placés sur une perpendiculaire à la droite AB, menée par un point D de cette droite, qui remplit lui-même les conditions de l'énoncé.

Or, la position de ce point peut être facilement déterminée. — En effet, si nous divisons, membre à membre, l'égalité (1) par l'égalité évidente

$$\text{AD} + \text{BD} = \text{AB},$$

il en résulte

$$\text{AD} - \text{BD} = \frac{n^2}{\text{AB}};$$

d'où, en combinant ces deux dernières, alternativement par addition et par soustraction, puis divisant par 2,

$$\text{AD} = \tfrac{1}{2}\text{AB} + \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{\text{AB}}, \quad \text{BD} = \tfrac{1}{2}\text{AB} - \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{\text{AB}};$$

ce qui conduit à la construction suivante :

SYNTHÈSE. — Après avoir *pris* le milieu C de AB, *construisons* (nº 269) une troisième proportionnelle aux longueurs AB et n; puis *portons* de C en D la moitié de cette troisième proportionnelle; *élevons* ensuite la perpendiculaire indéfinie DL.

Cette droite est le lieu géométrique demandé.

N. B. — Comme, d'après l'énoncé, rien n'indique que le carré de la distance MA soit plus grand ou plus petit que le carré de la distance MB, il s'ensuit que si l'on prend à gauche du point C une distance CD′ = CD, et qu'on élève la perpendiculaire D′L′, on aura également une solution de la question.

Donc, en dernière analyse, le lieu cherché est le *système de deux droites perpendiculaires* à la droite AB qui joint les deux points donnés, et *menées à une distance du milieu* C, *égale à la moitié d'une troisième proportionnelle à cette distance* AB *et au côté n* du carré donné.

SCOLIE. — La propriété exprimée par la relation

$$MA^2 - MB^2 = AD^2 - BD^2 = n^2$$

donne lieu à des conséquences que nous nous proposons de développer dans l'*Appendice*.

COROLLAIRE des deux problèmes précédents :

Deux points étant donnés sur un plan, trouver un troisième point tel, — 1° — que la somme des carrés des distances de ce point aux deux points donnés soit égale à un carré donné; — 2° — que la différence de ces mêmes carrés soit égale à un autre carré donné.

SYNTHÈSE. — *Construisez* (nº 284) le lieu des points satisfaisant à la première condition, puis (nº 285) le lieu des points satisfaisant à la seconde.

Les points d'intersection de ces deux lignes géométriques sont les points demandés.

On obtient ainsi généralement *quatre* solutions; mais il y aurait lieu à une discussion.

Ceci nous fait voir comment la résolution d'un problème *déterminé* peut quelquefois dépendre de celle de questions *indéterminées*.

§ III. — *Problèmes numériques.*

Nous nous bornerons, dans ce paragraphe, aux applications principales, et presque tous les calculs seront faits avec le secours des tables de logarithmes.

Problèmes sur les lignes.

PROBLÈME I. (*Fig.* 100.) FIG. 100.

N° **286**. — *Étant donnés dans un triangle* ABC, *deux côtés* CA $= 8^m,76$, CB $= 5^m,26$, *et la perpendiculaire* [CD $= 4,38$] *abaissée du sommet de l'angle compris, sur le troisième côté : — trouver ce dernier.*

Remarquons d'abord que, pour construire ce problème, il faudrait, après avoir élevé en un point quelconque D d'une droite indéfinie AX, une perpendiculaire à cette droite, — 1° — *prendre* DC égale à la perpendiculaire donnée ; — 2° — *décrire* du point C comme centre, avec la longueur CA [qui est donnée], un arc de cercle, lequel couperait AX en un point A ; — 3° — *décrire* du même point comme centre, avec CB [qui est donné $<$ CA, mais $>$ CD], un autre arc de cercle, lequel rencontrerait AX en deux points B, B' :

Les deux triangles CAB, CAB' satisferaient également à la question. [*Voyez* d'ailleurs le n° **167**.]

Cela posé, la figure donne

$$AB = AD + BD, \quad \text{ou} \quad AB' = AD - B'D.$$

Ainsi tout se réduit à calculer les deux segments AD, BD.

Voici le tableau des calculs logarithmiques : On a

$$AD = \sqrt{CA^2 - CD^2} = \sqrt{(CA + CD)(CA - CD)},$$

$$\text{et} \quad BD = \sqrt{CB^2 - CD^2} = \sqrt{(CB + CD)(CB - CD)}.$$

$$
\begin{array}{lrl}
1^{\circ} & CA = 8,76 & \log 13,14 = 1,1185954 \\
 & CD = \underline{4,38} & \log 4,38 = \underline{0,6414741} \\
\text{d'où} & CA + CD = 13,14 & 2 \log AD = 1,7600695 \\
 & CA - CD = 4,38 & \log AD = 0,8800347; \quad \text{donc} \quad AD = 7,5864 \\
2^{\circ} & CB = 5,26 & \log 9,64 = 0,9840770 \\
 & CD = \underline{4,38} & \log 0,88 = \underline{\bar{1},9444827} \\
\text{d'où} & CB + CD = 9,64 & 2 \log BD = 0,9285597 \\
 & CB - CD = 0,88 & \log BD = 0,4642798; \quad \text{donc} \quad BD = \underline{2,9126,}
\end{array}
$$

et par conséquent.. $AB = AD + DB = 10,4990$
et.. $AB' = AD - DB' = 4,6738.$

On a donc pour le côté demandé $10^{m},50$ ou $4,67$, à $0,01$ *près.*

FIG. 100. **PROBLÈME II.** (*Fig.* 100.)

Étant donnés dans un triangle ABC, *les côtés* $CA = 128^{m},49$, $AB = 88^{m}$, *et la perpendiculaire*, $CD = 96^{m},45$, *abaissée du sommet* C *sur le côté* AB : — *trouver le troisième côté* CB.

En cherchant à construire ce problème, il serait facile de reconnaître qu'il ne peut admettre qu'*une* solution; et le triangle demandé sera CAB ou CAB′, suivant que l'on obtiendra pour la valeur numérique du segment AD, un nombre plus petit ou plus grand que le côté donné AB.

Voici d'abord le calcul relatif à AD :

$$
\begin{array}{lrl}
 & \multicolumn{2}{l}{AD = \sqrt{CA^2 - CD^2} = \sqrt{(CA + CD)(CA - CD)}} \\
 & CA = 128,49 & \log 224,94 = 2,3520667 \\
 & CD = \underline{96,45} & \log 32,04 = \underline{1,5056925} \\
\text{d'où} & CA + CD = 224,94 & 2 \log AD = 3,8577592 \\
 & CA - CD = 32,04 & \log AD = 1,9288796; \text{donc } AD = 84,8945.
\end{array}
$$

Comme on trouve $AD < AB$, c'est le triangle ACB qui satisfait à la question; or on a........................ $AB = 88$;
par conséquent,.. $DB = 3,1055.$

Quant au calcul de CB, le triangle rectangle CBD donne

$$CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{(96,45)^2 + (3,1055)^2},$$

expression qui ne peut être calculée directement par logarithmes; mais en effectuant les opérations d'après les règles ordinaires, on trouve $CB = 96^{m},50$, à $1^{c.m}$ *près.*

PROBLÈME III.

Deux cordes se coupent dans un cercle; les segments de l'une 'alent respectivement 13m *et* 25m *; les deux segments de l'autre ont entre eux dans le rapport de* 4 *à* 7 *: — on demande la valeur e cette dernière.*

Nommons x et y les deux segments de la corde cherchée. — n a, d'après l'énoncé, les deux équations

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{7},\quad xy=13\times 25;$$

'où, multipliant membre à membre,

$$x^2=\frac{4\times 13\times 25}{7} \text{ et } x=\sqrt{\frac{4\times 13\times 25}{7}}=\sqrt{\frac{1300}{7}}=13,627;$$

onc $\quad y=x\times\frac{7}{4}=\frac{95,389}{4}$ .... $=23,847$

par conséquent, $\quad x+y$ .... $=37,474$

Ainsi la corde cherchée a pour valeur 37m,47, à 1c.m *près.*

PROBLÈME IV.

Trouver en mètres la longueur d'un arc de 45° 20′, *dans un ercle dont le rayon est* 5m,4.

On a d'abord $45°20' = \frac{2720}{5400} = \frac{68}{135}$ du *quadrant* (n° 120);

lonc (n° 289) $a = \frac{68}{136}\times\frac{\pi}{2}\times 5,4 = \frac{34\times\pi\times 5,4}{135}.$

Appliquons les logarithmes.

	log 34	=	1,531 4789
	log π	=	0,497 1499
	log 5,4	=	0,732 3938
Comp.	log 135	=	7,869 6663
	log a	=	0,630 6889
d'où	a	=	4,2726

Donc l'arc rectifié vaut $4^m,2726$, à 0,0001 près.

Problèmes sur les aires.

N° 287. — Nous commencerons par déterminer une expression de l'*aire d'un triangle*, qui soit facilement calculable par logarithmes et fonction de ses seuls côtés.

Soit ABC (*fig.* 40) le triangle proposé. Nommons a, b, c, les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; et désignons par h la hauteur CD, par x la distance AD.

Cela posé, les deux triangles rectangles ACD, BCD donnent les relations $h^2+x^2=b^2$, $h^2+(c-x)^2=a^2$;
d'où, en retranchant membre à membre,

$$2cx-c^2=b^2-a^2, \quad \text{et} \quad x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Mais de la relation $h^2+x^2=b^2$, on déduit $h=\sqrt{b^2-x^2}$;
et en substituant dans celle-ci la valeur de x qu'on vient d'obtenir,

$$\text{on a } h=\sqrt{b^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}}=\frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

Or l'aire du triangle ABC a pour valeur $c\times\frac{h}{2}$;

$$\text{donc} \quad (1) \qquad ABC=\tfrac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

On voit déjà que cette expression ne renferme que les trois côtés a, b, c, du triangle. Mais on peut lui faire subir une transformation qui la rende particulièrement propre au calcul logarithmique.

Remarquons premièrement que la quantité algébrique

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2,$$

étant la différence de deux carrés, peut se décomposer en

$$(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2).$$

Or le premier de ces deux facteurs revient à $(b+c)^2-a^2$, et par conséquent aussi à $(b+c+a)(b+c-a)$.

Le second est la même chose que $a^2-(b-c)^2$, et devient également $(a+b-c)(a-b+c)$.

On a donc
$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$
$$=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

Posons $a+b+c=2p$ [p désignant alors le demi-périmètre]; on en déduit successivement

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a),$$
$$a+c-b=2p-2b=2(p-b),$$
$$a+b-c=2p-2c=2(p-c);$$

d'où $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=16p(p-a)(p-b)(p-c)$,

et substituant dans la valeur de ABC,

$$\text{ABC}=\tfrac{1}{4}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ou, en réduisant, (2) $\text{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ce qui démontre que, — *Connaissant les trois côtés d'un triangle, pour obtenir l'expression numérique de son aire, il faut, — 1° — faire la demi-somme des trois côtés; — 2° — retrancher* alternativement *de cette demi-somme chacun des trois côtés; — 3° — faire le produit de la demi-somme et des trois différences; — 4°* — enfin, — *extraire la racine carrée de ce produit.*

Cette expression est d'ailleurs calculable par logarithmes, et nous allons en faire une application.

Soient $a=4^{\text{m}},25$, $b=6,84$, $c=9,47$.

Tableau du calcul.

$a=4,25$	$p=10,28$	$p=10,28$	$p=10,28$
$b=6,84$	$a=4,25$	$b=6,84$	$c=9,47$
$c=9,47$	$p-a=6,03$	$p-b=3,44$	$p-c=0,81$
$a+b+c=20,56$;			
donc $p=10,28$.			

$$\log p=\log 10,28=1,01199311$$
$$\log(p-a)=\log 6,03=0,78031731$$
$$\log(p-b)=\log 3,44=0,53655844$$
$$\log(p-c)=\log 0,81=\bar{1},90848502$$

$$2\log \text{ABC}=2,23735388$$
$$\log \text{ABC}=1,11867694$$

donc $\text{ABC}=13^{\text{m.q.}},1424$ à 0,0001 près.

Scolie. — On a trouvé (n^{os} **216**, **217**), pour les expressions des rayons r, r' du cercle inscrit et du cercle circonscrit à un triangle,

$$r = \frac{2s}{a+b+c}, \qquad r' = \frac{abc}{4s}$$

[s étant l'aire du triangle].

On a par conséquent

$$r = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}, \quad r' = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

pour les valeurs de r, r', exprimées au moyen des trois côtés seulement; et ces valeurs sont aussi calculables par logarithmes.

Reprenons la résolution des problèmes.

Problème V.

N° **288**. — *Les trois côtés d'un triangle sont entre eux* :: 3 : 4 : 5; *et son aire vaut* 24^{m} : — *on demande les longueurs de ces côtés.*

On a, d'après l'énoncé,

$$a = \tfrac{3}{5}c, \quad b = \tfrac{4}{5}c;$$

d'où $2p = \frac{12}{5}c$, $p = \frac{6}{5}c$, $p-a = \frac{3}{5}c$, $p-b = \frac{2}{5}c$, $p-c = \frac{1}{5}c$.

Appliquant la formule (2) du n° **287**, il vient

$$24 = \sqrt{\tfrac{6}{5}c \cdot \tfrac{3}{5}c \cdot \tfrac{2}{5}c \cdot \tfrac{1}{5}c} = \tfrac{6}{25}c^2,$$

ce qui donne $c^2 = \dfrac{25 \cdot 24}{6} = 100$ et $c = 10$.

Donc $a = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$, $b = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8$.

Ainsi les trois côtés sont 6^{m}, 8^{m} et 10^{m}.

N. B. — Le triangle est rectangle; car on a $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Problème VI.

Étant donné le côté $0^{m},25$ *d'un carré, trouver le côté* c *d'un triangle équilatéral équivalent à ce carré.*

La formule (2) du n° 287 devient

$$(0,25)^2 = \sqrt{\frac{3c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}} = \frac{c^2}{4}\sqrt{3};$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$2 \log c = \log 4 + 2 \log 0,25 + comp. \tfrac{1}{2} \log 3.$$

Or

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0,60205999 \\ 2 \log 0,25 &= \bar{2},79588002 \\ comp. \tfrac{1}{2} \log 3 &= 9,76143938 \\ \hline 2 \log c &= \bar{1},15937939 \\ \log c &= \bar{1},57968969 \end{aligned}$$

d'où $c = 0^m,37994$, à 0,00001 près.

Problème VII.

On demande le nombre de rouleaux de papier qu'il faut employer pour tapisser une pièce rectangulaire qui a $15^m,76$ *de longueur,* $8^m,24$ *de largeur. La hauteur de l'appartement est de* $4^m,87$; *mais celle du lambris est égale à* $0^m,37$. *Enfin chaque rouleau de papier a une longueur de* 10 *mètres, et la largeur du papier est de* $0^m,6$.

Observons d'abord que la hauteur de la partie qui doit être tapissée est de $4^m,87 - 0^m,37$, ou de $4^m,50$.

Cela posé, on a,

d'une part, 2 rectangles de $15^m,76$ de base sur $4^m,50$ de hauteur; ce qui fait $15,76 \times 9 = 141^{m.q.},84$;

d'autre part, 2 rectangles de $8^m,24$ de base sur $4^m,50$ de hauteur; ce qui donne $8,24 \times 9 = 74^{m.q.},16$;

ainsi la superficie totale à tapisser est de $216^{m.q.},00$.

Divisant 216 par 0,6, largeur du papier, on trouve 360 mètres ou 36 rouleaux de 10 mètres.

Vérification.

Le contour de la salle $= (15,76 + 8,24) \times 2 = 48$ mètres.

Or $$48 : 0,6 = 80;$$

donc il faut 80 largeurs de papier, et par conséquent $80 \times 4,50$ ou 360 mètres, ou bien enfin 36 rouleaux à 10 mètres de longueur chacun.

FIG. 124.

PROBLÈME VIII. (*Fig.* 124.)

Étant donnés les trois côtés d'un triangle ABC [$AB = c = 35^m$, $AC = b = 30^m$, $BC = a = 28^m$], *partager ce triangle en deux parties équivalentes par une droite* $B''C''$ *parallèle au petit côté.*

Prenons pour l'inconnue du problème $AB'' = x$. On a (n° 220)

$$ABC : AB''C'' :: AB^2 : AB''^2 :: c^2 : x^2 :: 2 : 1;$$

d'où $$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 \quad \text{et} \quad x = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2};$$

ce qui prouve que la valeur de x est indépendante des deux autres côtés a, b, du triangle.

Remplaçant dans cette valeur, c par 35, on trouve

$$x = \tfrac{1}{2}35\sqrt{2} = 24,748.$$

PROBLÈME IX.

Calculer l'aire S *d'un octogone régulier dont le côté* [c] *a pour valeur* $0^m,25$.

Soient r et r' le rayon et l'apothème de cet octogone; on a les deux égalités

$$(1) \qquad S = 4cr' \quad \text{et} \quad r' = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}c^2},$$

d'où l'on voit que pour obtenir S il suffirait de connaître r.

Or, si l'on désigne par C le côté du carré inscrit correspondant au polygone dont c est le côté, on a (n° 238)

$$c^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - C^2};$$

égalité qui devient, à cause de $C^2 = 2r^2$ (n° 238),

$$c^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2});$$

d'où l'on tire $$r^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}c^2(2 + \sqrt{2}).$$

Substituant cette valeur de r^2 dans la seconde des deux relations (1), on obtient

$$r' = \sqrt{\tfrac{1}{2}c^2(2+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{4}c^2} = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

Donc $S = 2c^2\sqrt{3+\sqrt{2}} = 2(0,25)^2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$;

ou, appliquant les logarithmes,

$$\log S = \log 2 + 2\log(0,25) + \tfrac{1}{2}\log(3+2\sqrt{2}).$$

Or $\qquad 2\sqrt{2} = \sqrt{2^2.2} = \sqrt{8} = 2,8284;$

d'où $\qquad 3 + 2\sqrt{2} = 5,8284.$

Cela posé, $\qquad \log 2 = 0,3010300,$

$2 \log 0,25 = \bar{2},7958800$ (n° 288, *problème* VI),

$\tfrac{1}{2} \log 5,8284 = 0,3827746,$

$\log S = \bar{1},4796846.$

Donc enfin $\qquad S = 0^{m},301777$, à 1 *millim. carré* près.

N. B. — On aurait pu simplifier ce calcul en remarquant que $3+2\sqrt{2}$ est le carré de $1+\sqrt{2}$; d'où $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$.

Ainsi la formule logarithmique deviendrait

$$\log S = \log 2 + 2\log(0,25) + \tfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}),$$

c'est-à-dire qu'il suffirait d'extraire d'abord la racine carrée de 2 et d'ajouter 1 au résultat, afin d'obtenir $1+\sqrt{2}$.

Problèmes sur les figures circulaires.

Problème X.

N° **289**. — *Étant donnée l'aire d'un cercle égal à* $33^{m.q.},1830$, *trouver son rayon* (r).

On a $\qquad \pi r^2 = 33,1830$ (n° **250**);

d'où, en appliquant les logarithmes,

$$2\log r = \log 33,1830 + comp.\ \log \pi,$$

calcul qui n'offre aucune difficulté et donne pour résultat

$$r = 3^{m},25, \quad \text{à } \textit{un dix-millième} \text{ près.}$$

Problème XI.

Déterminer l'aire (S) *d'un segment de cercle dont l'arc est égal à la moitié du quadrant, le rayon* r *du cercle étant égal à* $3^{m},15$.

On a d'abord

$$S = \tfrac{1}{2}r\left(\text{arc } 50^{g} - \tfrac{1}{2}r\sqrt{2}\right) \text{ (n° 281, \textit{corol.})},$$

et ensuite $\quad \text{arc } 50^{g} = \tfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{2}.r = \tfrac{1}{4}\pi.r \text{ (n° 259)}.$

Donc $\quad S = \tfrac{1}{2}r^{2}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{8}r^{2}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right);$

ou, remplaçant r^{2} par sa valeur $(3,15)^{2}$,

$$S = \tfrac{1}{8}(3,15)^{2}\left(\pi - 2\sqrt{2}\right),$$

$$\pi = 3,1416, \quad 2\sqrt{2} = 2,8284;$$

d'où $\quad \pi - 2\sqrt{2} = 0,3132;$

ce qui donne

$\log S = 2\log(3,15) + \log 0,3132 + \textit{comp.} \log 8 - 10,$

et par suite $\quad S = 0^{m.q.},388423.$

Problème XII.

Le côté a *d'un triangle équilatéral a* $5^{m},8$ *de longueur ; trouver les surfaces* s *et* s' *du cercle inscrit et du cercle circonscrit.*

On a, pour l'expression générale du cercle circonscrit à un triangle, $\quad s' = \tfrac{1}{3}\pi.a^{2}\ldots$ (n° 247),

et par conséquent $\quad s' = \tfrac{1}{3}\pi(5,8)^{2};$

d'où $\quad \log s' = \log\pi + 2\log(5,8) + \textit{comp.} \log 3 - 10,$

et par suite $\quad s' = 35^{m.q.},2277.$

Quant au cercle inscrit s, comme son rayon est moitié de celui du cercle circonscrit (n° 237, *corol.* II), il en résulte

$$s = \tfrac{1}{4}s' = 8^{m.q.},8069.$$

APPENDICE

AUX DEUX PREMIERS LIVRES.

Introduction. — Des recherches purement spéculatives sur la Géométrie plane ont conduit *les géomètres* à des propriétés fort curieuses, dont il est possible de tirer ensuite parti pour la résolution de divers problèmes qui, sans un tel secours, présenteraient d'assez grandes difficultés.

Ces propriétés peuvent se grouper en un petit nombre de théories, dont l'exposition succincte fera l'objet de la *première section* de cet *Appendice*, la *seconde*, ainsi que nous l'avons déjà dit au nº 23, devant être consacrée à des considérations générales sur les figures curvilignes, et à quelques notions sur les courbes les plus remarquables et les plus utiles. — Chacune de ces deux sections renfermera *deux* paragraphes.

Comme les théories que nous avons à développer doivent former un chapitre tout à fait spécial et distinct du *Cours élémentaire*, nous interromprons l'ordre des *numéros* suivis jusqu'à présent, en prévenant toutefois que, quand nous aurons à renvoyer à un numéro de l'Appendice, nous ferons suivre le chiffre, de l'abréviation [*App.*]; mais pour les *figures* nous conserverons l'ordre des *numéros* primitifs.

PREMIÈRE SECTION.

§ Ier. — *Centres et axes de symétrie. — Polygones symétriques. — Centre des moyennes distances. — Centres de similitude. — Axes radicaux.*

Centres de symétrie.

THÉORÈME I. (*Fig.* 195 *et* 195 *bis.*) FIG. 195 et 195 *bis.*

Nº 1. — *Lorsque les sommets*, A et A′, B et B′, C et C′,.... *de deux polygones* (*fig.* 195), *ou d'un même polygone* (*fig.* 195 *bis*), *sont, deux à deux, sur des droites concourant en un même point intérieur* O, *et à distances égales de ce point :*

1° — *Les côtés* AB et A′B′, BC et B′C′,..., *sont égaux, parallèles, et de sens contraires ;*

2° — *Toute droite*, telle que MN, *passant par le point intérieur, et terminée sur deux côtés opposés, est divisée par ce point en deux parties égales.*

En effet : — 1° — les deux triangles OAB, OA'B', sont égaux comme ayant un angle égal, O, compris entre côtés égaux chacun à chacun [OA = OA', OB = OB']. Donc AB = A'B', et *angle* OBA = *angle* OB'A'; ainsi les côtés opposés AB, A'B', sont égaux, parallèles et de sens contraires. — Même raisonnement pour les autres couples de côtés.

2° — Puisque les côtés AB, A'B' (*fig.* 195), et AD', DA' (*fig.* 195 *bis*), sont égaux et parallèles, la figure ABB'A' ou AD'A'D est un parallélogramme dont AA', BB', ou AA', DD', sont les diagonales, et O le centre : donc OM = ON (n° 76).

N° 2. — Définitions. — Le point O, qui jouit de la propriété de diviser en deux parties égales toute droite qui, le contenant, est terminée, soit au contour du polygone (*fig.* 195 *bis*), soit à deux côtés égaux et opposés (*fig.* 195), se nomme *le centre de symétrie*, ou simplement le *centre* de la figure; et chaque droite, telle que MN, AA', BB', . . . , pourrait être nommée un *diacentre*, d'après sa propriété de passer par le centre (*).

Corollaire. — Tout polygone doué d'*un centre de symétrie* a nécessairement ses côtés en nombre pair : c'est une conséquence évidente du théorème.

N° 3. — Scolie I. — La réciproque est *vraie* et se démontrerait sans aucune difficulté. — Ainsi :

Fig. 195. Fig. 195 *bis*. *Lorsque deux polygones* (*fig.* 195), *ou un polygone* (*fig.* 195 *bis*), *ont les côtés égaux, parallèles et de sens contraires, deux à deux, ils sont doués d'un centre de symétrie.*

Ainsi, tous les *parallélogrammes* [et comme cas particuliers, le *losange*, le *rectangle*, le *carré*] ont un centre de symétrie; et ce sont les seuls quadrilatères qui puissent en avoir.

Tous les polygones réguliers d'un nombre *pair* de côtés ont un centre de symétrie : c'est le point même que l'on a déjà nommé le *centre du polygone régulier* (n° 132).

Scolie II. — Il serait facile de démontrer, en employant le moyen indiqué au n° 46, ou dans la *note* au bas de la *page* 55, que les deux polygones (*fig.* 195), ou les deux portions de polygone (*fig.* 195 *bis*), sont *directement* superposables, par *rotation* ou *pivotement* autour du centre.

Des axes de symétrie.

N° 4. — Définitions. — Deux points A et A' (*fig.* 196) sont dits *symétriquement* placés par rapport à une droite XY, lorsque cette droite est perpendiculaire sur celle qui joint les deux points, et la divise en deux parties égales.

Fig. 196. Fig. 196 *bis*. Plus généralement, deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 196), [ou portions de polygone, ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 196 *bis*)] sont dits *symétrique-*

(*) On donne ordinairement à une pareille droite le nom de *diamètre*; mais cette dénomination convient plus particulièrement aux droites dont il sera question au n° 7.

ment placés par rapport à une droite XY, lorsque cette droite, étant perpendiculaire sur celles qui joignent *deux à deux* les sommets A et A′, B et B′,... des polygones [ou portions de polygone], divise chacune de ces dernières en deux parties égales.

La droite XY est dite alors elle-même un *axe de symétrie*.

Par exemple, le *diamètre* d'un cercle, la *ligne des centres* de deux cercles, la *bissectrice* d'un angle quelconque, ou de l'angle au sommet d'un triangle isoscèle, les *bissectrices* des angles d'un polygone régulier, ou des angles au centre de ce polygone, etc., sont autant d'*axes de symétrie* dans ces figures.

Il est évident d'ailleurs que les deux polygones (*fig.* 196) ou portions de polygone (*fig.* 196 *bis*) sont superposables par rabattement autour de la droite XY.

N° 5. — *Du trapèze isoscèle* ou *symétrique*. — Un trapèze ABDC (*fig.* 197) dont les côtés latéraux AC, BD sont égaux, et qui peut, pour cette raison, être nommé *isoscèle*, a pour *axe de symétrie* la droite EF qui joint les milieux des deux bases; — car de ce que AE = EB, CF = FD, il résulte que les trois droites AC, EF, BD concourent en un même point I (n° 201, *réc.*); et le triangle IAB étant isoscèle à cause de AC = BD (n° 183), il s'ensuit que IE est *bissectrice* de l'angle AIB; donc, etc. FIG. 197.

Le trapèze *isoscèle* ou *symétrique*, ABDC, jouit d'une autre propriété assez remarquable, c'est d'être *inscriptible* (n° 121). — En effet, IE étant un axe de symétrie, les deux triangles IEA, IEB sont superposables par rabattement autour de IE; donc les perpendiculaires élevées sur AC, BD, par leurs milieux K, L, se coupent en un même point O de IE, lequel point est alors le centre d'un cercle passant par les sommets A, B, D, C.

THÉORÈME II. (*Fig.* 198.) FIG. 198.

N° 6. — *Toute figure qui a deux axes de symétrie*, XY, ZV, *perpendiculaires entre eux, a pour centre de symétrie l'intersection* O *de ces deux axes.*

Pour le démontrer, d'un point quelconque M du contour, abaissons sur XY, ZV, les perpendiculaires MPM′, MQM″. — La droite OQ, étant égale et parallèle à PM, est aussi égale et parallèle à PM′; donc les droites PQ, OM′ sont aussi égales et parallèles (n° 74). — On prouverait de même que PQ est égale et parallèle à OM″; d'où il suit que les droites OM′, OM″ sont le prolongement l'une de l'autre (n° 34), et, de plus, que l'on a OM′ = OM″.

Ainsi le point O, divisant une droite quelconque M′M″ en deux parties égales, est un *centre de symétrie* (n° 2, *App.*); *C. Q. F. D.*

SCOLIE I. — Les deux axes rectangulaires XY, ZV divisent la figure en *quatre parties égales*. — Les parties adjacentes sont superposables par *rabattement*, et les *parties* opposées par *pivotement*.

Il y a donc *deux* sortes de *position symétrique* dans un plan, l'une par rapport à un point, l'autre par rapport à une droite. Les polygones symétriques

de la première sorte sont superposables *directement*, c'est-à-dire par un simple *pivotement* autour du centre ; tandis que les autres sont superposables *inversement*, c'est-à-dire par *rabattement*. Or, ces derniers sont les seuls polygones que l'on doive considérer comme *symétriques* quant à la *forme*, c'est-à-dire comme *inverses*, ou simplement comme *symétriques* dans le sens absolu du mot.

FIG. 199. On peut obtenir le symétrique d'un triangle ABC (*fig.* 199) [ou en général d'un polygone quelconque], en le faisant tourner autour d'un de ses côtés AB, comme *charnière*, pour le rabattre de l'autre côté dans la seconde région du plan, et lui donner la position ABC'. — Dans ce cas, le *dessous* ou l'*envers* du triangle devient le *symétrique* du *dessus* ou de l'*endroit*, — et *réciproquement* (*voyez* le n° **18**).

Mais, ainsi que nous l'avons établi au n° **62**, ces sortes de figures peuvent toujours, par une suite de mouvements convenables, être ramenées à une position telle, que les côtés, devenant parallèles et de même sens deux à deux, soient tous situés dans le même plan.

SCOLIE II. — Toutes les propositions établies dans les n^{os} **1**, **2**, **3**, **4** et **6** (*App.*) sont applicables aux polygones *concaves*, quoique, dans les figures qui ont servi aux démonstrations, nous n'ayons considéré que des polygones *convexes*. — Elles s'appliquent même aux figures curvilignes, si, en généralisant ce que nous avons dit au n° **245** sur le cercle, on regarde une figure curviligne comme un polygone d'*un nombre infini de côtés infiniment petits*.

Des diamètres.

FIG. 200. THÉORÈME III. (*Fig.* 200.)

N° **7**. — *Lorsque les sommets* B et B', C et C',... *de deux polygones, ou d'un même polygone, sont deux à deux sur des droites parallèles entre elles et divisées en deux parties égales par une même droite* MÉDIANE, *cette droite médiane divise aussi en deux parties égales toute autre droite* MM' *parallèle aux premières*, BB', CC',....

[On la nomme, pour cette raison, *un diamètre* du polygone.]

Les sommets B et B', C et C',... sont dits des sommets *homologues* ; et il en est de même des côtés AB et AB', BC et B'C', BD et B'D',..., qui joignent des sommets homologues.

Cela posé, pour démontrer que MM' est divisée en deux parties égales par XY, prolongeons les côtés homologues CD, C'D', jusqu'à leur rencontre avec la droite XY. — Puisque, d'après l'énoncé, les portions C*c* et *c*C', D*d* et *d*D', des droites parallèles CC', DD', sont égales, il s'ensuit (n° **202**, *récip.*) que les droites CD, C'D' doivent concourir au même point de XY ; on a donc aussi (n° **202**) M*m* = *m*M' ; *C. Q. F. D.*

SCOLIE I. — Cette propriété des côtés homologues, de concourir en un même point du diamètre XY, convient également, comme il serait facile

de le prouver, aux droites qui joignent des points homologues quelconques, en définissant les *points homologues,* des couples de points tels, que la droite qui les joint est parallèle aux droites BB′, CC′,..., et est divisée en deux parties égales par le diamètre.

En outre, les *perpendiculaires* CP, C′P′, abaissées de deux sommets homologues [et, en général, de deux points homologues quelconques], *sont égales :* — car les deux triangles rectangles *c*PC, *c*P′C′ sont évidemment égaux.

Enfin, *les deux portions de figure* ABCDE, AB′C′D′E, sont *équivalentes,* comme composées de triangles ou de trapèzes ayant deux à deux même base et même hauteur.

N. B. — Les figures *symétriques* par rapport à un axe, étant comprises dans celles dont nous venons de parler, possèdent toutes les propriétés de ces dernières, en présentant de plus ces deux particularités : — 1° — que les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets homologues sur l'axe de symétrie, se confondent; — 2° — que les portions de figure ABCDE, A′B′C′D′E′, sont *égales et superposables* [inversement] dans le cas de symétrie, tandis qu'elles sont seulement *équivalentes* dans le cas général.

Scolie II. — Dans tout triangle CAB (*fig.* 63), chacune des droites qui joignent les sommets avec les milieux respectifs des côtés opposés, est *un diamètre,* puisqu'elle divise en deux parties égales (n° 201) toute droite parallèle au côté correspondant du triangle ; et il en est de même, pour *un trapèze* quelconque, de la droite qui joint les milieux des deux bases. Fig. 63.

Centre des moyennes distances.

N° 8. — Proposition préliminaire. — Soit ABCDE (*fig.* 201) un polygone quelconque. — Joignons les milieux consécutifs, M, N, P, Q, R, des côtés AB, BC, CD,...: il en résulte un nouveau polygone MNPQR dont le périmètre et l'aire sont évidemment plus petits que le périmètre et l'aire du premier. En opérant sur le second comme sur le premier, on obtient un troisième polygone M′N′P′Q′R′ plus petit que le second ; et ainsi de suite.

Or, ces opérations étant continuées indéfiniment, on doit nécessairement arriver à un polygone *infiniment petit* dont les sommets seront tellement rapprochés, qu'on pourra les considérer comme se confondant en un seul point O, lequel formera, en quelque sorte, *un groupe* d'autant de points qu'il y avait de sommets dans le polygone primitif. — Ce point est d'ailleurs *unique* dans le plan du polygone, puisqu'il résulte de la jonction successive de points fixes et déterminés de position dans le plan. De plus, il jouit d'une propriété remarquable qui sera l'objet du théorème suivant.

Théorème IV. (*Fig.* 202.) Fig. 202.

N° 9. — *Il existe dans le plan de tout polygone* ABCDE [*convexe* ou *concave*] *un point unique* G *tel, que sa distance* GG′ *à une droite quelconque* XY

menée dans le plan, égale le quotient de la division de la somme des distances AA′, BB′,..., *des sommets du polygone à cette droite, par le nombre* n *des sommets;* — c'est-à-dire que l'on a

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC' + \ldots}{n}.$$

[Nous considérons ici un pentagone; mais la démonstration que nous allons exposer est générale.]

Prenons les milieux M, N, P, Q, R, des côtés du polygone, et abaissons de ces points les perpendiculaires MM′, NN′, PP′, . . . , sur la droite XY.

Cela posé, nous avons séparément (n° 82)

$$MM' = \frac{AA' + BB'}{2},\quad NN' = \frac{BB' + CC'}{2},\quad PP' = \frac{CC' + DD'}{2},$$

$$QQ' = \frac{DD' + EE'}{2},\quad RR' = \frac{EE' + AA'}{2};$$

d'où, en ajoutant les égalités membre à membre,

$$MM' + NN' + PP' + QQ' + RR' = AA' + BB' + CC' + DD' + EE'.$$

Opérons actuellement sur MNPQR comme nous avons opéré sur ABCDE: il en résultera un nouveau polygone tel, que la somme des distances de tous ses sommets à la droite XY sera égale à la somme des distances relatives au second polygone, et par conséquent aussi à la somme des distances relatives au premier; et ainsi de suite.

Donc, en désignant par G le point de réunion des cinq sommets du polygone *infiniment petit* dont l'existence a été démontrée dans le numéro précédent, et par GG′ la perpendiculaire correspondante, laquelle peut alors être regardée comme une espèce de *faisceau* de cinq droites égales à GG′, on aura la relation

(1) $$5.GG' = AA' + BB' + CC' + DD' + EE';$$

d'où l'on déduit $$GG' = \frac{AA' + BB' + CC' + DD' + EE'}{5}.$$

Donc, en général, $$GG' = \frac{AA' + BB' + CC' + \ldots\ldots}{n}.$$

N. B. — Le point G est ce que l'on nomme le *centre des moyennes distances.* — Il est évident d'ailleurs que sa position est tout à fait indépendante de la direction donnée à la droite XY, puisque cette position est déterminée uniquement par celle des sommets du polygone.

La droite XY, dont la position dans le plan est *arbitraire,* se nomme un *axe des moyennes distances.*

SCOLIE I. — Nous avons supposé, dans la figure, que le polygone ABCDE

était entièrement situé d'un même côté de la droite XY. Mais nous pouvons généraliser davantage la proposition.

A cet effet, considérons d'abord une droite xy menée par le point G parallèlement à XY, et nommons a, b, c, d, e, les points où les perpendiculaires AA′, BB′, ..., sont rencontrées par la droite xy. — Si nous retranchons de l'egalité (1) l'égalité évidente

$$5.GG' = aA' + bB' + cC' + dD' + eE',$$

il vient (2) $$o = -aA + bB + cC - dD - eE;$$

ce qui démontre que, pour toute droite xy menée par le point G, *la différence entre la somme des distances de tous les sommets situés d'un côté et la somme des distances des sommets situés du côté opposé, par* RAPPORT A CETTE DROITE, *est égale à zéro.*

Considérons maintenant une autre droite $x'y'$ parallèle aux deux premières, et telle, que les sommets A, B, C, D, . . ., ainsi que le point G, soient situés, les uns dans une *région* (n° 11), les autres dans la région opposée par rapport à cette droite. Désignons d'ailleurs par $a', b', c', \ldots, g'$, les points où elle est rencontrée par les perpendiculaires AA′, BB′, CC′,..., GG′.

Si nous ajoutons aux deux membres de l'égalité (2) ceux de l'égalité

$$5.Gg' = aa' + bb' + cc' + dd' + ee',$$

il vient $$5.Gg' = Aa' + Bb' + Cc' + Dd' - Ee',$$

d'où l'on déduit $$Gg' = \frac{Aa' + Bb' + Cc' + Dd' - Ee'}{5};$$

c'est-à-dire que *la distance du point* G *à la droite* x′y′ *est égale au quotient de la division de la différence entre la somme des distances des sommets situés d'un côté et la somme des distances des sommets situés du côté opposé, par le nombre de ces sommets.*

Mais on comprend ordinairement ces différentes propositions dans un seul énoncé, en disant que

La distance du point G *à une droite située d'une manière quelconque* dans le plan du polygone *est égale au quotient de la division de la somme algébrique des distances de tous les sommets à cette droite, par le nombre des sommets*, le mot *algébrique* signifiant ici que ces distances doivent être prises, suivant le sens, les unes avec le signe +, les autres avec le signe —.

SCOLIE II.—De là résulte un moyen de — *Déterminer,* pour tout polygone, *la position du centre des moyennes distances :*

Après avoir *tracé* dans le plan deux droites qui se coupent sous un angle quelconque, on commence par *mesurer* les perpendiculaires abaissées de tous les sommets du polygone, sur chacune des deux droites, en ayant soin de distinguer celles qui sont situées d'un côté de chaque droite, de celles qui sont situées du côté opposé; puis *on divise la somme algébrique* des distances relatives à chaque droite, *par le nombre des sommets.*

Cela fait, *on mène*, à une distance marquée par le premier quotient, *une parallèle à la première droite* (nº **154**), et à une distance marquée par le second quotient, *une parallèle à la seconde droite*.

Le point d'intersection de ces deux parallèles est *le centre des moyennes distances*.

FIG. 203. SCOLIE III. — Dans un triangle quelconque ABC (*fig.* 203), le centre des moyennes distances n'est autre que le *point de concours* des trois droites qui joignent les sommets C, A, B, aux milieux D, E, F, des côtés opposés.

En effet, soient abaissées des points A et B, des perpendiculaires AP, BQ, sur la droite CD. — Les deux triangles rectangles ADP, BDQ, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale, AD = DB, et un angle aigu égal.

Donc $AP = BQ$, d'où $AP - BQ = 0$;

ce qui prouve que l'égalité (2) du *scolie* I (*App.*) est satisfaite. Ainsi la droite CD passe par le centre des moyennes distances. — On démontrerait de même que ce centre se trouve sur les deux autres droites AE, BF; donc il est situé à leur intersection.

Le centre des moyennes distances d'un quadrilatère quelconque est l'intersection des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

Le centre des moyennes distances d'un polygone régulier n'est autre que le centre de figure.

Le centre de symétrie d'un polygone symétrique est aussi un centre des moyennes distances; — *etc.*

Toutes ces propositions sont faciles à démontrer.

Des centres de similitude.

Nº **10**. — OBSERVATION PRÉLIMINAIRE. — Nous avons vu, au nº **190**, que deux polygones semblables P, P′, étant situés sur un même plan, il est toujours possible d'amener l'un des deux polygones, P′ par exemple, dans une position telle, que les côtés homologues des deux figures soient parallèles et de même sens. Or, il peut se présenter deux cas : ou bien, pour satisfaire à cette condition, il suffit d'un simple *pivotement* du polygone P′ autour de l'un de ses sommets; ou bien, il faut avoir recours (nº **62**) à un *rabattement* de ce même polygone autour de l'un de ses côtés, combiné ou non combiné avec un pivotement.

Pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre, nous dirons, dans le premier cas, que les deux polygones sont *directement* semblables, et dans le second, qu'ils sont *inversement* semblables.

On a un exemple des deux espèces de similitude, en considérant les deux
FIG. 196. polygones symétriques ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 196, nº **4**, *App.*), et supposant qu'après avoir tiré les diagonales AC, AD, et pris sur AB une partie quelconque A*b*, on mène ensuite *bc*, *cd*, *de*, respectivement parallèles à BC, CD, DE (*voyez* le nº **277**).

Le polygone A*bcde* est *directement* semblable au polygone ABCDE, et *inversement* semblable au polygone A′B′C′D′E′.

Deux polygones sont *directement* semblables lors même que leurs côtés sont parallèles deux à deux et dirigés en sens contraire, puisque, ainsi que nous l'avons reconnu pour des polygones doués d'un centre de symétrie (nº **6**, *App.*), il suffit d'un pivotement autour du centre [ou d'un point quelconque de leur plan], pour les amener à avoir leurs côtés parallèles et de même sens.

En un mot, pour reconnaître si des polygones sont *directement* ou *inversement* semblables, il suffit de s'assurer si, dans le cas particulier où ils auraient un côté égal (nº **189**), on pourrait les superposer *directement* ou *inversement* (nº **277**).

Or, il ne sera question, dans tout ce qui va suivre, que de polygones *directement* semblables.

Nº **11**. — *Définition.* — On nomme CENTRE DE SIMILITUDE un point placé de la même manière par rapport à deux polygones [directement] semblables, c'est-à-dire un point tel, que si on le joint à deux sommets, ou, en général, à deux points homologues quelconques, les deux lignes de jonction appartiennent à *une même direction*, et *sont proportionnelles aux côtés homologues.*

Les distances de ce point aux sommets ou aux points homologues, sont dites *des rayons de similitude.*

THÉORÈME V. (*Fig.* 204 et 204 *bis.*) FIG. 204 et 204 *bis.*

Nº **12**. — *Si d'un point* O *pris à volonté sur le plan d'un polygone* ABCDE, *on mène des droites à tous les sommets, et que sur ces droites* (*fig.* 204) *ou sur leurs prolongements* (*fig.* 204 *bis*), *on prenne des parties* O*a*, O*b*, O*c*,... *qui leur soient proportionnelles,*

1º — *Les points* [*a*, *b*, *c*,...] *ainsi obtenus détermineront un second polygone* [*abcde*] *semblable au polygone donné ;*

et 2º — *Le point arbitraire* O *sera le centre de similitude des deux figures.*

En effet, — 1º — Les triangles OAB, O*ab*, sont semblables comme ayant un angle égal [en O] compris entre côtés proportionnels; d'où l'on déduit *angle* OBA = *angle* O*ba*; donc (nº **46**) AB est parallèle à *ab*; et l'on a la suite de rapports égaux AB : *ab* :: OA : O*a* :: OB : O*b*.

On démontrerait de la même manière que les côtés BC, *bc* sont parallèles, et que l'on a cette suite de rapports égaux

$$BC : bc :: OB : Ob :: OC : Oc ;$$

et ainsi de suite, de proche en proche.

D'où l'on voit que les deux polygones ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels; donc (nº **189**) ils sont semblables.

2º — Soient M et *m*, deux points homologues pris à volonté dans les polygones ABCDE, *abcde*; et joignons le point O avec les points M et *m*. Cela posé, puisque M et *m* sont des points homologues, on a (nº **199**)

angle MDC = *angle mdc*, et MD : *md* :: DC : *dc*.

D'ailleurs, à cause de la similitude des triangles ODC, O*dc*,

angle ODC = *angle* O*dc*, et DC : *dc* :: OD : O*d* :: MD : *md*.

Ainsi, les triangles OMD, Omd, sont semblables comme ayant un angle égal [$MDO = mdO$] compris entre côtés proportionnels. Mais les trois points D, d, O, sont en ligne droite; donc aussi, les points M, m, O, sont en ligne droite; et l'on a en même temps $OM : Om :: DC : dc$.

Ce qui veut dire, premièrement, que toute droite *homologue* commune aux deux polygones passe par le point O, et, en second lieu, que les parties de cette droite comprises entre le point O et les points homologues, sont *dans le rapport de similitude* des deux polygones.

FIG. 204. SCOLIE. — Le point O (*fig.* 204), correspondant au cas où les côtés homologues des deux polygones semblables sont parallèles et dirigés dans le même sens, est dit un centre de similitude *externe*, parce qu'en effet il est situé *en dehors sur le prolongement* de la droite qui joint chaque couple de

FIG. 204 *bis*. points homologues; — le centre de similitude est dit *interne* (*fig.* 204 *bis*) lorsque les côtés homologues sont parallèles et dirigés en sens contraire, parce qu'alors il est situé *entre* deux points homologues.

On doit toutefois observer qu'un centre de similitude *interne* peut être *hors* des deux polygones, et qu'un centre de similitude *externe* pourrait être *en dedans* de l'un et de l'autre, puisque, d'après l'énoncé du théorème, le point O a été pris à volonté sur le plan.

FIG. 204 et 204 *bis*.

THÉORÈME VI. (*Fig.* 204 et 204 *bis*.)

N° 13. — RÉCIPROQUEMENT : — *Deux polygones semblables dont les côtés homologues sont deux à deux parallèles et dirigés dans le même sens ou en sens contraire, ont un centre de similitude* qui est *externe* dans le premier cas, et *interne* dans le second.

En effet, joignons d'abord deux couples de sommets homologues A et a, B et b; prolongeons les droites de jonction, Aa, Bb, jusqu'à leur rencontre en un certain point O, et joignons successivement le point O aux points C et c, D et d, E et e. — Cela posé, puisque AB est parallèle à ab, les deux triangles OAB, Oab, sont semblables, et donnent

$$AB : ab :: OB : Ob, \quad \text{et} \quad \textit{angle}\ ABO = \textit{angle}\ abO;$$

on a d'ailleurs $AB : ab :: BC : bc$, et *angle* $ABC =$ *angle* abc;

d'où l'on déduit $OB : Ob :: BC : bc$, et *angle* $CBO =$ *angle* cbO;

donc les deux triangles OBC, Obc, sont semblables comme ayant un angle égal [en B et b] compris entre côtés proportionnels, et donnent par conséquent *angle* $BOC =$ *angle* bOc.

Donc, puisque les trois points B, b, O, sont en ligne droite, il en est de même des trois points C, c, O.

On prouverait ainsi de proche en proche, que D, d, O, et E, e, O, sont en ligne droite. — *Donc*, etc.

SCOLIE I. — Dans le cas où les deux polygones sont égaux [les côtés homologues étant toujours parallèles], le centre de similitude est situé *à l'in-*

fini s'il est *externe*, et au milieu de la droite qui joint deux points homologues s'il est *interne*.

SCOLIE II. — Pour deux polygones semblables donnés de position sur un plan, et dont les côtés homologues sont parallèles, on obtient immédiatement le centre de similitude en *joignant* deux couples de sommets homologues, et *prolongeant* les deux droites de jonction jusqu'à leur point de rencontre.

Mais on peut arriver au même résultat, en ne considérant qu'une de ces droites [Aa, par exemple] : et pour cela, il suffit de *déterminer* (nº 265, N. B.) sur cette droite, les deux *points conjugués* qui la divisent dans le *rapport de similitude* des deux polygones. — Le point *extérieur* de la droite Aa ainsi divisée est pour le cas où les côtés sont parallèles et de même sens; et le point *intérieur*, conjugué du premier, est pour celui où les côtés sont de sens contraire. FIG. 205 et 205 *bis*.

THÉORÈME VII. (*Fig.* 205 *et* 205 *bis*.)

Nº 14. — *Lorsque trois polygones semblables*, P, P′, P″, *situés dans un même plan, ont leurs côtés homologues parallèles, les trois centres de similitude sont sur une même droite.*

Il ne peut se présenter que deux cas : — ou bien, les trois centres sont *externes* (*fig.* 203); ou bien, l'un étant externe, les deux autres sont internes (*fig.* 203 *bis*). Mais la démonstration est la même pour les deux cas. FIG. 203. FIG. 203 *bis*.

[Nous n'avons d'ailleurs figuré que trois des triangles qui constituent les polygones, parce que cela suffit.]

Désignons par O″, O′, O, les centres de similitude de P et P′, P et P″, P′ et P″; et appelons X le point du polygone P qui est l'homologue du point O, centre de similitude de P′, P″. La droite OX est une ligne homologue dans les deux polygones P′, P″; donc (nº 12) elle doit passer par le point O′, centre de similitude de ces deux polygones; mais comme étant aussi une ligne homologue dans les deux polygones P, P′, elle doit passer par O″, centre de similitude de ces deux polygones; donc, les points O, O′, O″, sont en ligne droite; *C. Q. F. D.*

THÉORÈME VIII. (*Fig.* 206.) FIG. 206.

Nº 15. — *Deux polygones* [directement] *semblables, étant situés d'une manière quelconque dans un même plan, ont toujours un point homologue commun* (*).

On doit entendre par là qu'il existe dans le plan de ces deux polygones un point tel, que si on le joint aux sommets des deux polygones, les droites homologues de jonction sont entre elles dans le *rapport de similitude* des polygones, et que les angles formés par ces lignes sont égaux chacun à chacun. — On peut dire aussi que c'est le point qui, pris pour centre de *pivotement* de l'un des polygones considérés, a la position indiquée par l'une des deux *figures* 204 ou 204 *bis*. FIG. 204 ou 204 *bis*.

(*) Ce théorème est dû à M. CHASLES. (Voyez le *Bulletin des Sciences mathématiques* de *Férussac*, pour 1830, t. XIV, p. 321.)

Cela posé, voici la construction au moyen de laquelle on parvient à fixer sa position [l'*analyse* étant sous-entendue].

FIG. 206. SYNTHÈSE. — Soient ABCDE, *abcde* (*fig.* 206), les deux polygones donnés, et N le point où les deux côtés AB, *ab*, prolongés si cela est nécessaire, se rencontrent : [ces deux polygones sont *directement* semblables ; car un simple *pivotement* autour du point *a* par exemple, suffirait pour rendre leurs côtés parallèles].

Déterminons (n° 181, 2°) le point P tel que PA = P*a* = PN, et le point Q tel que QB = Q*b* = QN ; *tirons* la droite PQ, et *déterminons* (n° 4, *App.*) le symétrique O du point N par rapport à PQ :

Le point O sera le point demandé.

En effet, joignons le point P aux points N et O : — les deux triangles APN, APO, sont isoscèles, et donnent *angle* PAN = *angle* PNA, et *angle* PAO = *angle* POA ; d'où l'on déduit (n° 85)

$$\text{NPA}' = 2\,\text{PAN}, \qquad \text{OPA}' = 2\,\text{PAO}\ ;$$

ou, retranchant ces deux égalités membre à membre,

$$\text{NPO} = 2\,\text{NAO}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \text{NPO} = 2\,\text{BAO}.$$

Pareillement, les deux triangles isoscèles *a*PN, *a*PO, donneraient

$$\text{NPO} = 2\,\text{N}a\text{O}, \qquad \text{ou} \qquad \text{NPO} = 2\,ba\text{O}\ ;$$

donc déjà les angles BAO, *ba*O, sont égaux.

En raisonnant sur les quatre points Q, B, *b*, N, comme on a raisonné sur les quatre points P, A, *a*, N, on démontrerait de même que les angles ABO, *ab*O, sont égaux.

Ainsi les deux triangles OAB, O*ab*, sont semblables, et donnent

$$\text{OA} : \text{O}a :: \text{OB} : \text{O}b :: \text{AB} : ab.$$

Il en serait de même quel que fût le nombre des triangles.

N. B. — Faisons *pivoter* la figure O*abcde* autour du point O, de manière que O*a* vienne s'appliquer, soit sur OA, soit sur son prolongement : il est facile de voir que les côtés AB et *ab*, AE et *ae*, ED et *ed*,... deviendront parallèles deux à deux, de même sens ou de sens contraires ; en sorte que, dans le premier cas, le point O sera un centre de similitude *externe*, et dans le second, ce sera un centre de similitude *interne*.

SCOLIE I. — Le point O est *le seul point homologue commun* aux deux polygones semblables proposés ; et toute droite qui y passe est *une ligne homologue commune*, — et réciproquement.

En généralisant la définition qui a été donnée ci-dessus (n° 12, *App.*, *scol.*), on peut nommer aussi *centre de similitude* des deux polygones, leur *point homologue commun*.

Il existe encore, pour déterminer ce point, un autre moyen de construction qui semble même plus naturel que le précédent :

Déterminez (n° 284) la circonférence de cercle dont tous les points sont tels, que les distances de chacun de ces points à deux sommets homologues

A, *a*, soient entre elles dans le *rapport de similitude; répétez* la même construction pour deux autres points homologues, B, *b* :

L'un des points où les deux circonférences se coupent, est le point cherché.

Nous n'insisterons pas sur ce moyen qui exigerait une discussion spéciale.

Scolie II. — On peut, dans le théorème précédent, supposer que les deux *polygones* semblables deviennent égaux entre eux. Alors, le point O n'est autre que l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des droites qui joignent les divers couples de points homologues : les *perpendiculaires* ainsi élevées, quel qu'en soit le nombre, *concourent* donc en un même point.

Centres de similitude des cercles.

Théorème IX. (*Fig.* 113.) Fig. 113.

N° 16.—*Deux cercles* O, O′ [ainsi que deux polygones réguliers d'*un même nombre pair de côtés parallèles deux à deux*], *ont* toujours à la fois *deux centres de similitude*, l'un *externe*, l'autre *interne*.

D'abord, quand les deux cercles sont extérieurs, comme dans la figure actuelle, les points C et C′ où les tangentes communes rencontrent la ligne des centres, sont des centres de similitude, puisque ces points divisent *harmoniquement* (n° 272) la distance OO′, dans le rapport des rayons R et R′.

Lorsque deux cercles se touchent *extérieurement* (*fig.* 85), leur point de contact est un centre de similitude interne; et s'ils se touchent *intérieurement* (*fig.* 87), le point de contact est un centre de similitude externe. Fig. 85. Fig. 87.

Mais, en général, on obtient ces deux centres de similitude, en divisant *harmoniquement* la distance OO′ des deux centres dans le rapport des rayons R et R′.

Il existe d'ailleurs plusieurs autres cas particuliers remarquables; ainsi :

Pour deux cercles *concentriques*, les *centres de similitude* se réunissent au *centre commun ;*

Pour deux cercles *égaux*, le centre de similitude *interne* est *au milieu* de la ligne des centres, et le centre *externe* est situé *à l'infini* (voyez le *scolie* I, n° 13, *App.*); — *etc.*

On reconnaît aussi facilement, — 1° — que quand un des cercles dégénère en une ligne droite, les centres de similitude sont *aux extrémités du diamètre* de l'autre cercle, *perpendiculaire à la droite;* — 2° — que si l'un des cercles se réduit à *un point*, ce point est à la fois le centre de similitude *interne* et *externe*.

Observons encore qu'en généralisant, comme au n° 18, *App., scol.*, on trouverait une infinité d'autres centres de similitude des deux cercles, c'est-à-dire une infinité de points homologues communs.

Scolie. — Lorsque trois cercles sont situés sur un même plan, ce qui donne *six* centres de similitude, — 1° — *les trois centres* de similitude *externes,* — 2° — *un centre externe* et *deux internes,* — *sont sur une même ligne droite;*— ce qui donne en tout *quatre* droites passant par les six points combinés *trois à trois.*

Nous nous dispenserons de donner ici la démonstration de cette proposition, parce qu'elle est, en tous points, semblable à celle du n° **14**, *App*.

Des axes radicaux et du centre radical (*).

N° **17**. — *Définitions*. — On nomme *axe radical* de deux cercles tracés sur un même plan, le lieu des points par chacun desquels on peut mener à ces cercles des tangentes égales.

FIG. 207. Soient R, R', les rayons de deux cercles O, O' (*fig*. 207), que nous supposons d'abord, pour fixer les idées, *extérieurs* l'un à l'autre. — Déterminons (n° **285**) sur la ligne des centres, un point D tel que l'on ait la relation

$$\mathrm{OD}^2 - \mathrm{O'D}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2 = n^2,$$

n désignant le côté d'un carré égal à $(\mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2)$ (n° **285**).

Cela posé, je dis que la *perpendiculaire* DL élevée par le point D *à la ligne des centres*, est un *axe radical*.

En effet, d'un point S pris à volonté sur cette droite, menons les tangentes ST, ST', et tirons les rayons OT, O'T', puis les droites SO, SO'. — Les deux triangles rectangles STO, ST'O', donnent les relations suivantes

$$\mathrm{ST}^2 = \mathrm{SO}^2 - \mathrm{R}^2, \qquad \mathrm{ST'}^2 = \mathrm{SO'}^2 - \mathrm{R'}^2;$$

mais on a (n° **285**) $\mathrm{SO}^2 - \mathrm{SO'}^2 = \mathrm{OD}^2 - \mathrm{O'D}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2$,

d'où l'on déduit $\mathrm{SO}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{SO'}^2 - \mathrm{R'}^2$;

donc $\mathrm{ST} = \mathrm{ST'}$,

et, par conséquent, les tangentes menées d'un point quelconque S de DL sont égales.

Comme, *réciproquement*, $\mathrm{ST} = \mathrm{ST'}$ donne $\mathrm{ST}^2 = \mathrm{ST'}^2$,

d'où $\mathrm{SO}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{SO'}^2 - \mathrm{R'}^2$, et $\mathrm{SO}^2 - \mathrm{SO'}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2 = \mathrm{OD}^2 - \mathrm{O'D}^2$:

il s'ensuit que la droite DL est le lieu de tous les points par où l'on peut mener des tangentes égales aux deux cercles; donc DL est un axe radical;

C. Q. F. D.

N° **18**.— *Détermination de cet axe*.—Pour fixer la position du point D par rapport au point O, par exemple, nous pouvons opérer comme au n° **285**.

En divisant membre à membre l'égalité

$$\mathrm{OD}^2 - \mathrm{O'D}^2 = n^2$$

par celle-ci : $\mathrm{OD} + \mathrm{O'D} = \mathrm{OO'}$,

on trouve $\mathrm{OD} - \mathrm{O'D} = \dfrac{n^2}{\mathrm{OO'}}$;

d'où, en ajoutant, et divisant par 2,

$$\mathrm{OD} = \frac{\mathrm{OO'}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{\mathrm{OO'}} = \frac{\mathrm{OO'}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{R'}^2}{\mathrm{OO'}};$$

(*) Voyez pour cette théorie, un Mémoire de GAUTIER *de Tours* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, cahier 16, p. 124 et suiv.).

c'est-à-dire qu'il suffirait de porter, à partir du milieu C de la distance des centres OO', et à droite de ce point [tant que le plus petit cercle est lui-même à la droite du point], une partie égale *à la moitié d'une troisième proportionnelle* aux lignes OO' et n ou $\sqrt{R^2 - R'^2}$.

Mais pour chacune des positions relatives de deux cercles, on a presque toujours un moyen plus simple de fixer la position de l'axe radical.

Ainsi, — 1° — dans le cas actuel de deux cercles *extérieurs* [ou de toute autre position pour laquelle il existe au moins une tangente commune], comme le milieu de la portion de cette tangente, comprise entre les deux points de contact, appartient nécessairement à l'axe radical, il suffit de *mener par ce point milieu une perpendiculaire à la ligne des centres;*

2° — Lorsque les cercles *se touchent*, soit extérieurement, soit intérieurement (*fig.* 85 et 87), le point commun aux deux circonférences appartient nécessairement à l'axe radical, qui n'est autre alors que *la tangente commune en ce point;* FIG. 85 et 87.

3° — Si les deux cercles se coupent, les points M, M' (*fig.* 86), satisfont évidemment à la relation $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$, ou $M'O^2 - M'O'^2 = R^2 - R'^2$. Par conséquent, *les prolongements* dans les deux sens, *de la corde commune*, forment l'axe radical. FIG. 86.

Pour le cas où les deux cercles sont *intérieurs* l'un à l'autre (*fig.* 88), il faut avoir recours à la relation FIG. 88.

$$OD = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'},$$

qui nous apprend d'ailleurs que la distance du point C, milieu de la ligne des centres, à l'axe radical, augmente sans cesse à mesure que la droite OO' diminue; et lorsqu'on suppose $OO' = 0$, il vient $OD = \frac{R^2 - R'^2}{0}$, ou OD *infini*. — Ce qui démontre que

Deux circonférences concentriques sont privées d'axe radical; — c'est-à-dire qu'il n'existe sur leur plan aucun point par lequel on puisse leur mener des tangentes égales.

Autres cas particuliers : — Lorsque les deux *cercles* sont *égaux*, OD se réduit à $\frac{OO'}{2}$; c'est-à-dire que l'axe radical est la *perpendiculaire élevée par le milieu de la ligne des centres.*

Si l'un des cercles se réduit à *un point*, l'axe radical s'obtient en joignant les *milieux des deux tangentes menées du point au cercle donné.*

Si l'un des cercles dégénère en *une ligne droite*, l'axe radical est *la droite elle-même.*

Etc., etc.

N° 19. — DU CENTRE RADICAL. — *Trois cercles* situés sur un même plan [dont les centres ne sont pas sur une même droite], donnent, par leur combinai-

son deux à deux, *trois* axes radicaux ; — et ces *trois axes* se coupent en un *même point*.

En effet, les deux premiers se coupant, comme respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent (n° 80), leur point d'intersection est tel, qu'on peut mener de ce point aux trois circonférences, des tangentes égales ; donc il appartient au troisième axe radical.

Ce point commun aux trois axes se nomme le *centre radical des trois cercles*.

Il résulte évidemment de cette définition, et de ce qui a été démontré plus haut, n° 18, 3°, *App.*, que — *Si trois circonférences se coupent deux à deux, les trois cordes qui unissent les points d'intersection se coupent en un même point*, qui n'est autre que le *centre radical* des trois cercles.

Ainsi, lorsque ce *point* d'intersection est *extérieur* aux trois cercles, les *six tangentes* partant de ce point sont *égales*.

Fig. 207.

THÉORÈME X. (*Fig.* 207.)

N° 20. — *Si d'un point quelconque* S *de l'axe radical de deux cercles, on mène une sécante qui rencontre les circonférences en* QUATRE *points,* M, N, pour la première, et M′, N′, pour la seconde, *ces quatre points appartiennent à une même circonférence de cercle.*

Car on a (n° 228) $ST^2 = SM \times SN$, $ST'^2 = SM' \times SN'$;

donc, à cause de $ST = ST'$, $SM \times SN = SM' \times SN'$.

Ainsi (n° 229, *récip.*) les points M, N, M′, N′, sont sur une même circonférence.

N. B. — On déduit également des deux relations, et à cause de $ST = ST'$,

$$ST^2 = SM' \times SN', \quad ST'^2 = SM \times SN ;$$

donc les points M′, N′, et T, ou bien M, N, et T′, sont sur une même circonférence tangente à ST ou ST′ (*même numéro*), et par conséquent aussi à la circonférence OT ou OT′.

Fig. 208 et 208 *bis*.

THÉORÈME XI. (*Fig.* 208 et 208 *bis*.)

N° 21. — *Si par l'un,* C, *des deux centres de similitude* [externe ou interne] *de deux cercles,* O, O′, *on mène à ces cercles deux sécantes* — 1° — *les huit points d'intersection* [A, A′, B, B′, et *a*, *a′*, *b*, *b′*], *combinés quatre à quatre d'une manière convenable, forment* QUATRE *groupes situés respectivement sur autant de nouvelles circonférences ;* — 2° — *ces quatre circonférences ont pour* CENTRE RADICAL COMMUN *celui des deux centres de similitude qui a servi à déterminer ces circonférences.*

En effet, — 1° — puisque C est un centre de similitude, on a

$$CA : CB :: Ca : Cb \text{ (n° 16, } App.\text{) ;}$$

d'ailleurs $\quad Ca : Cb :: Cb' : Ca'$ (n° **227**);

donc $\quad CA : CB :: Cb' : Ca'$, ou $CA \times Ca' = CB \times Cb'$.

Ainsi (n° **229**) les quatre points A, B, a, b, sont sur une même circonférence.

On démontrerait de la même manière que les trois autres groupes,

$$A', B', a, b, \quad A, B', a', b, \quad A', B, a, b',$$

sont chacun sur une même circonférence.

N. B. — Pour grouper convenablement les points, il suffit de remarquer qu'aucun groupe ne doit contenir à la fois *ni deux points homologues, ni deux points appartenant en même temps à une même sécante et à une même circonférence* donnée.

2°. — Désignons par CT, CT′, CT″, CT‴, les tangentes [elles ne sont pas tracées sur la figure] menées respectivement aux quatre cercles

$$ABa'b', \quad A'B'ab, \quad AB'a'b, \quad A'Bab'.$$

On a (n^os^ **227** et **228**) les quatre relations, savoir :

Pour le premier cercle, $\quad CA \times Ca' = CB \times Cb' = CT^2$;

Pour le deuxième, $\quad CA' \times Ca = CB' \times Cb = CT'^2$;

Pour le troisième, $\quad CA \times Ca' = CB' \times Cb = CT''^2$;

Et pour le quatrième, $\quad CA' \times Ca = CB \times Cb' = CT'''^2$;

d'où, à cause de la liaison qui existe entre ces égalités,

$$CT = CT' = CT'' = CT'''.$$

Donc le point C est un centre radical commun aux quatre cercles *pris trois à trois*; *C. Q. F. D.*

N. B. — En considérant le centre de similitude interne C′, on obtiendrait quatre autres cercles ayant le point C′ pour centre radical commun.

Ces cercles sont dits *réciproques* des cercles O et O′, par rapport au centre de similitude qui leur correspond.

Scolie. — On peut supposer que les deux sécantes CA, CB (*fig.* 209 et 209 *bis*), viennent à se réunir en une seule; alors les deux cercles réciproques $ABa'b'$, $A'B'ab$, se réduisent à cette sécante elle-même. — Quant aux deux autres, $AB'a'b$, $A'Bab'$, ils deviennent à la fois tangents aux deux cercles O, O′, l'un en A, a', l'autre en A′, a. Fig. 209 et 209 *bis*.

Réciproquement : — Tout cercle qui en touche à la fois deux autres est un de leurs cercles réciproques par rapport au centre de similitude *externe* ou *interne*, suivant que le contact est de même espèce [*extérieur* ou *intérieur* à la fois], ou d'espèce différente; d'où l'on déduit que

Les deux points de contact sont en ligne droite avec le centre de similitude correspondant.

Scolie général. — On peut pressentir dès à présent de quelle utilité peut être, dans la résolution des problèmes sur les contacts des circonférences de cercle, la considération des centres de similitude, des axes et des centres radicaux.

Le plus souvent, tout se réduit à déterminer la position des centres de similitude, des axes et des centres radicaux, pour des cercles donnés, questions que nous savons déjà résoudre.

§ II. — *Théorie des transversales. — Faisceaux harmoniques. — Pôles et polaires.*

On comprend sous la dénomination générale de *théorie des transversales*, l'ensemble des relations métriques que présentent des systèmes quelconques de lignes qui se coupent suivant des lois déterminées. — Quelques-unes des propositions relatives aux lignes proportionnelles et à la similitude des figures sont des cas particuliers de cette théorie. Nous allons maintenant en démontrer plusieurs autres qui sont d'un usage assez fréquent.

Transversales rectilignes.

Fig. 210. Théorème I. (*Fig.* 210.)

N° 22. — *Toute transversale* XY *détermine sur les trois côtés d'un triangle* ABC, *ou sur leurs prolongements, six segments tels, que le produit*

$$AC' \times BA' \times CB'$$

de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres,

$$C'B \times A'C \times B'A.$$

En effet, menons par un quelconque des sommets du triangle, B par exemple, la droite BK parallèle à la transversale et terminée en K, au côté opposé AC. Les deux couples de triangles semblables ABK, AC'B', et CA'B', CBK, donnent

$$AC' : C'B :: AB' : B'K, \text{ d'où } AC' \times B'K = C'B \times AB';$$

$$\text{et} \quad BA' : A'C :: B'K : CB'; \text{ d'où } BA' \times CB' = A'C \times B'K.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre et supprimant le facteur commun B'K, on obtient

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A; \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

N. B. — La transversale peut passer dans l'intérieur du triangle ou être

tout entière située au dehors; mais, quelle que soit sa position, les points de division A′, B′, C′, sont toujours en nombre *pair* [o ou 2] sur les *côtés* mêmes du triangle, et en nombre *impair* [1 ou 3] sur les *prolongements.*

RÉCIPROQUEMENT : — *Trois points étant distribués sur les trois côtés d'un triangle ou sur leurs prolongements* (ce qui donne *six* segments), de manière qu'il y ait *un seul point sur chaque droite,* et que le nombre des points situés sur les *côtés* eux-mêmes soit *pair, si le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres, les trois points sont en ligne droite.*

C'est une conséquence nécessaire du principe établi au n° **21**, page 15.

THÉORÈME II. (*Fig.* 211.) FIG. 211.

N° **23**. — *Trois droites* AA′, BB′, CC′, *menées des trois sommets d'un triangle à un même point* O [intérieur ou extérieur au triangle], *déterminent sur les côtés opposés* BC, AC, AB, *six segments tels que le produit* $BA' \times CB' \times AC'$ *de trois segments non consécutifs est égal au produit* $A'C \times B'A \times C'B$ *des trois autres.*

En effet, les deux triangles ABA′, ACA′, coupés par les transversales respectives COC′, BOB′, aux points C′, C, O, et B′, B, O, donnent (n° **22**, *App.*) les deux relations

$$AC' \times BC \times A'O = C'B \times CA' \times OA,$$

et

$$AB' \times CB \times A'O = B'C \times BA' \times OA,$$

d'où, multipliant *en croix* membre à membre, et supprimant les facteurs communs CB, A′O, OA,

$$AC' \times CB' \times BA' = C'B \times B'A \times A'C;$$

C. Q. F. D.

N. B. — Il est à remarquer que, quelle que soit la position du point O dans le plan du triangle, les points de division sont en nombre *impair* sur les *côtés* eux-mêmes, et en nombre *pair* sur les *prolongements.*

RÉCIPROQUEMENT : — *Trois points étant distribués sur les côtés d'un triangle ou sur leurs prolongements,* un à un, et de manière qu'il y ait un nombre *impair* de points sur les *côtés* eux-mêmes, *si le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres, les droites menées de chaque point de division à l'angle opposé concourent en un même point.*

COROLLAIRES. — 1° — *Les trois droites menées des sommets d'un triangle aux côtés opposés* (n° **98**, fig. 63), *concourent en un même point,* — puisqu'elles déterminent six segments égaux deux à deux, ce qui donne FIG. 63.

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

2° — *Les bissectrices des trois angles d'un triangle* (n° **95**, *fig.* 60) *concourent en un même point :* — car on a (n° **202**) les proportions FIG. 60.

$$AC' : C'B :: AC : BC, \quad BA' : A'C :: AB : AC, \quad CB' : B'A :: BC : AB,$$

d'où l'on déduit

$$AC' \times BC = C'B \times AC,\quad BA' \times AC = A'C \times AB,\quad CB' \times AB = B'A \times BC;$$

puis, en multipliant membre à membre, et omettant les facteurs communs,

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

3°. — On démontrerait d'une manière analogue que *les perpendiculaires*
FIG. 62. *abaissées des trois sommets sur les côtés opposés* (n° **98**, *fig.* 62) concourent en un même point : — il suffit de comparer les couples de triangles rectangles, tels que ABA′ et CBC′, qui sont évidemment semblables, ce qui donnerait trois relations d'où il serait facile de déduire ensuite

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A.$$

N° **24**. — SCOLIE. — En un mot, les deux théorèmes précédents et leurs réciproques donnent lieu à une foule de conséquences formant autant de propositions nouvelles.

FIG. 211. Ainsi, par exemple, si dans la relation du n° **23** (*fig.* 211)

$$AC' \times BA' \times CB' = C'B \times A'C \times B'A,$$

on suppose $BA' = A'C$, elle se réduit à

$$AC' \times CB' = C'B \times B'A, \quad \text{d'où} \quad AC' : C'B :: B'A : CB';$$

donc (n° **163**) la droite B′C′ est parallèle à BC.

Réciproquement : — Si B′C′ est parallèle à BC, on a la proportion

$$AC' : C'B :: B'A : CB'; \quad \text{d'où} \quad AC' \times CB' = C'B \times B'A,$$

et, en vertu de la relation du n° **23**, $BA' = A'C$;

Ce qui donne lieu au théorème suivant :

FIG. 212. *Si, à partir du sommet* A *d'un triangle* ABb (fig. 212), *on divise les côtés adjacents* AB, Ab, *en parties proportionnelles, et que des extrémités* b, B, *de la base, on mène des droites aux points de division* P, Q, R,..., p, q, r,..., *toutes ces droites se couperont deux à deux sur la droite* AK *menée du sommet au milieu de la base ;* — et *réciproquement.*

N. B. — On déduit de là, comme cas particulier, que — *Dans un trapèze quelconque, la droite qui joint le point de concours des deux côtés latéraux au point de rencontre des diagonales, passe par les milieux des deux bases.*

N° **25**. — *Des faisceaux harmoniques.* — Nous avons déjà vu (n° **202**) que
FIG. 130. si une droite BC (*fig.* 130) est divisée en un point D dans un rapport donné, il existe sur le prolongement de cette droite un second point D′, tel que l'on a la proportion

$$BD' : D'C :: BD : DC.$$

Or cette proportion peut se mettre sous la forme

$$D'B : BD :: D'C : CD;$$

ce qui prouve que les points C et B sont situés, par rapport à la droite DD', comme les points D et D' sont situés par rapport à la droite BC.

Les quatre points B, D, C, D', forment alors un *système harmonique* (*); et l'on nomme *points conjugués* de ce système chaque couple de points B, C, et D, D', non consécutifs.

Trois quelconques de ces points étant *connus*, on peut facilement *déterminer le quatrième*, pourvu que son rang soit connu. — Il suffit en effet, pour cela, de déduire de la proportion ci-dessus une autre proportion qui ne renferme comme inconnue, que la distance de l'un des trois points donnés au point cherché.

Par exemple, connaissant les points B, D, D', pour trouver le point C, on tirera de la seconde des deux proportions précédentes, celle qui suit:

$$D'B + DB : DB :: D'C + DC : DC,$$

ou

$$D'B + DB : DB :: DD' : DC;$$

d'où

$$DC = \frac{DB \times DD'}{D'B + DB},$$

expression qui peut être, ou *construite* graphiquement, ou *calculée* numériquement.

Cela posé, on donne le nom de *faisceau harmonique* au système des quatre droites, OX, OY, OZ, OV (*fig.* 213), menées d'un même point O à quatre points, A, B, C, D, disposés harmoniquement sur une droite indéfinie. FIG. 213.

Les droites OA, OB, OC, OD, sont dites *les rayons* du faisceau; et les couples de rayons OA et OC, OB et OD, correspondant à des points conjugués, sont aussi des *rayons conjugués*.

N. B. — En vertu de la propriété démontrée au n° **202**, les *deux côtés* d'un angle quelconque BAC (*fig.* 130) forment, avec *les bissextrices* de cet angle et de son supplément CAB', *un faisceau harmonique*. FIG. 130.

(*) On dit que trois nombres, m, n, p [disposés par ordre de grandeur, $m > n > p$], forment une *proportion harmonique*, lorsque la différence du premier au deuxième est à la différence du deuxième au troisième, comme le premier est au troisième. — Tels sont les nombres 6, 4, et 3, ou bien 15, 12, et 10, ...; et telles sont aussi les distances BD', BC, BD : car, puisque l'on a

$$BD' - BC = CD', \qquad BC - BD = DC,$$

la proportion ci-dessus, ou $\quad CD' : DC :: BD' : BD,$

devient $\quad BD' - BC : BC - BD :: BD' : BD;$

c'est-à-dire que les distances BD', BC, BD, sont en proportion harmonique; et il en serait de même des distances D'B, D'D, et D'C.

La série des fractions 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, ..., est dite *une progression harmonique*, parce que, comme on peut le vérifier facilement, trois consécutifs quelconques de ses termes forment une proportion harmonique.

FIG. 213 *bis*. THÉORÈME III. (*Fig.* 213 *bis*.)

N° **26**. — *Dans tout faisceau harmonique* OABCD, *une droite quelconque* EF, *menée parallèlement à l'un des rayons*, OD par exemple, *est divisée en deux parties égales par les trois autres*.

En effet, tirons par le point B la droite IBK parallèle à OD, et terminée aux rayons OA, OC. — Les deux couples de triangles semblables BCK et OCD, AIB et AOD, donnent les proportions

$$BK : OD :: BC : CD, \quad \text{et} \quad IB : OD :: AB : A;$$

mais, puisque les quatre points A, B, C, D, forment un système harmonique, on a (n° **25**, *App.*)

$$AB : BC :: AD : CD, \quad \text{ou} \quad BC : CD :: AB : AD;$$

donc aussi $BK : OD :: IB : OD$,

et par conséquent, $BK = IB$.

Or, les deux droites EF, IK, étant parallèles, sont coupées en parties proportionnelles par les trois droites OA, OB, OC (n° **201**); donc enfin

$$EG = GF; \qquad C.Q.F.D$$

RÉCIPROQUEMENT :—*Si quatre droites* OX, OY, OZ, OV, *partant d'un même point* O, *sont telles qu'une droite* IK *menée parallèlement à l'une des quatre premières*, OV par exemple, *soit divisée en deux parties égales par les trois autres, les quatre droites forment un faisceau harmonique*.

Menons par le milieu B de la droite IK une transversale quelconque ABCD. — Les deux couples de triangles semblables ABI et ADO, BCK et OCD, donnent les proportions

$$AD : AB :: OD : IB, \quad \text{et} \quad DC : BC :: OD : BK;$$

d'où, à cause de $IB = BK$, $AD : AB :: CD : BC$.

Donc les quatre points A, B, C, D, sont *conjugués* deux à deux, et les quatre droites partant du point O forment un faisceau harmonique.

SCOLIE.—Cette réciproque fournit un moyen de—*Déterminer un des rayons* OV par exemple, *d'un faisceau harmonique connaissant les trois autres*, —puisqu'il suffit, après avoir tiré par un point quelconque B du rayon OY une droite IK qui soit divisée *en deux parties égales* par les deux autres, OX, OZ (n° **267**, *corol.*), de mener ensuite par le point O une parallèle à IK.

FIG. 213. THÉORÈME IV. (*Fig.* 213.)

N° **27**.—*Dans tout faisceau harmonique* OABCD, *les points d'intersection des quatre rayons avec une transversale quelconque forment un système harmonique*.

En effet, — d'abord, la proposition est évidente pour toute droite *mn* parallèle à AD, en vertu de la propriété du n° **201**.

Ensuite, pour une transversale quelconque MN, si l'on conçoit par le point P une droite EF parallèle à OD, elle sera divisée en deux parties égales

aux points E, F, d'après le théorème précédent; et il résulte de la démonstration employée pour la réciproque, que la droite MN passant par le point P sera divisée harmoniquement en M, P, Q, N.

Enfin, toute droite parallèle à MN, étant divisée par les rayons du faisceau de la même manière que MN, sera aussi divisée harmoniquement par les mêmes rayons; *C.Q.F.D.*

N° 28. — *Du quadrilatère complet.* — On nomme ainsi la figure ACBFDE (*fig.* 214) déterminée par quatre droites indéfinies, AB, AC, BC, FE, qui se coupent deux à deux en *six* points différents, A, B, C, D, E, F; en sorte que par chacun des points d'intersection, il ne puisse passer plus de deux des quatre droites données. FIG. 214.

La raison de cette dénomination, c'est que l'on trouve dans la figure ACBFDE:

1° — Le quadrilatère ordinaire ou *convexe* BCED (n° 37), dont les diagonales sont CD et BE;

2° — Le quadrilatère *uni-concave*, ou à un seul angle rentrant, ABFE, dont les diagonales sont AF et BE;

3° Enfin, — le quadrilatère *bi-concave* ACBFD, formé de deux triangles opposés ABC, DBF: — ses diagonales sont AF et CD.

D'où il suit que le quadrilatère complet a *trois* diagonales, savoir: deux *intérieures*, BE, CD, et une *extérieure*, AF.

Le quadrilatère complet jouit de plusieurs propriétés fort curieuses auxquelles on est conduit, soit par la théorie des transversales, soit au moyen de la considération des faisceaux harmoniques (*).

THÉORÈME V. (*Fig.* 214.) FIG. 214.

N° 29. — *Dans tout quadrilatère complet* ACBFDE, *chacune des diagonales est divisée harmoniquement par les deux autres* [c'est-à-dire que l'on a

AI : IF :: AK : FK, EO : OB :: EI : BI, et CO : OD :: CK : DK].

En effet, tirons la droite KE; et, après avoir prolongé AD jusqu'à sa rencontre en D′ avec KE, déterminons le point M tel que l'on ait

EM : MD′ :: EK : D′K.

Cela posé, la figure AKD′ME est un faisceau harmonique et donne AM pour le rayon conjugué de AF. — On a de plus (n° 27, *App.*), pour la transversale KC passant par le point K de la droite KE,

CO : OD :: CK : DK.

Maintenant, la figure AKDOC étant aussi un faisceau harmonique, il

(*) Le quadrilatère complet est le plus simple des polygones à *angles rentrants*, polygones que M. POINSOT considère comme étant d'ordre supérieur, et auxquels se rattache la théorie des *polygones étoilés*. — (*Voyez* le Mémoire de M. POINSOT, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, 10e cahier, t. IV, p. 6 et suiv. — *Voyez* aussi un Mémoire de M. CAUCHY, même Journal, 16e cahier, t. IX, p. 77.)

s'ensuit que le rayon AO est le conjugué de AK ou AF. Ainsi AO et AM sont conjugués du même rayon AF, et par conséquent, se confondent.

Or, la figure EKDOC est elle-même un faisceau harmonique, et donne (n° 27, *App.*), par rapport à la transversale AK passant par le point K,

$$AI : IF :: AK : FK.$$

Enfin, le faisceau harmonique AKD'ME donne encore, par rapport à la transversale EI passant par le point E,

$$EO : OB :: EI : BI ;$$

et les trois proportions énoncées se trouvent ainsi démontrées complètement.

Il résulte d'ailleurs, de tout ce qui a été dit précédemment sur les faisceaux harmoniques, que les autres droites AD', AM, F'C, FE, se trouvent elles-mêmes divisées harmoniquement.

N° 30. — Scolie général sur les faisceaux harmoniques. — *Des pôles et des polaires* dans les figures rectilignes.

On vient de voir que, dans le quadrilatère complet ACBFDE, la droite qui joint le point A au point de rencontre des deux diagonales intérieures, est conjuguée de la droite AF par rapport aux deux autres droites AD, AE. Or ceci nous conduit à une propriété assez importante.

Fig. 215. Soit un point P quelconque (*fig.* 215) donné dans le plan d'un angle YOX. De ce point, menons une série de droites qui rencontrent les côtés de cet angle, aux points A et *a*, B et *b*, C et *c*, D et *d*,..., ce qui détermine des quadrilatères complets O*b*BA*a*P, O*c*CA*a*P, O*d*DA*a*P,... Cela posé, tous les *points, p, p', p'', d'intersection des diagonales intérieures* de ces quadrilatères, se trouvent situés *sur une même droite passant par le sommet* O ; et cette droite n'est autre que le *rayon conjugué* du rayon OP *par rapport aux deux côtés de l'angle* YOX.

On exprime cette propriété en disant que le point P est un *pôle* par rapport à la droite O*p*, qui est elle-même dite la *polaire* du point P.

Remarquons en outre : — 1° — que, pour tout autre point P' pris sur la droite OP, la même propriété a lieu, c'est-à-dire que O*p* serait encore la polaire du point P' ; — 2° — que cette propriété est nécessairement *réciproque* pour les deux rayons conjugués OP, O*p*, par rapport aux droites OY, OX, qui sont aussi des rayons conjugués ; — dès lors, nous serons conduits à cette conséquence générale :

Dans tout faisceau harmonique, chacun des rayons est *une polaire* par rapport à chaque point de son conjugué ; et chaque point de celui-ci est un *pôle* par rapport au premier.

Nous terminerons ce qui a rapport au quadrilatère complet, par les énoncés de deux théorèmes dont les démonstrations sont faciles à déduire de la théorie des transversales.

Fig. 214. 1° — *Les milieux* P, Q, R (*fig.* 214), *des trois diagonales d'un quadrilatère complet, sont situés sur une même ligne droite.*

2° — *Si deux triangles*, ABC, A′B′C′ (*fig.* 216), *ont leurs sommets placés deux à deux sur trois lignes droites concourantes* [en un point O], *les trois points de concours*, *o*, *o′*, *o″*, *des côtés correspondants pris deux à deux, sont en ligne droite.* FIG. 216.

Transversales considérées dans le cercle.—Points conjugués.—Pôles et polaires.

N° **31.** — *Des points conjugués.* — Nous avons vu, au n° **276**, que, si une droite AX (*fig.* 184) est divisée harmoniquement aux points A, C, B, C′, la circonférence décrite sur CC′ comme diamètre est telle, que les *distances* de chacun de ses points, N, aux deux points A et B, sont entre elles *dans un rapport constant*, celui des deux droites AC, CB. FIG. 184.

Dans l'énoncé de ce théorème, le cercle est donné de position par rapport aux points A et B supposés connus; mais on peut aussi avoir à résoudre cette question :

Étant donnés un cercle et un point P (*fig.* 217), *déterminer le point* Q *conjugué de celui-ci.* FIG. 217.

[Nous donnerons au cercle OA le nom de *cercle régulateur*.]

On doit avoir, par hypothèse,

$$QA : AP :: QB : PB,$$

ou bien

$$QB : QA :: PB : PA;$$

or, la figure donne successivement

$$QB = OQ + OA,\quad QA = OQ - OA,\quad PB = OA + OP,\quad PA = OA - OP;$$

ainsi, la proportion devient

$$OQ + OA : OQ - OA :: OA + OP : OA - OP;$$

d'où, en faisant la somme et la différence des deux premiers termes, la somme et la différence des deux derniers, puis réduisant,

$$OQ : OA :: OA : OP;$$

donc

$$(1)\qquad OP \times OQ = OA^2;$$

d'où

$$OQ = \frac{OA^2}{OP}.$$

Pour construire cette expression, il suffit d'*élever* PM perpendiculaire à OA, et de *mener* ensuite au point M une tangente qui ira rencontrer en un point Q la droite OA prolongée : ce point Q est le point demandé : — car on a (n° **203**, 3°)

$$OM^2 = OP \times OQ,\quad \text{ou, à cause de}\quad OM = OA,\quad OA^2 = OP \times OQ.$$

Réciproquement :—Pour obtenir le point P au moyen du point Q, *on mènera* les deux tangentes QM, Q*m*; et le point où la corde M*m* coupera OA sera le point cherché.

[On nomme *corde de contact* la droite M*m* qui joint les points de contact des deux tangentes menées d'un même point Q à une circonférence.]

SCOLIE. — Puisque l'égalité (1) détermine la position relative des deux points conjugués, rien n'empêche de prendre cette égalité pour leur définition, et de nommer *points conjugués* par rapport à un cercle donné, *deux points situés sur un même rayon, et tels que le produit de leurs distances au centre est égal au carré du rayon.*

D'un autre côté, comme l'égalité (1), ou plutôt la proportion

$$OP : OA :: OA : OQ,$$

conduit, par des transformations inverses de celles qui ont été faites ci-dessus, à la proportion QB : QA :: PB : PA, ou QA : AP :: QB : PB, on est en droit d'en conclure que :

1° — *Les points conjugués forment, conjointement avec les extrémités du diamètre qui les contient, un système harmonique.*

2° — *Les distances de chacun des points de la circonférence régulatrice aux deux points conjugués,* P et Q, *sont entre elles dans un rapport constant,* celui de QA à AP (n° **273**, *scol.*).

Passons à d'autres propriétés des points conjugués.

Fig. 218 et 218 *bis*.

THÉORÈME VI. (*Fig.* 218 et 218 *bis.*)

N° **32**. — *Les cordes de contact,* Mm, M'm',... *de tous les angles circonscrits dont les sommets sont placés sur une même droite* LL', *concourent en un même point* P; *et ce point est le conjugué du pied* Q *de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la droite* LL'.

Il peut se présenter deux cas principaux : ou la droite est *extérieure* à la circonférence régulatrice, ou bien elle est *sécante*. — Examinons ces deux cas successivement.

Fig. 218. PREMIER CAS (*fig.* 218). — Considérons deux points de la droite LL', savoir : le pied Q de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite, et un point quelconque Q'; soient QM et Q*m*, Q'M' et Q'*m'*, les tangentes correspondantes, et P, P', les points où les cordes de contact rencontrent OQ, O'Q'. — Ces points sont (n° **31**, *App.*) les conjugués des points Q, Q', et donnent les relations $OA^2 = OP \times OQ$, $OA^2 = OP' \times OQ'$; et par conséquent la proportion $OP : OP' :: OQ' : OQ$.

Cela posé, si nous joignons le point P' au point P, nous formerons ainsi deux triangles OQQ', OPP', semblables entre eux comme ayant un angle égal O compris entre côtés proportionnels. Or, le triangle OQQ' est rectangle au point Q; donc le triangle OPP' est aussi rectangle au point P. — D'où l'on voit que la droite PP' se confond avec la corde de contact M'm'; ainsi, les cordes M*m*, M'*m'*, passent par le même point P.

Un raisonnement semblable pourrait s'appliquer à tout autre angle circonscrit dont le sommet serait en Q'', Q''',... sur la droite LL'; *donc*, etc.

Fig. 218 *bis*. SECOND CAS (*fig.* 218 *bis*). — Dans ce cas, le point P conjugué du point Q s'obtient en menant au point M la tangente MP, jusqu'à sa rencontre avec

OA prolongé; et le point P′ est d'ailleurs, comme ci-dessus, le point de rencontre de la corde M′ m′ avec OQ′; ce qui donne encore la proportion

$$OP : OP' :: OQ' : OQ.$$

En joignant le point P′ au point P, nous obtenons deux triangles OPP′, OQQ′, semblables entre eux comme ayant un angle égal O compris entre côtés proportionnels; mais le triangle OQQ′ est rectangle au point Q; donc aussi le triangle OPP′ est rectangle en P′, et par conséquent la droite P′P se confond avec la corde de contact M′m′.

On démontrerait de même que, pour tout autre point Q″, Q‴,.. de la droite LL′, la corde de contact correspondante passe par le point P; donc, etc.

Ainsi la proposition est démontrée.

Les deux *figures* 219 et 219 *bis* donnent une idée nette de la nature de cette propriété.

N. B. — Dans le cas particulier (*fig.* 219 *ter*) où la droite LL′ est tangente à la circonférence régulatrice, les deux points conjugués se confondent avec l'extrémité A du diamètre. FIG. 219 *ter*.

RÉCIPROQUEMENT : — Si, d'un point quelconque P, *intérieur* (*fig.* 219) ou *extérieur* (*fig.* 219 *bis*) à la circonférence régulatrice, on mène des droites en nombre quelconque, qui rencontrent la circonférence chacune en deux points, et que par ces points on mène des tangentes, les *sommets de tous les angles circonscrits* ainsi formés par les diverses couples de tangentes, seront *situés sur une même droite* LL′ *passant par le point conjugué du premier, et perpendiculaire à la droite* OP *menée du centre au point donné.* FIG. 219. FIG. 219 *bis*.

Le premier cas de cette réciproque se démontre facilement au moyen du *principe sur les réciproques* (n° 21), et du second cas de la proposition directe; — et *vice versâ*.

N° 33. — Des *pôles* et des *polaires* dans le cercle. — Ces deux propriétés fort curieuses des points *conjugués* P et Q, ont fait donner le nom de *pôle* au point P, et de *polaire* à la droite LL′.

Ainsi, le *pôle* étant donné, on peut déterminer facilement sa *polaire*; — et réciproquement (*Voyez* n° 31, *App.*).

THÉORÈME VII. (*Fig.* 220.) FIG. 220.

N° 34. — *Toute corde* EF *menée dans une circonférence par un point* P, *est divisée harmoniquement par le point et par sa polaire* LL′.

En effet, les points P et Q étant deux points conjugués, on a (n° 31) la proportion PA : AQ :: BP : BQ; donc, si l'on joint les points P, A, Q, B, à un point quelconque N de la circonférence, on obtient un faisceau harmonique dans lequel la transversale EF passant par l'un des points P, est divisée *harmoniquement* (n° 27, *App.*).

FIG. 221.

THÉORÈME VIII. (*Fig.* 221.)

N° 35. — *La polaire du sommet* P *d'un angle quelconque* APB [pour un cercle donné], *est la droite qui joint les pôles des deux côtés.*

En effet, si par le point M, où le côté PA rencontre la circonférence régulatrice, on mène une tangente prolongée jusqu'à sa rencontre en G avec la perpendiculaire OG abaissée du point O sur ce côté, le point G appartiendra à la polaire du point P (n° 32, *récip.*). — Par la même raison, le point K où la tangente en M' qui correspond au second côté PB, rencontre la perpendiculaire OK abaissée du point O sur ce côté, appartient à la polaire du point P. — Donc GK est cette polaire elle-même.

N. B. — Le point Q où la droite GK rencontre la droite OP prolongée, est donc le point conjugué du point P.

FIG. 222. COROLLAIRE. — *Si deux polygones quelconques* ABCD, EFGK (*fig.* 222), *sont tels que les sommets* E, F, G, K, *du second, soient les pôles respectifs des côtés* AB, BC, CD, AD, *du premier* [pour un cercle donné], *réciproquement, les sommets de celui-ci seront les pôles des côtés du second.*

En effet, puisque le point E est le pôle de AB, et le point F le pôle de BC, il s'ensuit que EF est la polaire du sommet de l'angle ABC : en d'autres termes, le point B est le pôle de EF. — On démontrerait de même que le point C est le pôle de FG. — Et ainsi de suite.

SCOLIE. — Cette dernière propriété a fait donner aux deux polygones ABCD, EFGH, le nom de *polaires réciproques*, en raison de ce que chacun des sommets du premier est le pôle de chaque côté du second, et *vice versâ.*

FIG. 223.

THÉORÈME IX. (*Fig.* 223.)

N° 36. — *Dans tout quadrilatère* ABCD, *inscrit au cercle, le point de concours* I *des diagonales* AC, BD, *et les points de concours* P, Q, *des côtés opposés*, AB et CD, AD et BC, *pris deux à deux, forment un triangle* IPQ *dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.*

En effet, les droites PQ, PA, PI, PC, forment un faisceau harmonique (n° 29, *App.*); ainsi, les droites AD, BC, sont divisées harmoniquement, la première aux points Q, E, et la seconde aux points Q, F. — De là, il résulte que les points E, F, appartiennent tous deux à la polaire du point Q, et que, par conséquent, cette polaire n'est autre que la droite PI.

Par une raison toute semblable, QI est la polaire du point P.

Quant au troisième côté PQ, son pôle doit se trouver à la fois sur la polaire du point P et sur celle du point Q; donc ce pôle est le point I (n° 34, *App.*).

Il existe une foule d'autres propriétés des transversales considérées dans le cercle; mais nous nous bornerons à citer encore les deux suivantes :

1° — *Dans tout hexagone inscrit au cercle, les points d'intersection des côtés opposés, pris deux à deux, sont tous trois en ligne droite;*

o — *Dans tout hexagone inscrit au cercle, les diagonales menées par les mets opposés, pris deux à deux, concourent toutes trois en un même point.*
:es théorèmes donnent d'ailleurs lieu à des conséquences plus ou moins ›ortantes sur les pentagones et quadrilatères inscrits et circonscrits (*).

SECONDE SECTION.

§ Ier. — *Considérations générales sur les courbes.*

ı tangentes et des normales aux courbes. — Courbes polaires réciproques.

ɴ° 37. — En étendant aux courbes, en général, ce que nous avons dit la ligne circulaire comparée aux polygones réguliers (n° 245), nous hirons une COURBE quelconque, un *polygone,* ou plutôt, une *ligne brisée* › 12) *d'un nombre infini de côtés infiniment petits;* — chaque portion in- îment petite est dite alors *un élément* de la courbe.

Cette définition étant admise, la *tangente* en un point donné est l'*élé- nt de la courbe* en ce point, *prolongé indéfiniment* dans les deux sens; et tte nouvelle manière d'envisager la tangente s'accorde avec la définition e nous en avons donnée au n° 110; car, en disant que la tangente est e sécante dont deux points d'intersection avec la courbe viennent à *se nir en un seul,* nous exprimons l'idée que la *corde* qui joint ces deux ints est *infiniment petite,* et par conséquent se confond avec l'élément de courbe. Quant à la première définition donnée au n° 102, de la tangente au rcle, elle ne saurait évidemment être admise que pour les courbes de la ture des lignes *convexes,* c'est-à-dire de celles qui ne peuvent être (n° 36) ncontrées par une droite qu'en deux points, tandis qu'il résulte de la ouvelle définition, qu'une *tangente en un point* peut être *en même temps écante* en un ou plusieurs autres points. — Nous verrons même bientôt u'une droite peut en même temps *toucher* et *couper* la courbe en un même oint donné.

Nous nommerons d'ailleurs *normale* à une courbe la droite menée par le point de contact, *perpendiculairement* à la tangente.

N° 38. — La considération des *éléments* des courbes est de la plus haute importance dans la théorie de ces lignes; car, en les regardant comme de

(*) *Voyez* notre seconde édition, p. 214, 215, 216, ainsi que les *Annales de Mathématiques,* en divers endroits, et notamment t. XIV, p. 39 et suiv.; *voyez* aussi la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique.*

véritables polygones, on est conduit à cette conséquence, que *toute propriété générale démontrée pour une ligne brisée*, indépendamment du nombre, de la grandeur, et des inclinaisons mutuelles de ses côtés, *appartient par cela même à la ligne courbe*, qui peut en être considérée (n° 244) comme la limite.

C'est ainsi, par exemple, que la proposition établie sur les *polaires réciproques* (n° 38, *corol.*, *App.*), étant vraie quel que soit le nombre des côtés des deux polygones, l'est encore lorsque le nombre des côtés devient infini; et l'on est conduit à ce théorème remarquable :

Si deux courbes tracées sur un même plan sont telles que chaque point de l'une soit le pôle d'un élément (ou d'une *tangente*) *de l'autre* [pour un cercle donné], réciproquement, *chaque point de la seconde est le pôle d'un élément de la première;* et les deux courbes sont dites alors des POLAIRES RÉCIPROQUES.

D'où il résulte nécessairement que — *Le nombre des intersections de l'une des courbes avec une droite quelconque est égal au nombre des tangentes que l'on peut mener à l'autre courbe, par le pôle de cette droite.*

Du cercle osculateur et du rayon de courbure.

FIG. 224. N° 39. — En un point M donné sur une courbe AB (*fig.* 224), on peut toujours mener une infinité de cercles ayant en ce point pour tangente commune, la tangente même, ST, de la courbe; d'où il résulte que ces cercles sont eux-mêmes tangents à cette dernière, puisqu'ils ont avec elle un élément commun. Or, il est bien clair que, parmi ces cercles, il en est un qui se rapproche plus de la courbe, dans les environs du point de contact M, que tous les autres, c'est-à-dire qui tend plus que tous les autres, dans l'étendue d'un petit arc pris de part et d'autre de ce point, à se confondre sensiblement avec la courbe. — Ce cercle *unique* se nomme le CERCLE OSCULATEUR de la courbe au point M; or la considération des éléments nous fournit le moyen d'en donner une définition plus précise et tout à fait géométrique.

Pour cela, rappelons-nous qu'il faut trois points [non en ligne droite] pour déterminer une circonférence de cercle (n° 127); d'où il résulte que la circonférence qui approchera plus de la courbe que toutes les autres, dans les environs du point M, sera celle qui aura avec cette courbe, de part et d'autre et infiniment près de ce point, deux autres points communs, c'est-à-dire enfin, qui aura avec la courbe deux éléments consécutifs communs, l'un d'un côté du point M, l'autre de l'autre.

Cela posé, la construction du cercle osculateur en un point donné M
FIG. 225. (*fig.* 225) se réduit à la suivante : — En supposant la courbe décomposée en éléments, soient LM, MN, les deux éléments consécutifs qui doivent appartenir au cercle cherché ;— par les milieux, *e*, *f*, de ces éléments, *élevons* des normales : elles se rencontrent (n° 80) en un point O; ce point est le *centre du cercle osculateur ;* et les rayons sont d'ailleurs OL, OM, ON, ou bien O*e*, O*f*, qui n'en diffèrent pas sensiblement.

N° 40. — Le cercle osculateur, dont nous venons de donner la construction générale, jouit de plusieurs propriétés aussi importantes que curieuses; nous allons examiner les principales.

Prolongeons d'abord les éléments LM, MN; il en résultera deux tangentes consécutives LT, MU, faisant entre elles un angle *infiniment petit* TMU que l'on nomme *l'angle de contingence.* — Or, il est clair que plus cet angle est grand, plus la courbe s'écarte, au point M, de sa tangente LM; et par conséquent, *plus elle est courbe.* — L'angle de contingence est donc propre à faire connaître ce que l'on nomme *la courbure* d'une courbe en un point donné; c'est pourquoi on le nomme encore *angle de courbure.*

De plus, l'angle TMU étant évidemment égal à l'angle *e*O*f*, puisqu'ils ont l'un et l'autre pour supplément l'angle LMN (n° 70), on tire de là un second moyen propre à apprécier le degré de courbure d'une courbe donnée, moyen qui offre même plus de commodité que le premier, en ramenant cette évaluation à celle de la courbure du cercle osculateur, laquelle est d'autant plus considérable [en un point donné de la courbe] (*voyez* le n° 262), que le rayon du cercle est moindre, ce rayon diminuant évidemment à mesure que l'angle de contingence augmente, et *vice versâ.*

De là vient que le cercle osculateur reçoit encore le nom de *cercle de courbure,* son centre O celui de *centre de courbure,* et enfin son rayon celui de *rayon de courbure.*

N° 41.—Maintenant, supposons que l'on effectue, pour tous les points de la courbe AMB (*fig.* 226), la construction que nous avons indiquée ci-dessus pour le point M : il en résultera une autre courbe POQ, qui sera *le lieu géométrique des centres de courbure* de la courbe AB. — De sorte que si, de chacun des points [O] de la ligne PQ, on décrivait avec le rayon de courbure correspondant O*e*, un petit arc de cercle [*e*M*f*], la courbe entière AB pourrait être considérée comme composée de tous ces arcs élémentaires.— Or, cette description peut s'exécuter fort simplement par un moyen tout à fait *mécanique,* c'est-à-dire par *un mouvement continu.* FIG. 226.

Pour cela, admettons que l'on ait tendu le long de la courbe PQ, supposée *solide,* un *fil flexible* qui s'appuie exactement sur toute l'étendue de son contour, et qui le dépasse seulement, au point P, d'une longueur PA égale au rayon de courbure du point A. Il est clair que, dans cette hypothèse, si l'on détache successivement les divers éléments du fil PQ [en commençant au point P], des éléments qu'ils recouvraient respectivement sur la courbe solide PQ, le fil entier restant toujours tendu, l'extrémité A décrira successivement les divers éléments de la courbe AB.

La courbe PQ est dite, en raison de cette propriété, la *développée* de la courbe AB; et réciproquement celle-ci est la *développante* de la courbe PQ. — La développée d'un cercle se réduit à un point unique qui est son centre; et la développée d'une courbe quelconque est, par rapport à cette courbe, ce qu'est le centre par rapport au cercle. La développée est, en quelque sorte, un centre variable correspondant à un rayon variable qui est celui du cercle osculateur; et la développante peut être considérée comme décrite d'une

manière analogue à la description du cercle, au moyen de ce centre et de ce rayon qui varient en même temps.

De même qu'un cercle n'a qu'un seul centre, mais qu'un même point peut être le centre de divers cercles, de même aussi, une développante n'a qu'une seule développée, tandis qu'une même développée peut avoir une infinité de développantes différentes. Il est clair, en effet, que si, à partir du point A, l'on prend sur le fil APQ, d'un côté ou de l'autre du point A, une certaine longueur AA′ tout à fait arbitraire, le même mouvement par lequel le point A décrit la courbe AB, suffira pour que le point A′ engendre une courbe *équidistante* de la première, et *parallèle* à celle-ci.

Nous remarquerons enfin que tous les *rayons de courbure* sont *tangents à la développée*, puisqu'ils en sont les éléments [prolongés], et de plus, *normaux* aux éléments de la développante.

De la convexité et de la concavité des courbes. — Points singuliers.

N° 42. — Nous allons maintenant tâcher de donner des notions précises sur les diverses formes que peut affecter une courbe tracée sur un plan.

Or, dans les spéculations de la Géométrie et des parties élevées des Mathématiques, on est ordinairement conduit à considérer deux sortes principales de courbes : les unes sont des courbes *rentrantes et fermées* ABCD,
Fig. 227. A′ B′ C′ D′ E′ (*fig.* 227), comme le cercle; les autres sont des courbes qui s'étendent indéfiniment dans les deux sens, comme la ligne droite : telles
Fig. 228. sont les courbes MNP ou M′ N′ P′ Q′ R′ S′ (*fig.* 228). — Quelquefois aussi, elles se composent de diverses parties dont les unes sont fermées, et les autres sont indéfinies.

Mais il arrive rarement qu'une ligne courbe, considérée comme un *lieu géométrique*, s'arrête brusquement en un point sans se continuer au delà d'une manière quelconque.

D'un autre côté, chacune des deux sortes de courbes dont nous venons de parler, se subdivise en deux espèces : les unes, telles que ABCD (*fig.* 227) et MNP (*fig.* 228), sont ce que l'on nomme des lignes *convexes;* les autres, telles que A′B′C′D′E′F′ (*fig.* 227) et M′N′P′Q′R′ (*fig.* 228), ont des *sinuosités*.

Pour distinguer ces deux espèces, remarquons que, comme la ligne droite, toute ligne courbe divise *en deux régions* (n° 11) le plan sur lequel elle est tracée.

Fig. 227. Si la courbe est rentrante et fermée (*fig.* 227), l'une des régions, dite *intérieure*, est un espace *limité;* tandis que l'autre région est indéfinie. — Dans
Fig. 228. le cas de la *fig.* 228, les deux régions sont indéfinies.

Cela posé, le caractère véritablement essentiel d'une courbe convexe [outre ceux qui résultent (n° 36) de leur assimilation avec les polygones convexes (n° 37, *App.*)], consiste en ce que *les centres de courbure* de la courbe *sont tous situés dans la même région ;* — on dit alors que la courbe tourne sa *concavité* vers les points de cette région, et sa *convexité* vers les points opposés.

Lorsqu'au contraire la courbe a des sinuosités, certaines parties de la

courbe ont leurs centres de courbure situés dans une région ; et ceux des autres parties sont situés dans la région opposée. Ainsi, dans la *fig.* 227, la partie F'A'B'C'D' est telle, que ses centres de courbure appartiennent à la région intérieure, tandis que la partie D'E'F' a tous ses centres de courbure situés dans la région extérieure. FIG. 227.

N° 43. — Tout point tel que F', commun à deux parties dont les centres de courbure appartiennent à deux régions différentes, se nomme *un point d'inflexion.* — En passant par ce point, la courbe, de *convexe* qu'elle était par rapport à une région, devient *concave* par rapport à la même région, et *vice versâ.*

Un autre caractère distinctif du point *d'inflexion,* c'est qu'en ce point, les directions de deux *éléments consécutifs* de la courbe viennent se confondre; en sorte que la tangente peut, pour ce point, être considérée comme une sécante dont *trois points d'intersection* avec la courbe se *réunissent en un seul.*

On voit même (*fig* 227 *bis*) qu'en ce point, A, la tangente PQ coupe la courbe en même temps qu'elle la touche, ainsi que nous l'avions annoncé au n° 37. Enfin, la tangente en ce point est telle, que les deux parties de la courbe se trouvent situées dans deux régions différentes par rapport à cette tangente. FIG. 227 *bis.*

N° 44. — Il peut arriver que la courbe passe plusieurs fois par le même point A, ou B, ou C (*fig.* 229) : ce point se nomme un point *multiple ;* son caractère principal est qu'il existe généralement en ce point, autant de tangentes qu'il y a de branches qui s'y réunissent ; cependant il peut se faire que deux ou plusieurs tangentes viennent à se confondre. — La même chose a lieu pour les centres de courbure qui correspondent à ce point. FIG. 229.

Quelquefois encore, la courbe retourne brusquement sur elle-même après être arrivée en un certain point A (*fig.* 230) : — ce point est dit alors un *point de rebroussement.* FIG. 230.

Les deux arcs de courbe qui se réunissent en un point de *rebroussement,* doivent y avoir la *même tangente :* et c'est ce qui le distingue du point *multiple,* où les tangentes ne se confondent qu'*accidentellement.*

On distingue deux espèces de points de rebroussement, suivant que les deux arcs de courbe AB et AC, ou bien AB et AD, sont situés de côtés différents, ou du même côté par rapport à la tangente (*).

Les points d'*inflexion,* de *rebroussement,* et les points *multiples,* sont compris sous la dénomination générale de *points singuliers.* — Ce sont, dans les courbes, des points de division naturels des diverses parties dont elles se composent.

N° 45. — Enfin, lorsqu'une branche de courbe, telle que ABC (*fig.* 231), FIG. 231.

(*) M. Francœur a proposé les dénominations de *cératoïde* et de *rhamphoïde,* pour caractériser les deux espèces : le premier mot signifie *semblable à une corne*, et l'autre, *semblable à un bec d'oiseau.*

s'étend indéfiniment, en se rapprochant *sans cesse et autant que l'on veut* d'une droite TS située dans son plan, sans pouvoir jamais la rencontrer, la droite est dite *une asymptote* par rapport à la courbe; et la courbe elle-même est *asymptote* de la droite. — La considération des asymptotes est d'une très-grande importance dans les courbes dont une ou plusieurs branches s'étendent indéfiniment.

N° 46. — Deux courbes [ou deux arcs de courbe], qui ont un point commun, sont dites *tangentes* en ce point si elles y ont un élément commun, et par conséquent une tangente commune; elles sont simplement sécantes dans le cas contraire, quand bien même ce point commun serait une *extrémité* commune à deux arcs de courbe. — Du reste, deux courbes peuvent aussi se couper et se toucher à la fois en un nombre quelconque de points.

N° 47. — Nous avons maintenant à dire quelques mots sur ce que l'on nomme *la loi de continuité* dans les courbes.

Pour qu'une courbe soit *continue* entre deux de ses points, il faut qu'entre ces limites, les directions de sa tangente et de sa normale varient *par degrés insensibles,* ainsi que les valeurs de son rayon de courbure; de sorte qu'entre deux éléments consécutifs, l'angle de contingence (n° 40, *App.*), et par suite la différence des deux rayons de courbure correspondants, ne soit nulle part appréciable. — Lorsque ces conditions ne sont pas remplies, la courbe est *discontinue*, et ne doit plus être considérée que comme un assemblage de courbes différentes.

Les arts, et surtout l'*architecture*, présentent de nombreuses applications
Fig. 232. des lignes discontinues. Nous donnerons, comme exemples, la *rosace* (*fig.* 232),
Fig. 233. et l'*ogive* (*fig.* 233), également composées d'arcs de cercle qui se coupent; le
Fig. 234. *talon* (*fig.* 234) et la *doucine* (*fig.* 235), composés d'arcs de cercle tangents,
Fig. 235. et généralement, les *profils* de toutes les sortes de *moulures*. — Nous citerons encore les courbes en *ovales*, composées de quatre arcs de cercle tangents deux à deux, BA, AC, CD, DB (*fig.* 236), et ordinairement nommées *anses de panier*.

Fig. 236.

Il est bien clair que ces sortes de courbes sont *discontinues,* puisque, les
Fig. 236. rayons de courbure (*fig.* 236) n'étant autre chose que les rayons des arcs AB, BD, DC, CA, qui composent la courbe, il en résulte que la courbure est constante pour toute l'étendue de chacun de ces arcs, et varie *brusquement* aux points de raccordement A, B, D, C.

Nous terminerons ces considérations par une proposition générale sur les lignes convexes enveloppées par d'autres lignes.

Fig. 237 et 238.

THÉORÈME. (*Fig.* 237 et 238.)

N° 48. — *Une ligne convexe fermée* ABCDA, *brisée, courbe,* ou *mixte, est moindre qu'une ligne quelconque* PQRSTP (convexe ou concave) *qui l'envelopperait de toutes parts.*

Fig. 237. Considérons d'abord le cas où la ligne enveloppée est un polygone (*fig.* 237),

et prolongeons tous ses côtés AB, BC, CD, DA, dans le même sens (n° **87**, *note*), jusqu'à leur rencontre en *a*, *b*, *c*, *d*, avec la ligne enveloppante.

Cela posé, nous aurons, en vertu de la définition de la ligne droite, cette suite d'inégalités

$$\begin{aligned}AB+Ba&<Ad+dP+PQ+Qa,\\ BC+Cb&<Ba+aR+Rb,\\ CD+Dc&<Cb+bS+Sc,\\ DA+Ad&<Dc+cT+Td,\end{aligned}$$

ou, en ajoutant membre à membre, et supprimant les termes qui se détruisent,

$$AB+BC+CD+DA<PQ+QR+RS+ST+TP,$$

ou simplement $$ABCDA<PQRSTP.$$

Si la ligne enveloppée est une ligne courbe [ou mixte] ABCD (*fig.* 238), les côtés du polygone ABCD (*fig.* 237) se trouveront remplacés [en totalité ou en partie] par les éléments de la courbe ; et, en supposant tous ces éléments prolongés dans un même sens suivant leurs tangentes respectives, la démonstration précédente sera applicable à la nouvelle hypothèse. Donc, la proposition est vraie dans tous les cas possibles où la ligne enveloppée est *convexe*.

On peut d'ailleurs démontrer directement la proposition par rapport aux courbes, de la manière suivante :

Menons en un point quelconque A (*fig.* 238) de la courbe enveloppée, la tangente MAN. — Nous aurons d'abord MN < MPQN (n° **5**) ; Fig. 238.

d'où $$MNRSTM<MPQNRSTM.$$

Par le point M, menons encore la tangente MCS ; nous aurons la nouvelle

inégalité $MS<MTS$, d'où $MNRSM<MNRSTM$.

En continuant ainsi de mener des tangentes à la courbe ABCD, on obtient une série de lignes, toujours enveloppantes par rapport à ABCD, mais enveloppées par rapport aux précédentes ; et ces lignes [mixtes] deviennent de plus en plus petites à mesure que leur contour se rapproche davantage de la ligne ABCD ; donc celle-ci, qui en est la limite, est plus petite que toutes celles dont nous venons de parler, et, à plus forte raison, que la courbe PQRSTP.

Scolie I. — Les diverses propositions établies aux n^os **243**, **262**,..., ne sont que des cas particuliers de la proposition précédente.

Scolie II. — Il est bien clair que cette proposition est applicable au cas où la ligne enveloppée ABCD et la ligne enveloppante AECD (*fig.* 239) Fig. 239. ont une partie commune ADC, ou des points communs, pourvu que la partie enveloppée, ABC, soit convexe et tourne sa convexité vers la ligne enveloppante (n° **42**, *App.*).

§ II. — *De quelques courbes les plus simples. — Ellipse, Hyperbole, Parabole. — Construction de leurs tangentes et de leurs normales.*

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de faire connaître quelques-unes des courbes les plus simples parmi celles qu'on peut décrire facilement, soit par points, soit d'un mouvement continu (comme le cercle), avec le secours de la *règle* et du *compas*.

DE L'ELLIPSE. (*Fig.* 240.)

FIG. 240.

N° 49. — On nomme ELLIPSE une *courbe plane, telle que la somme des distances de chacun de ses points,* M, *à deux points fixes,* F, F', *soit constante et égale à une ligne donnée* 2a [plus grande nécessairement que la distance FF' des deux points fixes].

L'ellipse, ainsi définie, renferme le cercle comme cas particulier, puisqu'il suffit de supposer que les deux points F, F', se confondent en un seul; ce qui donne alors $FM + F'M = 2FM = 2a$; d'où $FM = a$.

Il résulte d'abord de cette définition, que si, sur la droite indéfinie, XY, qui joint les points F, F', *on prend,* à partir du milieu O de FF', deux distances OA, OB, égales à a [ce qui donne $FA = F'B$], les deux points A, B, ainsi déterminés, appartiendront à la courbe.

En effet, on aura d'après cette construction,

$$FA + F'A = FA + FF' + F'B = OA + OB = 2a,$$
$$F'B + FB = F'B + F'F + FA = OB + OA = 2a.$$

En outre, si des points F, F', comme centres, avec le même rayon a [$> OF, OF'$], on *décrit* des arcs de cercle qui se couperont nécessairement en deux points C, D, situés sur la perpendiculaire ZU, élevée par le point O, ces nouveaux points appartiendront à la courbe:

Car on aura $\quad FC + F'C = 2a, \quad FD + F'D = 2a.$

Pour obtenir d'autres points de la courbe, *marquons* sur AB un point I quelconque [situé toutefois entre les points O et F']; puis des points F, F', comme centres, avec les rayons respectifs AI, IB, *décrivons* des arcs de cercle qui se coupent en deux points M, M': ces points appartiennent à la courbe; — car on a $FM + F'M = AI + IB = 2a$.

N. B. — Tant que le point I est situé entre O et F', il en résulte

$$AI - IB, \quad \text{ou} \quad FM - F'M < FF';$$

et comme on a déjà $FM + F'M$, ou $2a > FF'$, les deux arcs décrits se coupent nécessairement (n° 145).

Les points N, N', symétriques (n° 4, *App.*) des points M, M', par rapport à ZU, peuvent être construits avec les mêmes rayons AI, IB (voyez le n° 167).

On pourra donc, de cette manière, obtenir autant de points que l'on voudra de la courbe cherchée; et en liant tous ces points par une ligne *continue*, on aura l'ellipse demandée.

N° 30. — *Description par un mouvement continu:* — Après avoir *fixé* aux points F, F', les deux extrémités d'un fil dont la longueur soit égale à $2a$, *tendez* ce fil par le moyen d'un *style* armé d'un *crayon* ou d'une *plume;* puis faites tourner ce style autour des points F, F' [en tenant toujours le fil *tendu*], de manière que la pointe vienne tomber successivement aux points A, B, de la droite XY : le style, dans son mouvement, décrira la courbe demandée (*).

N° 31. — *Définitions.* — Dans l'ellipse, les deux droites, XY, ZU, sont évidemment deux *axes de symétrie* (n° 4, *App.*); ce qui a fait donner le nom d'*axes* de la courbe aux deux droites AB, CD. — Le plus grand, AB, s'appelle le *grand axe,* et l'autre, CD, se nomme le *petit axe*.

Le point O, qui est lui-même un *centre* de symétrie, est dit le *centre* de la courbe.

Les points F, F', qui ont servi à la description de la courbe, se nomment les *foyers;* et les distances FM, F'M, FN, F'N, sont dites les *rayons vecteurs* de la courbe.

THÉORÈME. (*Fig.* 241.)

N° 32. — *Dans toute ellipse, l'angle formé par l'un des rayons vecteurs,* F'M, *mené en un point quelconque* M *de la courbe, et le prolongement* MK *de l'autre rayon vecteur,* FM, *est divisé en deux parties égales par la tangente* SMT *en ce point.*

Avant de démontrer cette proposition, il est nécessaire d'observer que, la courbe étant tracée, on a pour tout point P *extérieur* (*fig.* 240), $FP+F'P>2a$, Fig. 240.
et au contraire, pour tout point P' *intérieur* à la courbe, $FP'+F'P'<2a$.

En effet, dans le premier cas, joignant au point F le point M où F'P rencontre la courbe, on a (n° 38)

$$FP+PF'>FM+MF'; \quad \text{mais} \quad FM+MF'=2a; \quad \text{donc} \quad FP+F'P>2a.$$

Dans le second, prolongeant FP' jusqu'en *m*, et menant *m*F', on a

$$FP'+P'F'<Fm+mF'<2a.$$

Cela posé, considérons un point quelconque M (*fig.* 241) de la courbe. Fig. 241.
Menons les rayons vecteurs FM, F'M, et prolongeons FM en K; puis divisons l'angle F'MK en deux parties égales : je dis que la *bissectrice* SMT est tangente à la courbe; et la démonstration se réduit à faire voir que tout point N de cette droite, autre que le point M, est situé hors de la courbe.

(*) La courbe se nomme *ovale* du jardinier quand elle a été tracée sur le terrain par un mouvement analogue au précédent, au moyen de deux *piquets* et d'un *cordeau*.

Or, si nous prenons sur MK, $MG = MF'$, et que nous tirions les droites F'G, NG, NF', NF, il en résulte $F'I = IG$ (n° 61), et $NF' = NG$ (n° 40).

On a d'ailleurs

$$FN + NG > FG, \quad \text{ou} \quad FN + NF' > FM + F'M:$$

mais $$FM + F'M = 2a;$$

donc $$NF + NF' > 2a.$$

Ainsi le point N est situé hors de la courbe.

Comme le même raisonnement s'appliquerait à tout autre point de la droite SMT, il s'ensuit que cette droite est tangente; *C. Q. F. D.*

N. B. — Nous nommerons *cercle directeur* (*) un cercle décrit du point F ou F' comme centre avec le rayon $2a$: — *Tout point* M *de la courbe est également distant du second foyer,* F' ou F, *et de la circonférence directrice.*

N° 83. — Scolie I. — Cette propriété de la tangente fournit un moyen simple de — *Mener une tangente à l'ellipse,* — 1° — *par un point* M *donné sur la courbe,* — 2° — *par un point* N *donné hors de la courbe.*

Fig. 241. Premier cas. (*Fig.* 241.) — *Menez* le rayon FMG du cercle directeur; *joignez* MF'; puis *divisez* l'angle F'MK en deux parties égales : — vous obtenez ainsi la tangente demandée.

Fig. 241 *bis*. Second cas. (*Fig.* 241 *bis.*) — 1° — Du point N comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au point F', *décrivez* un arc de cercle qui coupera la circonférence directrice en deux points G, G'; — 2° — *joignez* le point F aux points G, G': les droites FG, FG', rencontrent la courbe aux points M, M'; — 3° — *tirez* NM, NM': — vous obtenez ainsi les deux tangentes que l'on peut mener du point donné.

N. B. — Tant que le point N sera extérieur à la courbe, les deux circonférences NF' et $2a$, se couperont; car, d'abord, le point F' est *intérieur* à la circonférence directrice; ensuite, si l'on tire FN, et qu'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en L avec *circ.* NF, comme on a $FN + NF' > 2a$.

(*) « Indépendamment des deux droites directrices », dit M. *Abel Transon* (*Journal de Mathématiques de M. Liouville*, tome IV, page 457), « il existe pour toute section conique deux « cercles qu'on peut *à bon droit* appeler *directeurs*. Je veux parler de ces deux cercles qui ont « leurs centres respectivement aux deux foyers, et qui ont tous deux pour rayon une ligne « égale à l'axe principal. *On sait assez* combien la considération de ces cercles apporte de « facilité dans la construction de la plupart des problèmes qui se rapportent aux sections « coniques, etc. »

En effet, M. Transon a tiré un très-bon parti des cercles directeurs, et a su véritablement se les approprier par l'habileté avec laquelle il en a développé la théorie. Aussi, je n'enlèverai rien au mérite de son travail en revendiquant ici, puisque l'occasion s'en présente, ce qui d'ailleurs ne m'avait pas semblé valoir la peine d'une réclamation spéciale, en revendiquant, dis-je, cette petite invention qui a été annuellement développée dans tous les Cours que j'ai faits depuis vingt ans au collége de Reims, puis à celui de Rollin, et enfin au collége de Saint-Louis. Au reste, je le répète, cette réminiscence, en supposant que c'en soit une, ne diminue absolument en rien à mes yeux le mérite du travail en question.

il en résulte aussi $FN + NL > 2a$, ou $FL > 2a$; ainsi le point L est *extérieur* à la circonférence directrice. Donc (nº 156) les deux circonférences se coupent; et le problème admet *deux* solutions.

Nº 84. — Scolie II. — Dans les constructions précédentes, nous avons reconnu que la droite F'G (*fig.* 241 et 241 *bis*) est divisée en deux parties égales par la tangente ST; c'est-à-dire que $F'I = IG$. D'après cette remarque, si nous joignons le point O au point I, nous formerons deux triangles semblables F'FG, F'OI, puisque $F'F = 2F'O$, et $F'G = 2F'I$. — Or on a Fig. 241 et 241 *bis*.

$$FG = FM + MF' = 2a;$$

donc

$$OI = \frac{FG}{2} = a;$$

ce qui démontre que

La circonférence décrite sur $AB = 2a$ *comme diamètre, est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer* F' *sur les tangentes.*

N. B. — La même propriété s'applique au point F, comme on peut facilement le reconnaître.

Nous pourrions encore, en nous fondant sur les seuls principes de la Géométrie élémentaire, démontrer une foule d'autres propriétés; mais cela nous entraînerait trop loin.

De l'Hyperbole. (*Fig.* 242.)

Fig. 242.

Nº 85. — L'Hyperbole est une *courbe plane, telle que la différence des distances de chacun de ses points,* M, *à deux points fixes,* F, F', *est constante et égale à une ligne donnée* 2a. — [Ici il est évident que, pour l'existence de la courbe, la condition $2a < FF'$ est nécessaire.]

De la relation $FM - F'M = 2a$, on tire

$$FM = F'M + 2a;$$

ainsi, F'M peut recevoir une valeur aussi grande que l'on veut: il en résulte toujours une valeur correspondante pour FM. — D'où l'on voit que la courbe doit s'étendre indéfiniment.

Si, sur la droite indéfinie XY qui joint les deux points F, F', on prend, à partir du milieu O de la droite FF', deux distances $OA = OB = a$, les points A et B appartiendront à la courbe.

Car on a $F'A - FA = F'B + AB - FA = AB = 2a$,

et $FB - F'B = FA + AB - F'B = AB = 2a$.

Pour obtenir d'autres points de la courbe, il suffit de décrire du point F' comme centre, avec un rayon quelconque F'M [plus grand toutefois que F'B], un arc de cercle; puis du point F comme centre, avec le rayon $F'M + 2a$, un autre arc de cercle. Ces deux arcs se coupent en deux points M, M' [symétriques par rapport à XY]; et ces points appartiennent à la courbe.

En faisant un échange des deux rayons F'M, FM (*voyez* le nº 167), on

peut obtenir deux autres points M'', M''', symétriques des points M, M', par rapport à la perpendiculaire ZU élevée du point O sur la droite XY. D'où il suit que la courbe est composée de *deux branches* distinctes MBM', M''AM''', égales et opposées, qui s'étendent indéfiniment, à droite et à gauche de la droite ZU, au-dessus et au-dessous de la droite XY.

Les deux droites XY, ZU, sont encore, comme pour l'ellipse, *deux axes de symétrie*, et le point O *un centre de symétrie*. — Ce qui distingue les deux axes de l'ellipse de ceux de l'hyperbole, c'est que, dans la première, les axes sont rencontrés par la courbe en quatre points, tandis que, dans l'hyperbole, un seul des deux axes est traversé par la courbe.

Aussi le premier, XY, ou plutôt la partie AB de cette droite, se nomme l'*axe transverse*, ou le *premier axe* de l'hyperbole; l'autre se nomme l'*axe non transverse*, ou le *second axe*.

Les points F, F', sont encore dits *les foyers* de la courbe; et les lignes FM, F'M, sont les *rayons vecteurs*.

L'hyperbole peut également se décrire d'un mouvement *continu*, au moyen d'un *fil* et d'une *règle* que l'on fait pivoter autour de l'un des foyers; mais les détails de cette description nous entraîneraient trop loin.

Il serait facile de prouver :

1° — Que pour tout point P intérieur à la courbe, on a

$$FP - F'P > 2a;$$

2° — Que pour tout point P' extérieur, on a au contraire

$$FP' - F'P' < 2a.$$

Enfin, ainsi que dans l'ellipse, un cercle décrit du point F ou du point F' comme centre, avec le rayon $2a$, est dit le *cercle directeur* de l'hyperbole.

Cela posé, la tangente à l'hyperbole jouit d'une propriété analogue à celle de l'ellipse.

FIG. 242. THÉORÈME. (*Fig.* 242.)

N° 56. — *La tangente à l'hyperbole en un point quelconque* M, *divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs* FM, F'M.

En effet, divisons l'angle FMF' en deux parties égales; je dis que la *bissectrice* SMT est telle que tout point N de cette droite, autre que le point M, est situé hors de la courbe.

Pour le démontrer, prenons sur MF, MG = MF', puis tirons les droites F'G, NF', NF, NG. On a, d'après la construction, F'I = IG (n° 61), NF' = NG, MF' = MG (n° 40); d'où MF — MG = $2a$. — D'ailleurs, le triangle NFG donne (n° 38) NF — NG < FG, et par conséquent

$$NF - NF' < 2a;$$

ainsi le point N est situé hors de la courbe. — *Donc*, etc.

SCOLIE I. — De là résulte le moyen de — *Mener une tangente*, — 1° — *par un point* M *donné sur la courbe*; — 2° — *par un point* N *donné hors de la courbe*.

PREMIER CAS. (*Fig.* 242.) — *Divisez* l'angle FMF' en deux parties égales; et vous obtenez ainsi la tangente demandée. FIG. 242.

SECOND CAS. (*Fig.* 242 *bis.*) — Du point N, comme centre, et avec un rayon égal à NF', *décrivez* un arc de cercle qui coupe en deux points, G, G', la *circonférence directrice* décrite du foyer F comme centre [avec le rayon $2a$]; *tirez* FG, FG', et *prolongez* ces droites jusqu'à leur rencontre en M, *m*, avec la courbe, puis *tracez* les droites NM, N*m* : — vous obtenez ainsi les deux tangentes qu'on peut mener du point N à la courbe. FIG. 242 *bis.*

N. B. — Le problème est toujours possible tant que le point N est situé du côté de la *convexité* de la courbe, ce qu'on peut faire voir facilement, comme pour l'ellipse, en montrant que le cercle NF' a un point extérieur et un point intérieur à la circonférence $2a$.

SCOLIE II. — Quant aux *normales* à l'ellipse et à l'hyperbole, comme elles ne sont autres que les perpendiculaires aux tangentes, menées par les points de contact, il serait facile de reconnaître que

1° — *Dans l'ellipse, la normale est la bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs,* — et *la tangente est la bissectrice de son adjacent.*

2° — *Dans l'hyperbole, la tangente est la bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs;* — et *la normale est la bissectrice de son adjacent.*

SCOLIE III. — Enfin, *dans l'hyperbole comme dans l'ellipse, la circonférence décrite sur l'axe transverse* AB *comme diamètre, est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de chacun des foyers sur les tangentes.*

DE LA PARABOLE. (*Fig.* 243.) FIG. 243.

N° 87. — LA PARABOLE est une *courbe dont chaque point est également distant d'un point fixe* F, *nommé* FOYER, *et d'une droite fixe* LL', *nommée* DIRECTRICE.

Abaissons du point donné F une perpendiculaire XY sur la directrice LL', et prenons FA égale à la moitié de la distance FD : le point A sera un point de la courbe : car, d'après cette construction, la distance du point A au point F est égale à sa distance à la directrice LL'.

Pour obtenir d'autres points, *prenons* un point quelconque P sur XY, et élevons la perpendiculaire indéfinie PK; puis du point F comme centre, avec un rayon égal à PD, décrivons une circonférence qui rencontre la droite PK, en deux points M, M' : ces points appartiennent à la courbe.

En effet, on a $$FM = PD = MG;$$

ainsi le point M est à égale distance du point F et de la droite LL'.

Comme le point P peut être pris partout où l'on veut sur la droite XY [pourvu toutefois que le point A soit entre D et P], il s'ensuit que la courbe s'étend indéfiniment du côté de F, tant au-dessus qu'au-dessous de XY, qui la partage symétriquement.

La droite XY, étant le seul axe de symétrie de la courbe, se nomme l'*axe* de la parabole; le point A en est dit le *sommet*.

FIG. 243. **THÉORÈME.** (*Fig.* 243.)

N° 88. — *La tangente* ST *à la parabole divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur* FM *et une parallèle à l'axe menée par le point de contact* M.

Il est d'abord facile de prouver que, pour tout point pris *intérieurement* à la parabole, la distance au point F est moindre que la distance à la directrice; et qu'au contraire la distance d'un point extérieur au point F est plus grande que sa distance à la directrice.

Cela posé, considérons un point quelconque M de la courbe; et, après avoir tiré le rayon vecteur FM et la droite MG perpendiculaire sur LL', *divisons* l'angle FMG en deux parties égales: je dis que la bissectrice ST a tous ses points N, autres que le point M, situés hors de la courbe, et lui est par conséquent tangente.

Car, si l'on tire FG, NF, NG, et NH perpendiculaire sur LL', on a IF = IG (n° 61), NF = NG (n° 40). Mais NF ou NG > NH; donc le point N est situé hors de la courbe.

Même raisonnement par rapport à tout autre point de la droite ST; donc ST est une tangente.

SCOLIE I. — Pour mener d'abord une tangente à la parabole par un point M donné sur la courbe, il suffit de *diviser* l'angle FMG en deux parties égales.

FIG. 243 *bis*. En second lieu, soit un point N (*fig.* 243 *bis*) donné hors de la courbe; du point N comme centre, avec le rayon NF, *décrivons* un arc de cercle qui rencontre LL' en deux points G, G'; *tirons* GE, G'E', parallèles à XY, et *joignons* le point N aux points M, M', où ces parallèles rencontrent la courbe.

Nous obtenons ainsi les deux tangentes qu'on peut mener du point N à la courbe, tant que ce point est extérieur.

La discussion de ce second cas n'offre aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons pas.

SCOLIE II. — *La normale à la parabole divise en deux parties égales l'angle formé par le prolongement du rayon vecteur et la parallèle à l'axe.*

SCOLIE III. — De ce que l'on a FI = IG, FA = AD, il en résulte que le point I se trouve sur la tangente AB perpendiculaire à l'axe; ce qui démontre que, — *Dans la parabole, la perpendiculaire élevée à l'axe par le sommet, est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes.*

SCOLIE GÉNÉRAL. — Les trois courbes dont nous venons de faire connaître la nature et quelques-unes des propriétés principales, jouent un très-grand rôle dans toutes les parties des mathématiques, même dans les sciences physico-mathématiques.

Elles portent conjointement le nom de *sections coniques*, parce que ce sont les courbes qui résultent de l'intersection d'un cône par un plan, ainsi que nous pourrons le voir dans le second appendice.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

N. B. — Dans cette seconde partie, qui a pour objet la *Géométrie dans l'espace* (nº 23), toutes les figures doivent être supposées pénétrables et transparentes.

LIVRE TROISIÈME.

DES FIGURES CONSIDÉRÉES DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

DU PLAN ET DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES PLANES.

PRÉLIMINAIRES.

N° 290. — Nous avons admis (n° 8) comme évident que, — *Par trois points, non en ligne droite, on peut toujours faire passer un plan, et qu'on ne peut en faire passer qu'un :* — Or, cette proposition peut être établie rigoureusement.

Soient A, B, C (*fig.* 244), trois points situés arbitrairement Fig. 244. dans l'espace ; et concevons qu'un plan [matérialisé par la pensée] soit disposé de telle sorte qu'il passe par les deux points A, B ; la droite AB y sera contenue tout entière, d'après la définition du plan (n° 7). — Cela posé, faisons tourner le plan autour de AB comme autour d'une charnière jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point C. Il est clair que le plan est alors fixé de position dans l'espace, en ce sens qu'il ne peut plus continuer son mouvement autour de AB, sans que le point C cesse de s'y trouver. — Le plan est ainsi assujetti à passer par les trois points A, B, C.

Je dis maintenant que tout autre plan passant par les mêmes points coïncide avec le premier dans toute son étendue. — En effet, les points A, B, C, appartenant tous trois aux deux plans, il s'ensuit (n° 8) que les droites de jonction AB, AC, BC, de ces points pris deux à deux, se trouvent à la fois contenues tout entières dans les deux plans. Il en est par conséquent de même de la

droite CD qui joint le point C à un point quelconque D du prolongement de AB, et de toutes les droites AE, AF,... menées du point A aux différents points de BC, CD. Or toutes les droites menées ainsi autour du point A, et prolongées indéfiniment, forment, pour ainsi dire (n° 1), par leur ensemble, les deux surfaces que nous considérons. Donc, enfin, ces deux surfaces coïncident dans toute leur étendue.

N° 291. — De là résultent les conséquences suivantes, que nous avons déjà énoncées aux n°s 8, 9, 10 et 32 :

1° — *L'intersection commune de deux plans est une ligne droite*, — puisque si trois des points de cette intersection n'étaient pas en ligne droite, les deux plans coïncideraient; ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° — *Deux plans indéfinis qui passent par un même point ont une infinité d'autres points communs, et tous ces points sont sur une même droite.*

3° — *Deux droites qui se coupent sont dans un même plan, et en déterminent la position*, — puisque deux points de la première et un point de la seconde forment un système de trois points non en ligne droite.

4° — *Deux parallèles sont toujours dans un même plan*, d'après leur définition (n° 32), et *elles en fixent la position*, — puisque deux points de l'une des parallèles et un point de la seconde forment encore un système de trois points non en ligne droite.

Nous ajouterons, comme conséquences de cette dernière proposition, que,

5° — *Par un point de l'espace, on ne peut mener deux parallèles à une même droite*, — car, s'il en était autrement, les deux parallèles seraient dans un même plan avec la droite, résultat *absurde* (n° 34, 1re *conséq.*).

6° — *Toutes les parallèles qu'il est possible de mener par les différents points d'une même droite, sont dans un même plan.*

N° 292. — Un plan se représente ordinairement sur une feuille de dessin au moyen d'un parallélogramme, et de deux lettres placées aux sommets opposés; ainsi, l'on dit le plan MN (*fig.* 244).
Fig. 244

Ce plan, qu'il faut toujours concevoir prolongé indéfiniment, partage l'espace en deux portions indéfinies que l'on nomme *régions* (*voir* le n° 11).

Une droite est dite *parallèle* à un plan lorsqu'elle ne peut rencontrer le plan, quelque prolongés qu'on les suppose l'un et l'autre.

De même, deux plans sont dits *parallèles entre eux* lorsqu'ils ne peuvent se rencontrer, quelque prolongés qu'on les suppose.

N° 293. — *Définition des angles dièdres, trièdres,...* — De même que deux droites, en se coupant, partagent l'étendue de leur plan en *quatre* portions que nous avons nommées *angles plans*, ou simplement *angles* (n° 10), de même deux plans qui se coupent, partagent l'espace en *quatre* portions indéfinies que l'on nomme ANGLES DIÈDRES. — Les côtés de chaque angle plan sont ici remplacés par deux *moitiés* de plan qui comprennent chaque angle dièdre, et que l'on nomme ses *faces;* et le sommet de l'angle est remplacé par l'intersection commune OP (*fig.* 245) des deux plans, que l'on nomme l'*arête* de l'angle dièdre. — Un angle dièdre, quand il est isolé, se désigne par *deux* points pris sur son arête; mais quand plusieurs angles dièdres ont la même arête, on emploie, pour désigner chacun d'eux, *quatre* points [ou quatre lettres] dont les deux intermédiaires sont pris sur l'arête, et les deux extrêmes dans chacune des faces. — Ainsi, les *quatre* angles dièdres de la figure 245 s'énonceront respectivement AOPE, COPG, BOPF, DOPK, tandis que chacun d'eux, pris isolément, serait désigné simplement par OP. FIG. 245.

Maintenant, si, par un point quelconque S (*fig.* 246) de l'intersection SA de deux plans, on en fait passer un troisième qui coupe cette intersection, on décompose chacun des *quatre* angles dièdres formés par les deux premiers plans, en *deux* portions indéfinies d'espace, de même nature, par conséquent, que les angles dièdres, et que l'on nomme des ANGLES TRIÈDRES; d'où l'on voit que *trois plans* qui se coupent en un même point décomposent toujours l'espace en *huit* angles trièdres, comme on le voit sur la *figure* 246, figure dans laquelle FIG. 246.

SABC, SA'B'C', SA'BC, SAB'C,
SABC', SA'B'C, SA'BC', SAB'C',

sont les huit angles trièdres auxquels donnent lieu les trois plans SAB, SAC, SBC, indéfiniment prolongés en tous sens.

N° **294**. — On nomme, en général, Angle Polyèdre [et quelquefois, mais improprement, Angle Solide], la portion indéfinie de l'espace, comprise entre plusieurs plans qui se coupent en un

Fig. 247. même point S (*fig.* 247). — Ce point se nomme le sommet; et l'on appelle *face*, chacun des angles plans qui comprennent l'angle polyèdre; leur ensemble forme la surface, et les intersections de ces mêmes faces, prises deux à deux, SA, SB, SC,..., sont les *arêtes*. — Chacune des arêtes sert en même temps de côté à deux faces contiguës. — Il faut encore distinguer dans un angle polyèdre, autant d'angles dièdres qu'il a de faces.

Un angle polyèdre se désigne par la lettre de son sommet, après laquelle on énonce ordinairement [à moins que cet angle ne soit isolé] des lettres qui servent à représenter respectivement un point de chaque arête.

On nomme *plan diagonal*, tout plan SAC, SAD, mené par deux arêtes qui n'appartiennent pas à la même face. — Au moyen d'un nombre convenable de pareils plans, *tout angle polyèdre peut se décomposer en angles trièdres*, de la même manière qu'un polygone est décomposable en triangles.

On distingue deux sortes d'angles polyèdres, 1° — les angles polyèdres *convexes*, dont tous les angles dièdres sont *saillants*; 2° — les angles polyèdres *concaves*, qui ont un ou plusieurs angles dièdres *rentrants*.

Les caractères principaux des angles polyèdres *convexes* sont (*voyez* le n° **38**)

1° — Qu'*une droite* ne peut *percer* sa surface en plus de *deux points*;

2° — Que ses *plans diagonaux* sont tous *intérieurs*;

3° — Qu'une face quelconque étant prolongée indéfiniment dans tous les sens, chacune des autres faces est située tout entière d'*un même côté* [ou dans la même région (n° **292**)] par rapport à la première.

N° **295**. — Un *Polyèdre* [ou improprement, un *Solide*] est *l'es-*

pace entièrement circonscrit par plusieurs plans qui se coupent deux à deux.

Les différents polygones qui limitent cet espace se nomment les *faces* du polyèdre, les côtés de ces faces sont les arêtes, et les points d'intersection de ces arêtes sont les *sommets*. — Enfin, on nomme *diagonale*, toute droite menée entre deux sommets qui ne terminent pas une même arête; et *plan diagonal*, tout plan passant par *trois* sommets non situés sur la même face.

Les caractères des polyèdres *convexes* sont les mêmes que ceux des angles polyèdres (nº 294).

Nº 296. — Ce chapitre aura *quatre* paragraphes, dont le *premier* traitera des *droites* et des *plans perpendiculaires*, ainsi que des angles *dièdres* et de leur mesure; le *second*, des *droites* et des *plans parallèles*; le *troisième*, des *angles trièdres* et *polyèdres*, ainsi que de la théorie des angles *trièdres égaux*; enfin, le *quatrième*, des différentes sortes de *polyèdres* et de leurs propriétés principales, abstraction faite de leur étendue. — (*Voir* la page 33, pour la division du premier chapitre du premier livre.)

Mais avant d'entrer en matière, nous dirons quelques mots sur la manière de représenter sur une feuille de dessin un système de points, de lignes et de plans, dont les diverses parties ont entre elles une relation quelconque de position.

Le premier moyen, celui qui donne, en général, l'idée la plus exacte de la figure, consiste à *ombrer*, afin de mieux faire ressortir les parties *vues* et les parties *cachées*. — (*Voir* les *fig.* 245, 246, 247.) FIG. 245, 246, 247.

Quelquefois on indique suffisamment le *relief* d'une figure, en représentant des déchirures ACB, A′B′C′, ABCDE (*fig.* 246, 247), FIG. 246, 247. opérées dans les faces.

Lorsque plusieurs droites PA, PB (*fig.* 248), sont menées par FIG. 248. un même point P d'un plan MN, et que l'on veut faire comprendre qu'elles sont situées dans ce plan, on a coutume de les indiquer par des *traits pleins* que l'on prolonge jusqu'à leur rencontre avec les côtés du parallélogramme qui figure le plan; et les prolongements sont ensuite désignés par des *lignes ponctuées*.

Lorsqu'au contraire, une droite, telle que EF, ne doit avoir

qu'un point P commun avec le plan; en d'autres termes, quand elle ne fait que *percer* le plan, on la figure par un trait *plein* au delà même des côtés du parallélogramme, en ayant soin, toutefois, de *ponctuer* la partie PK qui, par rapport à l'œil, est *cachée* par le plan MN.

De même, si, par les droites PE, PB, qui se coupent en un point P, on veut conduire un nouveau plan, comme alors il y a une portion du plan MN qui est cachée par le plan EPB, on ponctue la portion GB de la droite MI, dont la vue est interceptée par le plan EFB.

Au surplus, ces moyens, qui sont de pure convention, deviennent superflus pour quiconque s'est exercé à *lire dans l'espace*, c'est-à-dire à juger, sur le dessin, de la position relative des diverses parties d'une même figure.

§ I. — *Des droites et des plans perpendiculaires entre eux. — Angles dièdres.*

Fig. 249. LEMME. (*Fig.* 249.)

N° 297. — *Par un point quelconque* P *d'une droite* EF *située arbitrairement dans l'espace, on peut mener une infinité de droites perpendiculaires à la droite donnée.*

En effet, conduisons un plan suivant PE, ce qui est toujours possible (n° 291), et dans ce plan, menons la droite PA perpendiculaire à PE; puis, faisons tourner ce plan autour de PE supposé fixe. Dans ce mouvement, la droite PA prendra les positions successives PA′, PA″, PA‴,...; et l'on aura ainsi une infinité de droites perpendiculaires à PE, en un même point P de cette droite.

SCOLIE. — Nous avons vu (n° 27) que, dans un plan donné, l'on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite par un point de cette droite; mais, dans l'espace, on peut en *mener une infinité*. [Nous verrons bientôt de quelle nature est le *lieu* de toutes ces perpendiculaires.]

THÉORÈME I. (*Fig.* 250.) FIG. 250.

N° 298. — *Si une droite* OP *est perpendiculaire à deux autres droites* PA, PB, *menées par un de ses points*, P, *elle est perpendiculaire à toute autre droite* PL *menée par le même point* P *dans le plan* MN *de ces deux autres droites.*

Prolongeons OP de l'autre côté du plan MN, et prenons PO′=PO; puis, après avoir coupé PA, PL, PB, par une transversale quelconque CED, tirons les droites OC, OE, OD, et O′C, O′E, O′D. — Cela posé, on a OC = O′C, OD = O′D (n° 40); donc, les deux triangles OCD, O′CD, sont égaux (n° 63, 3me *cas*); et dans la superposition de ces triangles, les droites OE, O′E, coïncideraient; par conséquent, la droite PE est perpendiculaire à OO′ (n° 42).

N. B. — Le même raisonnement s'appliquerait à toute droite différente de PL, menée par le point P dans le plan MN.

THÉORÈME II. (*Fig.* 249.) FIG. 249.

N° 299. — *Le lieu de toutes les perpendiculaires* PA, PA′, PA″,..., *à une droite* EF, *menées par un de ses points*, P, *est un plan.*

Il suffit de prouver que les trois droites PA, PA′, PA″, par exemple, sont dans un même plan. — Or, supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et que le plan conduit suivant PA, PA″, ne contienne pas PA′; faisons passer par PE, PA′, un second plan dont l'intersection avec le plan APA″ sera alors une droite PK différente de PA′. — Cela posé, en vertu du théorème précédent, PE, perpendiculaire à PA, PA″, le sera aussi à PK; mais, par hypothèse, PE est également perpendiculaire à PA′. On aurait donc deux droites perpendiculaires à PE, en un même point et *dans un même plan contenant* cette droite, ce qui est *absurde* (n° 27).

Ainsi, l'on ne peut supposer que PA, PA′, PA″, ne soient pas dans un même plan.

Même raisonnement par rapport aux autres droites quelconques PA‴, PA^IV^,.... *Donc*, etc.

SCOLIE. — Le plan qui contient toutes les droites PA, PA′, PA″,..., perpendiculaires à EF, est dit un *plan perpendiculaire* à cette

droite; réciproquement, la droite EF étant perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied P dans le plan qui la contient, est dite une *droite perpendiculaire* au plan.

Fig. 249 Corollaire I. — *Par un point donné* P *sur une droite* EF (*fig.* 249), *on peut toujours mener un plan perpendiculaire à cette droite; — et l'on n'en peut mener qu'un.*

La *première* partie de cette proposition résulte immédiatement de ce qui précède.

Quant à la *seconde* partie, admettons, pour le moment, qu'on puisse mener par le point P deux plans perpendiculaires à EF; si nous conduisons suivant cette droite un plan quelconque [autre que celui qui passe par l'intersection des deux premiers], ce plan coupera les deux autres suivant deux droites auxquelles PE sera perpendiculaire. — On aurait donc deux perpendiculaires à une même droite, par un même point et *dans un même plan contenant cette droite*, ce qui est *absurde;* — donc, etc.

Fig. 250. Corollaire II. — De même, — *Par un point* C (*fig.* 250) *donné hors d'une droite* OO′, *on peut toujours mener un plan perpendiculaire à la droite, et l'on n'en peut mener qu'un.*

Premièrement, après avoir conduit un plan par le point C et par la droite OO′ (n° **290**), menons dans ce plan, la droite CP perpendiculaire à OO′; puis, du point P, dans un autre plan quelconque passant par OO′, traçons une seconde droite PD perpendiculaire à OO′ : celle-ci sera perpendiculaire au plan CPD (nos **298** et **299**, *scol.*); et réciproquement, le plan CPD sera perpendiculaire à OO′ (*scolie* précédent); donc, etc.

En second lieu, soit, s'il est possible, un second plan perpendiculaire à OO′ et passant par le point C : le plan OPC couperait les deux plans perpendiculaires à OO′, suivant deux droites qui contiendraient le point C, et seraient à la fois perpendiculaires à OO′; ce qui est *absurde; — donc*, etc.

N. B. — Un plan se trouve déterminé par la double condition de *passer* par un point, et d'être *perpendiculaire* à une droite; ce qui prouve que la condition de perpendicularité équivaut à *deux*, puisqu'il faut généralement trois conditions pour fixer la position d'un plan dans l'espace (*voyez* le n° **291**).

THÉORÈME III. (*Fig.* 251.) FIG. 251.

N° 300. — *Lorsqu'une droite* AP *est perpendiculaire à un plan* MN, *si l'on mène à volonté, dans ce plan, une autre droite* BC, *et que du pied* P *de la première, on abaisse une perpendiculaire* PD *sur la seconde, celle-ci est perpendiculaire au plan des deux autres droites,* AP, PD.

Prenons, à partir du point D sur BC, deux distances égales DE, DF; tirons PE, PF, et joignons un point quelconque A de la droite AP aux mêmes points E, F. — Cela posé, les deux triangles APE, APF, sont égaux, car les deux angles en P sont droits (n° 298); de plus, AP est commun, et PE = PF (n° 40); et de l'égalité de ces deux triangles, il résulte que AE = AF; donc (n° 42) la droite AP est perpendiculaire sur EF. La droite BC étant alors perpendiculaire aux deux droites DA, DP, qui passent par son pied dans le plan APD, est perpendiculaire à ce plan (n° 298);

C. Q. F. D.

SCOLIE I. — Si, par le point D, dans le plan APD, on mène la droite DL parallèle à PA, la droite BC, perpendiculaire au plan APD, est nécessairement perpendiculaire à DL (n° 298); réciproquement, la droite DL est perpendiculaire à BC; or elle est en même temps perpendiculaire à la droite DP (n° 34, 2°); donc enfin DL est perpendiculaire au plan MN (n° 298).

SCOLIE II. — La *figure* 251 offre l'exemple de deux droites AP, BC, perpendiculaires à une même droite PD, et qui, cependant, ne sauraient se rencontrer, puisque AP ne fait que traverser le plan MN, tandis que l'autre y est située tout entière. — (*Voyez* à ce sujet *la définition des parallèles*, n° 32.) FIG. 251.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 252, 253.) FIG. 252, 253

N° 301. — *Par un point donné sur un plan ou hors d'un plan* MN, — 1° — *on peut toujours mener une perpendiculaire au plan;* — 2° — *on n'en peut mener qu'une.*

Démontrons d'abord les deux propositions, pour le cas où le point donné est *dans le plan* MN.

FIG. 252. Soit P ce point (*fig.* 252); et traçons dans le plan MN une droite quelconque EPG; puis, par le point P concevons (nº **299**, *corol.* I) le plan RS perpendiculaire à EG, plan dont l'intersection avec le plan MN soit CPR; enfin, du point P menons dans le plan RS la droite PK perpendiculaire à PR. — Cela posé, puisque EG est perpendiculaire au plan RS, elle est nécessairement perpendiculaire à PK; réciproquement, PK est perpendiculaire à PE; mais elle est aussi, par construction, perpendiculaire à CPR; donc PK est perpendiculaire au plan MN; et la première proposition est démontrée.

Soit maintenant, s'il est possible, une seconde droite PL perpendiculaire au plan MN. Conduisons par les deux droites PK, PL, un plan qui coupe le plan MN suivant une certaine droite II' à laquelle PK, PL, doivent être à la fois perpendiculaires. On aurait donc deux perpendiculaires à une droite, par un même point de cette droite et *dans un même plan avec* elle, ce qui est *absurde*: — *donc*, etc., etc.

— Considérons maintenant le cas où le point est donné *hors du*
FIG. 253. *plan;* et soit A (*fig.* 253) ce point.

En un point quelconque P' du plan MN, élevons la droite P'A' perpendiculaire à ce plan; la droite AP menée par le point A [dans le plan AA'P'], parallèlement à A'P', est aussi (nº **300**, *scolie* I) perpendiculaire au plan MN; donc la première proposition est démontrée.

Je dis, en dernier lieu, que du point A, l'on ne peut supposer deux droites AP, AQ, perpendiculaires au plan MN; car s'il en était ainsi, l'on aurait deux perpendiculaires AQ, AP, abaissées sur une même droite PQ, ce qui est *absurde* (nº **27**).

Le théorème est donc démontré complétement.

Nº 302. Scolie. — Un point étant donné hors d'un plan, toutes les droites menées de ce point à divers points du plan, et différentes de la perpendiculaire passant par ce même point, sont dites des *obliques* au plan; et leurs points d'intersection avec le plan se nomment les *pieds* de ces obliques.

Deux obliques sont dites *également écartées* de la perpendicu-

laire lorsque leurs pieds sont à *même* distance de celui de la perpendiculaire. — Cela posé,

THÉORÈME V. (*Fig.* 254.) FIG. 254.

N° 303. — Si d'un point O pris hors d'un plan MN on mène la perpendiculaire OP et différentes obliques OA, OA',..., OB, à ce plan,

1° — *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° — *Deux obliques* OA, OA', *qui s'écartent également de la perpendiculaire, sont égales;*

3° — *De deux obliques,* OB, OA, *qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle,* OB, *qui s'en écarte le plus, est la plus longue.*

En effet, — 1° — Soit OA une oblique quelconque : le triangle rectangle OPA donne OP $<$ OA (n° 39);

2° — Soit PA' $=$ PA: les triangles rectangles OPA, OPA', sont égaux (n° 65, 2me *cas*), et donnent OA' $=$ OA;

3° — Puisque l'on a PB $>$ PA, prenons sur PB une distance PA' égale à PA, et tirons OA' : il en résulte OB $>$ OA' (n° 40); mais on a OA' $=$ OA: donc aussi OB $>$ OA; *C. Q. F. D.*

Les réciproques sont *vraies* et sont des conséquences du principe établi au n° 21.

COROLLAIRE I. — *La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan mesure la vraie distance du point au plan.*

COROLLAIRE II. — *Un point quelconque* O *de la perpendiculaire* OP *à un plan est également distant de tous les points de la circonférence décrite du pied de la perpendiculaire comme centre, avec un rayon quelconque.*

SCOLIE I. — Cette perpendiculaire se nomme l'*axe* du cercle. — Tous les points de l'axe peuvent être considérés comme autant de centres du cercle, et les obliques, comme des rayons correspondants, lesquels peuvent être également employés à le décrire.

SCOLIE II. — Au moyen d'un fil tendu, dont l'une des extrémités serait fixée au point O, et dont l'autre [armée d'un crayon]

toucherait le plan, *marquez* trois points quelconques A, A', A''; puis *déterminez* (n° 181) le centre du cercle passant par ces trois points.

Vous obtiendrez ainsi le *pied* de la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan : c'est le moyen *pratique* de fixer cette position.

N° 304. Scolie III. — Les propriétés comprises dans l'énoncé du théorème précédent sont analogues à celles des n°s 39 et 40 — La proposition suivante répond aux propriétés qui ont fait l'objet du n° 41.

Lorsqu'un plan est mené perpendiculairement par le milieu d'une droite,

1° — *Tout point du plan* est *également distant des deux extrémités* de la droite;

Et 2° — Tout point situé *hors* du plan est *inégalement distant* de ces extrémités.

En d'autres termes, — *Le lieu de tous les points également distants des extrémités d'une droite est le plan perpendiculaire à cette droite, mené par son milieu.*

Pour se rendre compte de cette proposition, il suffit de concevoir par la droite un plan quelconque, lequel coupe le plan donné suivant une droite perpendiculaire à la droite donnée, et passant par son milieu. — Dès lors, la proposition rentre tout à fait dans celle du n° 41.

Des angles dièdres et *de leur mesure.*

N° 305. Définitions. — Lorsque deux plans indéfinis se coupent (n° 293, *fig.* 245), ils déterminent quatre espaces que nous avons nommés des *angles dièdres*. — Cela posé, Fig. 245.

Deux angles dièdres sont dits *égaux entre eux* quand on peut les disposer de manière que les plans du premier *coïncident* avec ceux du second.

Fig. 255. Ainsi, soient les deux angles MABP, M'A'B'P' (*fig.* 255); et concevons que le plan M'A'B' ait été transporté sur le plan MAB de manière que l'arête A'B' *coïncide* avec AB; si, par cela même, il arrive que le plan P'A'B' qui a dû suivre le même mouvement

se confonde avec le plan PAB, alors les quatre plans coïncidant chacun à chacun, les deux angles dièdres se confondent pour n'en plus former qu'*un seul;* et il en est de même de leurs *adjacents* et de leurs *opposés*.

Maintenant, un *plan* est dit *perpendiculaire à un autre* plan quand le premier forme avec le second deux angles adjacents *égaux;* et ces angles sont nommés des *angles dièdres droits*.

Nous pourrions, dès à présent, établir sur les angles dièdres adjacents ou opposés, ainsi que sur les plans perpendiculaires, des propositions analogues à celles qui ont été établies dans les préliminaires du premier *Livre* (nos 29, 30, 31); mais elles résulteront plus simplement de ce qui va suivre.

LEMME I. (*Fig.* 255.) FIG. 255.

N° 306. — *Si, sur les arêtes* AB, A'B', *de deux angles dièdres égaux, on prend à volonté deux points* C, C', *et que par ces points on mène dans les quatre plans, des droites,* CD et CE, C'D' et C'E', *respectivement perpendiculaires aux arêtes, les angles rectilignes* DCE, D'C'E', *ainsi formés, et correspondant aux angles dièdres supposés égaux, sont aussi égaux.*

En effet, portons comme ci-dessus les deux angles dièdres l'un sur l'autre, de manière, toutefois, que le point C' tombe en C et que les arêtes coïncident. Comme, par construction, les droites C'D', C'E', sont perpendiculaires à A'B', et CD, CE, perpendiculaires à AB, il s'ensuit qu'après la superposition des plans, les droites C'D', C'E', coïncideront respectivement avec les droites CD, CE (n° 299); donc les deux angles CDE, C'D'E', sont égaux.

N. B. — Nous devons remarquer ici [et cette remarque est fort importante] que, comme on a pu faire coïncider l'angle D'C'E' avec l'angle DCE, quelle que soit la position du point C sur l'arête AB, *l'angle* DCB *a constamment la même valeur, en quelque point de l'arête que l'on élève des perpendiculaires dans les deux plans qui lui correspondent.*

RÉCIPROQUEMENT. — *Si les angles rectilignes* DCE, D'C'E', *sont égaux, les angles dièdres auxquels ils correspondent sont égaux.*

Car, si l'on porte l'angle D'C'E' sur son égal DCE, comme les arêtes A'B', AB, sont respectivement perpendiculaires aux droites C'D' et C'E', CD et CE, et par conséquent aussi à leur plan (n° 298), et que, d'ailleurs, le point C' est placé sur le point C, la droite A'B' doit coïncider avec AB; donc les plans menés par A'B' et C'D', A'B' et C'E', doivent se confondre avec les plans menés par AB et CD, AB et CE; *donc*, etc.

N. B. — Pour abréger le discours, nous conviendrons de nommer *angle plan correspondant* à un angle dièdre, l'angle rectiligne que forment les perpendiculaires élevées à l'arête de cet angle dièdre, dans les deux plans qui le déterminent.

FIG. 255. LEMME II. (*Fig.* 255.)

N° 307. — *Deux angles dièdres quelconques sont entre eux comme les angles plans correspondants* — [cette dernière expression étant prise dans le sens que nous venons de lui donner].

Nous supposerons, pour plus de simplicité, les deux angles dièdres placés l'un dans l'autre, de manière que l'angle MABP soit le plus grand, et NABP le plus petit. — Cela posé, je dis que l'on a

MABP : NABP :: DCE : FCE.

Il peut se présenter deux cas, suivant que les angles rectilignes DCE, FCE, sont commensurables ou incommensurables entre eux.

PREMIER CAS. — Soit DCE : FCE :: 12 : 7, par exemple. Concevons l'unité angulaire portée 12 fois sur l'angle DCE, et par conséquent, 7 fois sur l'angle FCE; puis, par les droites de division et par l'arête AB, conduisons une série de plans. — L'angle dièdre MABP se trouvera ainsi partagé en 12 angles partiels égaux (n° 306), dont 7 seront nécessairement contenus dans l'angle dièdre NABP. On aura donc

MABP : NABP :: 12 : 7 :: DCE : FCE.

Quant au cas où les angles rectilignes DCE, FCE, sont incommensurables, nous renvoyons au mode de démonstration employé dans les n°s 115, 182,....

La *réciproque* est *vraie* et se démontrerait aussi facilement.

Théorème VI.

N° 308. — *Tout angle dièdre a pour mesure l'angle plan correspondant.*

Ce théorème est une conséquence évidente du lemme qui vient d'être établi, parce qu'on doit entendre par là (n° 119) que *le rapport* de l'angle dièdre proposé, à l'angle dièdre droit (n° 305), *est égal au rapport* de l'angle plan correspondant au premier, à l'angle plan correspondant au second (*).

Ceci suppose, à la vérité, que — *Tous les angles dièdres droits sont égaux ;* — mais cette proposition résulte nécessairement de ce que tous les angles droits formés par des lignes droites sont égaux (n° 326).

Corollaire. — Puisque, sous le point de vue des *valeurs numériques*, les angles dièdres peuvent être remplacés par les angles plans correspondants, il s'ensuit que,

1° — *Tous les angles dièdres droits sont égaux*, ainsi que nous venons de le dire;

2° — *Si un plan est perpendiculaire à un autre*, réciproquement, *celui-ci est perpendiculaire au premier;* — et les deux plans sont dits *perpendiculaires entre eux;*

3° — *Lorsqu'un plan forme avec un autre deux angles dièdres adjacents inégaux, la somme de ces deux angles vaut deux angles dièdres droits;*

4° — *Deux angles dièdres opposés par l'arête sont égaux, etc...*

Des plans perpendiculaires entre eux.

Théorème VII. (*Fig.* 256.) Fig. 256.

N° 309. — *Lorsqu'une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* MN, *tout autre plan* PQ, *conduit suivant la droite donnée, est perpendiculaire au plan donné.*

(*) Nous reviendrons plus loin sur ce sujet, et nous ferons voir que *l'angle plan correspondant* [tel que nous l'avons défini] est le seul, parmi les angles rectilignes, qui puisse servir de mesure à l'angle dièdre (*voyez* la note du n° 331).

Menons par le point A, dans le plan MN, une perpendiculaire AC à l'intersection commune PR des deux plans MN et PQ. — Puisque les deux droites AB, AC, sont perpendiculaires à PR, l'angle BAC mesure (n° 308) l'angle dièdre QPRN. Or, AB, étant supposé perpendiculaire au plan MN, l'est aussi à AC; donc l'angle BAC est droit. — Ainsi les deux plans sont perpendiculaires entre eux.

Scolie. — Comme, par une droite quelconque on peut conduire une infinité de plans, il en résulte que

Suivant une droite perpendiculaire à un plan, on peut faire passer une infinité de plans perpendiculaires au plan donné.

Fig. 256.

Théorème VIII. (*Fig.* 256.)

N° 310. — *Par une droite* PR *située dans un plan* MN, *on peut toujours mener un autre plan perpendiculaire au premier; — et l'on n'en peut mener qu'un.*

D'abord, en un point quelconque A de PR, élevons la droite AB perpendiculaire au plan MN; puis, conduisons un plan suivant AB et PR: ce plan sera perpendiculaire à MN, en vertu du théorème précédent. Ainsi, la première partie de la proposition est démontrée.

En second lieu, soit, s'il est possible, un second plan PQ′ passant par PR et perpendiculaire à MN : les deux angles dièdres QPRN, Q′PRN, étant *droits* l'un et l'autre, seraient égaux (n° 308, *corol.*); et la *partie* serait égale au *tout*, ce qui est *absurde*; — donc, *etc.*, *etc.*

Fig. 256.

Théorème IX. (*Fig.* 256.)

N° 311. — *Lorsque deux plans*, MN, PQ, *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB, A′B′,... *perpendiculaire à l'un d'eux,* MN, *menée par un point de leur intersection commune* PR, *est située tout entière dans l'autre*, PQ.

En effet, si AB, par exemple, n'était pas situé dans le plan PQ, comme le plan conduit suivant AB et PR serait perpendiculaire au plan MN en vertu du théorème précédent, et que déjà, le plan

PQ passant par PR est aussi perpendiculaire à MN, il s'ensuivrait que par une droite située dans un plan, on pourrait mener plus d'un plan perpendiculaire à celui-ci, ce qui est *absurde*.

COROLLAIRE. — *Le lieu des perpendiculaires à un plan, menées par tous les points d'une droite de ce plan, est un second plan perpendiculaire au premier et passant par la droite.*

SCOLIE. — Comme la droite AB, perpendiculaire au plan MN, est, par cela même, perpendiculaire à l'intersection commune RS des deux plans, et qu'elle est complétement déterminée par la double condition d'être située dans le plan PQ et d'être perpendiculaire à RS, il en résulte ce nouveau théorème :

Lorsque deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite menée dans l'un des deux perpendiculairement à leur intersection, est nécessairement perpendiculaire à l'autre.

THÉORÈME X. (*Fig.* 257.) FIG. 257.

N° 312. — *L'intersection commune* AB *de deux plans* PQ, RS, *perpendiculaires à un troisième* MN, *est aussi perpendiculaire à ce troisième plan.*

En effet, si du point A où les droites PP', RR', intersections des deux premiers plans avec le troisième, se rencontrent, on élève une perpendiculaire à celui-ci, cette droite devra se trouver à la fois dans chacun des deux autres plans PQ, RS, en vertu du théorème précédent; elle se confond par conséquent avec leur intersection.

COROLLAIRE. — *Par une droite* AB (*fig.* 258) *oblique* ou *parallèle à un plan* MN, *on ne peut mener plus d'un plan perpendiculaire au premier :* — cela résulte immédiatement du théorème qui vient d'être démontré. FIG. 258.

D'ailleurs, il en existe toujours un, que l'on obtient en abaissant d'un point quelconque A de AB une perpendiculaire AA' sur le plan MN. — Le plan conduit suivant AB et AA' est perpendiculaire à MN (n° 309).

Ce plan est en même temps *le lieu* de toutes les perpendiculaires

abaissées des différents points de la droite AB sur le plan MN (n° 311, *corol.*); d'où il suit que les pieds A', B', C',... de ces perpendiculaires sont tous *sur une même ligne droite.* — Nous aurons souvent occasion de revenir sur cette proposition.

SCOLIE. — *Lorsque trois droites passant par un même point, sont, deux à deux, perpendiculaires entre elles, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres; et les trois plans sont perpendiculaires entre eux.*

Réciproquement : — *Si trois plans sont perpendiculaires entre eux, leurs intersections sont aussi perpendiculaires entre elles.*

En d'autres termes : — *Si les trois angles dièdres d'un angle trièdre* (n° 293) *sont droits, les trois arêtes sont perpendiculaires entre elles deux à deux;* — et *vice versâ* pour la proposition directe.

§ II. — *Des droites et des plans parallèles.*

FIG. 253. THÉORÈME I. (*Fig.* 253.)

N° 313. — *Deux droites* AP, A'P', *perpendiculaires à un même plan* MN, *sont parallèles entre elles.*

Faisons passer un plan par la droite AP et par le point P', pied de la seconde droite sur le plan MN : le plan APP', contenant AP, doit être perpendiculaire au plan MN (n° 309); donc il contient aussi (n° 311, *corol.*) la droite P'A', menée perpendiculairement au plan MN par un point P' de l'intersection commune des deux plans. Les droites AP, A' P', étant alors dans un même plan et perpendiculaires à la même droite PP', sont parallèles entre elles (n° 32).

Réciproquement : — *Si une droite* AP *est perpendiculaire à un plan* MN, *toute droite* A'P' *parallèle à la première* AP *est perpendiculaire au même plan.*

Cette réciproque, qui se démontre facilement par l'absurde et au moyen de la directe, rentre d'ailleurs, à peu de chose près, dans le *scolie* I du n° 300.

On peut encore l'énoncer ainsi : — *Les droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs.*

COROLLAIRE I. — *Deux droites* A, B, *parallèles à une troisième* C, *sont parallèles entre elles.*

Car, si l'on mène par un point quelconque de la droite C un plan qui lui soit perpendiculaire, les droites A, B, étant, par hypothèse, respectivement parallèles à C, sont, en vertu de la réciproque précédente, perpendiculaires à ce plan; donc, d'après la directe, elles sont parallèles entre elles.

COROLLAIRE II. — *Si deux plans qui se coupent, contiennent respectivement deux droites* A *et* B *parallèles entre elles, l'intersection commune* C *des deux plans est parallèle aux deux droites.*

Concevons, en effet, un plan M perpendiculaire aux droites A, B; les plans donnés sont aussi perpendiculaires au plan M (nº **309**); donc leur intersection commune C est perpendiculaire à ce même plan (nº **312**); ainsi, les trois droites A, B, C, perpendiculaires au même plan, sont parallèles entre elles, d'après le théorème principal.

THÉORÈME II. (*Fig.* 259.) FIG. 259.

Nº **314**. — *Par un point* C *donné hors d'un plan* MN, *on peut mener une infinité de droites parallèles à ce plan* (nº **292**).

Traçons à volonté, dans le plan MN, une droite AB, et faisons passer par le point C et la droite AB un autre plan; puis du point C, dans ce nouveau plan, menons CD parallèle à AB: — la droite CD sera parallèle au plan MN; car s'il en était autrement, elle ne pourrait le rencontrer qu'en un point de AB, ce qui est *absurde*, puisque, par construction, CD est parallèle à AB.

N. B. — L'ensemble de toutes les droites qu'on peut mener ainsi par le point C parallèlement au plan MN, constitue évidemment un *plan parallèle* au premier (nº **292**).

COROLLAIRE. — *Toute droite* CD *parallèle à une autre droite* AB *située dans un plan, est parallèle à ce plan.*

Cette proposition résulte de la démonstration qui vient d'être exposée.

Fig. 259. THÉORÈME III. (*Fig.* 259.)

N° **315**. — *Lorsqu'une droite* CD *est parallèle à un plan* MN, *tout autre plan conduit par la droite et rencontrant le premier, coupe celui-ci suivant une seconde droite* AB *parallèle à la première* CD.

Car, si AB, CD, n'étaient pas parallèles, comme elles sont dans un même plan, elles se rencontreraient; donc aussi CD rencontrerait le plan MN; ce qui est contre l'hypothèse.

N. B. — Tous les plans [en nombre infini] qui rencontrent le plan MN en passant par CD, coupent ce plan suivant une série de droites parallèles à CD, et par conséquent parallèles entre elles (n° **313**, *corol.* 1).

COROLLAIRE I. — *Lorsqu'une droite* CD *est parallèle à un plan* MN, *toute autre droite menée parallèlement à la première par un point quelconque* A *du plan, se trouve tout entière dans celui-ci.*

Supposons, en effet, qu'elle n'y fût pas, et qu'elle eût, par exemple, une direction telle que AK; — comme l'intersection du plan DCA avec le plan MN est une droite AB parallèle à CD, il s'ensuivrait que du point A l'on pourrait mener deux parallèles à une même droite, ce qui est *absurde* (n° **291**).

Fig. 260. COROLLAIRE II. — *Lorsqu'une droite* CD (*fig.* 260) *est à la fois parallèle à un plan* PQ, *et perpendiculaire à un autre* MN, *les deux plans sont perpendiculaires entre eux.*

En effet, on peut toujours conduire par CD un nouveau plan qui rencontre PQ suivant une certaine droite AB, laquelle est parallèle à CD d'après ce qui vient d'être dit, et par conséquent perpendiculaire au plan MN (n° **313**, *récipr.*); donc aussi le plan PQ est perpendiculaire au plan MN (n° **309**).

Fig. 261. THÉORÈME IV. (*Fig.* 261.)

N° **316**. — *Une droite* CD, *parallèle à un plan* MN, *est partout également distante de ce plan.*

De deux points E et F pris à volonté sur CD, abaissons des perpendiculaires sur le plan MN; ces droites EK, FG, sont parallèles (n° **313**), et dans un même plan (n° **310**), lequel coupe le plan MN

suivant une droite KG parallèle à EF ou CD; la figure EKGF est donc un rectangle, et donne EK = FG; *donc*, etc.

SCOLIE. — La droite EK, qui est en même temps perpendiculaire à la droite CD et au plan MN, mesure la *vraie* distance de la droite au plan; car toute autre droite non parallèle à EK, serait oblique au plan, et par conséquent *plus longue* que EK (nº 303).

Des plans parallèles.

LEMME.

Nº 317. — *Par un point donné* A *hors d'un plan* MN (*fig.* 262), *on peut toujours mener un plan parallèle au premier.* FIG. 262.

Abaissons du point A la droite AB perpendiculaire au plan MN; puis par le même point A, concevons (nº 299, *corol.* I) un autre plan PQ perpendiculaire à AB: les deux plans MN et PQ seront parallèles; car s'ils ne l'étaient pas, ils se rencontreraient en un certain point O. En joignant ce point aux points A et B, on formerait un triangle AOB dans lequel les deux angles en A et en B seraient droits (nº 299), ce qui est *absurde;* donc les deux plans ne peuvent se rencontrer.

THÉORÈME V. (*Fig.* 263.) FIG. 263.

Nº 318. — *Les intersections* EF, GK, *de deux plans parallèles* MN, PQ, *par un troisième* GF, *sont parallèles.*

Car si EF, GK, n'étaient pas parallèles, comme ces droites sont situées dans un même plan, elles se rencontreraient; et puisqu'elles appartiennent aux plans MN, PQ, ceux-ci se rencontreraient également, ce qui serait contre l'hypothèse.

COROLLAIRE. — *Lorsque deux plans sont parallèles, si par un point de l'un d'eux on mène une droite parallèle à l'autre, cette droite est tout entière dans le premier plan.*

THÉORÈME VI. (*Fig.* 262.) FIG. 262.

Nº 319. — *Lorsque deux plans* MN, PQ, *sont parallèles, toute droite* AB *perpendiculaire à l'un d'eux* [MN par exemple], *est perpendiculaire à l'autre* PQ.

Par la droite AB conduisons un plan quelconque dont les intersections avec MN, PQ, seront deux droites BD, AC, parallèles entre elles (n° 318). — Cela posé, AB étant perpendiculaire au plan MN, l'est aussi à BD (n° 299); d'ailleurs AC est parallèle à BC; donc AB est en même temps perpendiculaire à AC. — Comme le plan passant par AB a été mené arbitrairement, il s'ensuit que AB est perpendiculaire à toute droite située dans le plan PQ et passant par le point A; donc elle est perpendiculaire au plan PQ.

N. B. — On dit en conséquence que : — *Deux plans parallèles* MN, PQ, *ont leurs droites perpendiculaires communes.*

Corollaire. — *Par un point donné hors d'un plan* MN, *on ne peut mener qu'un seul plan parallèle au premier;* — en effet, par le point A l'on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire à la droite AB (n° 299, *corol.* I).

Fig. 262. Théorème VII. (*Fig.* 262.)

N° 320. — *Deux plans parallèles* MN, PQ, *sont partout également distants.*

De deux points quelconques A et C du plan PQ, abaissons AB, CD, perpendiculaires à MN; ces deux droites sont parallèles (n° 313), et déterminent un plan dont les intersections BD, AC, avec MN et PQ, sont parallèles (n° 318). La figure ABDC est donc un rectangle dans lequel on a AB = CD; *C. Q. F. D.*

Scolie I. — La perpendiculaire, AB, commune aux deux plans, mesure leur *vraie distance;* car toute autre droite, non parallèle à AB, serait oblique à chacun des plans MN, PQ, et serait, par conséquent, *plus longue* que AB (n° 303).

Scolie II. — *Les parties de parallèles comprises entre* des *plans parallèles sont égales.*

Il suffit de supposer que AB, CD, au lieu d'être perpendiculaires au plan MN, sont deux droites parallèles quelconques menées entre les deux plans.

THÉORÈME VIII. (*Fig.* 264.) FIG. 264.

N° 321. — *Les portions de deux droites quelconques,* AB, CD, *comprises entre trois plans parallèles,* MN, PQ, RS, *sont en proportion.*

Soient A, B, E, les points où la première droite perce les plans MN, PQ, et le plan intermédiaire RS, puis, C, D, F, les points où la seconde droite perce les mêmes plans. Joignons le point A au point D, et soit O le point d'intersection de la droite AD avec le plan RS. — Enfin, tirons les droites BD, EO, AC, OF.

Cela posé, les droites AB, AD, qui ont le point A commun, sont dans un même plan (n° 290) dont les intersections BD, EO, avec les plans MN, RS, sont parallèles (n° 318). On a donc (n° 183) la proportion

AE : EB :: AO : OD.

Par la même raison, les droites AC, OF, sont parallèles, et donnent

AO : OD :: CF : FD;

d'où, à cause du rapport commun, on tire

AE : EB :: CF : FD;

C. Q. F. D.

N. B. — Il pourrait arriver que les deux droites AB, CD, fussent dans un même plan; auquel cas les trois points seraient (n° 318) sur une même droite parallèle à BD et AC; et la proposition rentrerait dans celle du n° 183, ou dans le *scolie* II du n° 320.

THÉORÈME IX. (*Fig.* 265.) FIG. 265.

N° 322. — *Lorsque deux angles* BAC, B'A'C' [non situés dans le même plan], *ont les côtés parallèles chacun à chacun, ils sont égaux ou supplémentaires;* — et de plus, — *les plans de ces deux angles sont parallèles.*

Il peut se présenter plusieurs cas, les mêmes que si les angles étaient dans le même plan (n° 82).

En supposant d'abord les côtés AB et A'B', AC et A'C', diriges chacun à chacun dans le même sens, prenons sur AB, A'B',

$$AD = A'D',$$

et sur AC, A'C',

$$AE = A'E';$$

puis tirons AA', DD', EE'. — Les deux quadrilatères AA'D'D, AA'E'E, sont des parallélogrammes (n° 74); donc les droites DD', EE', sont égales et parallèles entre elles comme étant respectivement égales et parallèles à AA' (n° 313, *corol.* I). Maintenant, menons DE, D'E' : le quadrilatère DEE'D' sera aussi un parallélogramme; donc les droites DE, D'E', sont égales et parallèles. Donc les deux triangles ADE, A'D'E', sont égaux (n° 65, *troisième cas*); donc les angles DAE, D'A'E', ou BAC, B'A'C', sont aussi égaux.

Pour les autres cas, la démonstration s'achève comme dans le n° 82.

Il reste à prouver que les plans des deux angles sont parallèles. — Or supposons, pour le moment, qu'il n'en soit pas ainsi; et concevons par le point A un plan parallèle au plan B'A'C' : ce plan couperait nécessairement l'une des deux droites DD' ou EE', en un point différent du point D ou du point E. Soit donc G, par exemple, le point d'intersection du plan B'A'C' avec la droite DD'. — On aurait alors GD' = AA' (n° 320, *scol.* I); mais on a aussi DD' = AA', d'après ce qui a été dit plus haut; donc, il en résulterait GD' = DD', ou la *partie égale au tout*, ce qui est *absurde*: donc, etc.

SCOLIE. — *Si trois droites* AA', DD', EE' [dans l'espace], *sont égales et parallèles, les droites qui joignent leurs extrémités correspondantes forment des triangles égaux et parallèles* [c'est-à-dire dont les côtés sont chacun à chacun, égaux et parallèles].

Plus généralement, — *Si des sommets d'un polygone on mène* [dans l'espace] *des droites égales et parallèles* [et dirigées dans le même sens], *leurs extrémités opposées seront* les *sommets d'un polygone égal et parallèle au premier.* (*Voyez* le scolie du n° 165.

THÉORÈME X. (*Fig.* 266.) FIG. 266.

Nº 323. — *Deux droites quelconques* AB, CD, *sont toujours dans un même plan, ou dans des plans parallèles.*

En effet, si elles ne sont pas dans un même plan, par un point quelconque I de la première, menons IK parallèle à la seconde, et par un point G de la seconde, menons GE parallèle à la première : les deux angles KIB, DGE, seront situés dans des plans parallèles, d'après le théorème précédent; ainsi la proposition est démontrée.

SCOLIE I. — Ce système de deux plans parallèles, MN, PQ, dont l'un contient la première droite, et l'autre la seconde, est *unique*. — Car, tout plan passant par AB et parallèle à CD, doit contenir la droite IK (nº 318, *corol.* I) : donc il ne peut être que le plan KIB; par la même raison, le plan passant par CD et parallèle à AB, ne peut être que DGE.

Pour désigner ces plans dont le système est unique pour chaque système de deux droites non situées dans un même plan, nous les nommerons *les plans parallèles* de ces droites.

N. B. — Ces deux plans se confondent lorsque les droites sont dans un même plan.

SCOLIE II. — Il résulte d'ailleurs de la démonstration exposée plus haut que, deux droites n'étant pas dans un même plan, on peut toujours par chacune d'elles faire passer un plan parallèle à l'autre; et ce plan est *unique*.

SCOLIE III. — Toutes les fois que deux droites ont *une perpendiculaire commune* [et le *scolie* II du nº 300 en offre un exemple], cette droite *est perpendiculaire aux plans parallèles des deux droites, et mesure la plus courte distance des deux droites.*

Admettons, pour un instant, que la droite IL (*fig.* 266) soit perpendiculaire à la fois aux deux droites AB, CD : — Menons par le point I la droite IK parallèle à CD : cette parallèle se trouvera tout entière dans le plan MN (nº 318, *corol.*). Or, IL étant, par hypothèse, perpendiculaire à CD, est aussi perpendiculaire FIG. 266.

à sa parallèle IK; donc IL, perpendiculaire aux deux droites AB, IK, qui passent par son pied dans le plan MN, est perpendiculaire à ce plan (n° 299), ainsi qu'au plan PQ parallèle au premier.

La perpendiculaire IK commune aux deux plans MN, PQ, mesurant leur plus courte distance (n° 320), est aussi la plus courte distance des deux droites AB, CD.

Fig. 267. THÉORÈME XI. (*Fig*. 267.)

N° 324. — *Entre deux droites* AB, CD, *non situées dans un même plan*, — 1° — *il existe toujours une perpendiculaire commune*; — 2° — *il n'en existe qu'une*.

Le système des deux plans parallèles MN, PQ, étant supposé construit, menons par AB un plan ABEF perpendiculaire au plan PQ : — l'intersection EF de ces deux derniers plans, étant parallèle à AB (n° 315), ne saurait l'être en même temps à CD : autrement, CD, AB, seraient aussi parallèles (n° 313, *corol*. I), ce qui serait contre l'hypothèse; donc la droite EF, et par conséquent le plan ABEF, coupe CD en un certain point L. — De même, si par CD nous conduisons un plan CDGK perpendiculaire au plan MN, il coupera AB en un certain point I. Ces deux plans ABEF, CDGK, passant l'un par AB et par le point L, l'autre par CD et par le point I, se coupent nécessairement suivant la droite IL; et cette droite est à la fois perpendiculaire aux deux plans MN, PQ. (n° 312), ainsi qu'aux deux droites AB, CD (n° 298).

Donc la première partie de la proposition est démontrée.

Maintenant, toute perpendiculaire commune aux deux droites, devant passer par un point de CD et être perpendiculaire au plan MN (n° 323, *scol*. III), doit être contenue dans le plan perpendiculaire CDGK; par la même raison, elle doit être contenue dans le plan ABEF. Donc elle ne peut être que l'intersection commune de ces deux plans. — Donc enfin, les droites ont une seule perpendiculaire commune.

N. B. — Cette perpendiculaire se nomme LA PLUS COURTE DISTANCE des deux droites (n° 323, *scol*. III).

Fig. 266. *Autre moyen de démonstration*. — Soient AB, CD (*fig*. 266), les

deux droites données. — D'un point quelconque F de la droite AB, menons FH parallèle à CD; puis, par AB et FH, conduisons un plan MN, lequel est parallèle à la droite CD (n° 314, *corol.*). — Maintenant, d'un point G de CD, abaissons GK perpendiculaire au plan MN : l'intersection du nouveau plan CGKI avec MN, étant une droite KI parallèle à CD (n° 318), rencontrera AB en un certain point I; et si de ce point nous menons, dans le plan CGKI, la droite IL parallèle à KG, nous obtiendrons la droite demandée.

En effet, IL étant parallèle à KG, est perpendiculaire au plan MN (n° 313, *récip.*); donc elle est perpendiculaire aux deux droites AB, IK (n° 298), et aussi à la droite CD (n° 313); donc enfin, elle est perpendiculaire commune aux deux droites.

C'est d'ailleurs la seule droite qui puisse posséder cette propriété; car toute perpendiculaire commune, devant être perpendiculaire au plan MN, et passer par un point de CD, doit se trouver dans le plan CGKI (n° 311, *corol.*); or la droite IL est évidemment la seule droite comprise entre AB et CD, qui puisse être en même temps perpendiculaire au plan MN; *donc*, etc.

N. B. — Cette démonstration peut, au premier abord, paraître moins simple que la première; mais elle a sur celle-ci l'avantage de n'exiger que la construction de l'un des plans parallèles des deux droites. — Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre des problèmes.

THÉORÈME XII. (*Fig.* 268.) FIG. 268.

N° 323. — *Deux plans respectivement perpendiculaires à deux droites non parallèles, se rencontrent toujours.*

Soient AB, CD, deux droites qui se rencontrent, ou qui, sans être parallèles, ne se rencontrent pas. Soient de plus MN, MP, deux plans respectivement perpendiculaires à ces droites.

D'abord, ces plans ne peuvent se confondre en un seul, car pour que cela fût, il faudrait que AB, CD, étant alors perpendiculaires à un même plan, fussent parallèles (n° 313), ce qui est contre l'hypothèse. — En second lieu, les deux plans ne sau-

raient être parallèles, puisqu'il en résulterait encore (n° 319) que les droites AB, CD, seraient parallèles. — Donc les deux plans se coupent suivant une certaine droite MR. — (*Voyez* le n° 50.)

SCOLIE I. — Lorsque les deux droites se coupent en un certain point O, les plans MN, MP, rencontrent le plan BOD suivant deux droites IG, GK, respectivement perpendiculaires à l'intersection commune MR; et l'angle IGK formé par ces droites [lequel mesure l'angle des deux plans MN, MP (n° 308)], est supplémentaire de l'angle des deux droites données (n° 70). — L'angle KGI', supplémentaire de IGK, est égal à l'angle de ces mêmes droites.

D'où l'on peut conclure que — *L'angle de deux plans respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent dans l'espace, est égal à l'angle de ces droites* ou *en est le supplément*, suivant que ces *angles* sont *de même espèce* ou *d'espèce différente*.

Lorsque les deux droites sont dans des plans différents, on nomme *angle des deux droites*, celui que forme l'une d'elles avec une droite parallèle à l'autre, menée par un point quelconque de la première [plus généralement, c'est l'angle de deux droites menées par un point quelconque de l'espace, parallèlement aux premières]; et la proposition subsiste encore dans ce cas.

SCOLIE II. — A proprement parler, l'angle de deux droites qui se *croisent* dans l'espace sans se rencontrer, est l'*angle dièdre* que forment entre eux les plans perpendiculaires aux plans parallèles des deux droites, qui contiennent celles-ci respectivement.

FIG. 267. Ainsi, dans la *figure* 267, l'angle des deux droites AB, CD, est l'angle dièdre ELIG, qui, en effet, a pour mesure (n° 308) l'angle BIG, c'est-à-dire l'angle que forme AB avec la droite KG menée par le point B, parallèlement à CD. — Telle est du moins l'idée la plus nette qu'on puisse se former de l'angle de deux droites non situées dans un même plan.

Lorsque l'angle dièdre ELIG est *droit*, les droites données
FIG. 251. sont dites perpendiculaires entre elles. — La *figure* 251 en offre un exemple : les droites AP, BC, sont à *angle droit;* ce qui veut

dire que la seconde est située dans un plan perpendiculaire à la première.

N° 326. — Scolie III. — *Angle d'une droite et d'un plan.*

Soit AB (*fig.* 269) une droite oblique à un plan MN. — D'un point quelconque B de cette droite, abaissons BB' perpendiculaire sur ce plan; et tirons la droite AB' : [cette droite est dite *la projection* de AB sur le plan MN]. Fig. 269.

Le plan BAB' étant (n° 311, *scol.*) le lieu de toutes les perpendiculaires abaissées des différents points de la droite AB sur le plan MN, il en résulte que la droite AB' est elle-même *le lieu* des pieds de toutes ces perpendiculaires.

Cela posé, on nomme *angle d'une droite et d'un plan*, l'angle que forme la droite avec sa projection sur le plan.

La raison de cette dénomination est que l'angle BAB' est le minimum de tous ceux que la droite AB forme avec les différentes droites menées par son pied dans ce plan.

En effet, menons par le point A, dans le plan MN, une tout autre droite AL, et prenons sur cette droite AG = AB', puis tirons BG : les deux triangles ABB', ABG, ont deux côtés égaux chacun à chacun [AB commun et AB' = AG]; le troisième côté BB' du premier est moindre que le troisième côté BG du second; donc (n° 64) l'angle BAB' est moindre que l'angle BAG.

Considérons maintenant dans le plan MN, et de deux côtés différents par rapport au plan BAB', deux droites quelconques AL, AL', puis un cercle décrit du point A comme centre avec un rayon quelconque : on démontrerait comme ci-dessus que les angles BAL, BAL', ne peuvent être égaux qu'autant que l'on a

$$arc\,B'G' = arc\,B'G.$$

D'où l'on déduit cette conséquence importante :

Une droite ne peut former des angles égaux avec trois droites situées dans un même plan, à moins d'être perpendiculaire à ce plan et par conséquent *à chacune des trois droites.*

Remarque générale sur les deux paragraphes précédents.

N° 327. — Les propositions qui ont fait l'objet de ces para-

graphes peuvent être regardées comme fondamentales dans la géométrie de l'espace. En réduisant le plus possible le nombre des propositions principales, et rattachant à chacun d'eux, soit des corollaires, soit des scolies, nous avons cherché à rendre plus facile à saisir l'enchaînement des diverses propositions; car on ne saurait se dissimuler que les difficultés qui se rencontrent dans la théorie des plans consistent moins dans les démonstrations même, que dans l'enchaînement dont nous venons de parler.

C'est surtout dans cette théorie, que, guidés par des analogies apparentes avec certaines propositions de la géométrie plane, les élèves peuvent être conduits à énoncer des propositions fausses; ces erreurs proviennent en grande partie de ce que l'indétermination est nécessairement plus fréquente quand les objets sur lesquels on raisonne peuvent être situés d'une manière quelconque dans l'espace, que lorsqu'ils sont assujettis à la condition d'être compris dans un même plan.

C'est encore pour cela que le nombre des réciproques est fort restreint dans la théorie des plans, ainsi qu'on a pu le remarquer.

N° 328. — Nous terminerons ces deux paragraphes par les énoncés de quelques théorèmes dont les démonstrations sont faciles à déduire de ce qui précède.

Théorème I. — *Deux droites parallèles sont également inclinées sur un plan quelconque.* — [La réciproque est *fausse*.]

Théorème II. — *Deux plans parallèles sont également inclinés sur une droite quelconque.* — [La réciproque est *fausse*.]

Théorème III. — *Lorsqu'une droite et un plan se rencontrent, toute droite perpendiculaire au plan, et tout plan perpendiculaire à la droite, se rencontrent aussi.* — [Réciproque évidente.]

Théorème IV. — *Deux plans parallèles coupés par un troisième forment avec celui-ci des angles dièdres alternes-internes, correspondants,* etc... *égaux entre eux.* — [*Voyez* le n° 43.] [La réciproque est *fausse*.]

THÉORÈME V. — *Si d'un point pris, soit dans l'intérieur,* soit *au dehors d'un angle dièdre, on abaisse une perpendiculaire sur chacune des faces, l'angle dièdre et l'angle formé par les deux perpendiculaires sont égaux* ou *supplémentaires.*

THÉORÈME VI. — *Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu de tous les points également distants des deux faces.*

THÉORÈME VII. — *Le plan mené par la bissectrice d'un angle plan perpendiculairement au plan de cet angle, est le lieu de tous les points également distants des deux côtés de cet angle.*

Ces dernières propositions se ramènent facilement à leurs analogues de la *Géométrie plane.*

§ III. — *Des angles polyèdres.*

N° 329. — *Observations préliminaires.* — Il ne sera question, dans tout ce qui va suivre, que des angles polyèdres *convexes,* dont les caractères ont été énumérés au n° 293.

Une autre propriété dont jouit essentiellement un angle polyèdre convexe, consiste en ce que l'on peut toujours concevoir par son sommet S (*fig.* 270), un certain plan PQ, *d'un même côté* duquel se trouvent situées toutes les faces ; — d'où il résulte que si, par un point quelconque de l'une des arêtes, on mène un plan, MN, parallèle au premier PQ, ce nouveau plan coupera nécessairement toutes les autres arêtes (n° 318, *corol.* I), et déterminera par ses intersections avec les faces un certain polygone ABCDEF. — A la vérité, cette propriété appartient également à certains polyèdres *concaves,* comme on le voit dans la *figure* 271; mais ce qui distingue alors l'angle polyèdre convexe de l'angle polyèdre concave, c'est que le polygone obtenu dans le premier cas est lui-même un *polygone convexe* (n° 36), tandis que le second donne lieu à un polygone ayant un ou plusieurs angles rentrants ; d'où il suit que, dans les angles polyèdres concaves, une même droite peut rencontrer la surface latérale en plus de deux points O, O', O'', O''',....

FIG. 270.

FIG. 271.

Nous admettrons donc dorénavant que — *Tout angle polyèdre*

convexe peut être coupé par un certain plan dont les intersections avec les faces déterminent un polygone convexe.

L'angle *trièdre* est, d'après cette propriété, un angle polyèdre *convexe ;* et, conformément à la marche que nous avons suivie dans la Géométrie plane (3e paragr., chap. 1, liv. I), nous commencerons l'étude des angles polyèdres convexes par celle des angles trièdres.

Fig. 272.

THÉORÈME I. (*Fig.* 272.)

N° 330. — *Si d'un point quelconque* [*s*] *pris dans l'intérieur d'un angle trièdre* SABC, *on abaisse des perpendiculaires sur ses faces* [*sa* sur SBC, *sb* sur SAC, *sc* sur SAB], *il en résultera un nouvel angle trièdre* [*sabc*] *dont les faces seront les suppléments respectifs des angles dièdres du premier ;* — et réciproquement — *les faces du premier seront les suppléments respectifs des angles dièdres du second.*

Observons d'abord que le plan mené par les deux arêtes *sc*, *sb*, est perpendiculaire à chacune des faces SAB, SAC (n° 309), et par conséquent perpendiculaire à leur intersection commune SA (n° 312) ; donc il coupe ces faces suivant deux droites A*c*, A*b*, perpendiculaires à l'arête SA (n° 298). Pareillement, le plan *sac* coupe SAB, SBC, suivant B*c*, B*a*, perpendiculaires à l'arête SB, et le plan *sab* coupe SAC, SBC, suivant C*b*, C*a*, perpendiculaires à l'arête SC. — Maintenant, de ce que SA est perpendiculaire à A*b*, A*c*, il s'ensuit que SA est aussi perpendiculaire à la face *sbc* du second angle trièdre ; et par la même raison, SB, SC, sont respectivement perpendiculaires aux faces *sac*, *sab*.

D'où l'on doit conclure que l'angle trièdre SABC est par rapport à l'angle trièdre *sabc* dans la même condition que celui-ci par rapport au premier.

Cela posé, si nous considérons le quadrilatère SA*c*B, nous voyons que les deux angles en S et en *c* sont supplémentaires. [*Voyez* d'ailleurs le scolie I du n° 325.] Or, l'angle A*c*B mesure l'angle dièdre suivant *sc* (n° 308) ; donc déjà, la face ASB est le supplément de l'angle dièdre suivant *sc*. — On prouverait de la

même manière que les faces ASC, BSC, sont les suppléments respectifs des angles dièdres suivant *sb*, *sa*.

Donc aussi, d'après la remarque ci-dessus, les faces *asb*, *asc*, *bsc*, sont les suppléments respectifs des angles dièdres suivant SC, SB, SA.

N. B. — Chaque face du premier angle trièdre est le supplément de l'angle dièdre opposé dans le second; et *vice versâ*.

En raison de cette propriété réciproque, les deux angles trièdres S et *s* sont dits SUPPLÉMENTAIRES l'un par rapport à l'autre.

SCOLIE. — La démonstration précédente suppose que les pieds *c*, *b*, *a*, des perpendiculaires abaissées du point *s* sur les faces de l'angle trièdre S, sont *intérieurs* à ces faces, ce qui n'a pas toujours lieu quand on prend le point *s* tout à fait arbitrairement dans l'angle S. — Mais on peut toujours en choisir un qui remplisse cette condition : il suffit, par exemple, de prendre un point quelconque de l'intersection des plans bissecteurs de deux angles dièdres suivant SA, SB (n° 328, *théor.* VI). [*Voyez* le n° 70.]

Ce théorème doit d'ailleurs être considéré comme fondamental dans la théorie des angles trièdres.

THÉORÈME II. (*Fig.* 273.) FIG. 273.

N° 331. — *Dans tout angle trièdre* S, *une face quelconque est* 1° — *plus petite que la somme des deux autres*, — et 2° — *plus grande que leur différence.*

1° — Il n'y a lieu à démontrer la première partie de la proposition, que pour la plus grande des trois faces. — Soit donc ASB la plus grande des trois faces.

Menons une droite AB qui coupe SA, SB, en deux points A, B; puis, par le point S, et dans le plan ASB, tirons SC′ qui fasse un angle BSC′ égal à l'angle BSC, et qui coupe AB en un point C′. Prenons sur l'arête SC une longueur SC égale à SC′; enfin, tirons CA, CB.

D'après cette construction, les triangles BSC, BSC′, sont égaux (n° 63, *deuxième cas*); donc BC = BC′. Or, dans le triangle ABC,

on a $AB < AC + CB$, ou $AC' + C'B < AC + CB$;

donc, à cause de $C'B = CB$, $AC' < AC$,

et par conséquent (nº 64) $ASC' < ASC$.

Ajoutant respectivement aux deux membres de cette inégalité les angles égaux BSC', BSC, on obtient

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + BSC.$$

2° — En supposant en outre, $ASC > BSC$,

comme on a $ASB + BSC > ASC$,

il en résulte $ASB > ASC - BSC$;

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Si trois angles* ASB, ASC, BSC, *ayant un sommet commun* S, *sont tels que l'un d'entre eux soit égal à la somme des deux autres, les plans de ces trois angles doivent se confondre;* — car autrement, les côtés SA, SB, SC, formeraient un angle trièdre; et le plus grand des trois angles serait moindre que la somme des deux autres; ce qui serait contre l'hypothèse (*).

(*) C'est ici le lieu de démontrer que l'*angle plan correspondant à un angle dièdre*, tel qu'il a été défini au nº 306, est le seul qui puisse mesurer cet angle dièdre.

En effet, il faut d'abord que les côtés de l'angle plan propre à servir de mesure soient également inclinés sur l'arête, puisqu'il doit devenir nul en même temps que l'angle dièdre.

Fig. 255. Soient donc BM', BN', BP (*fig.* 255), trois droites tracées par un même point B de l'arête AB, dans les faces MAB, NAB, PAB. — Pour que l'on ait constamment $MABP : NABP :: M'BP : N'BP$,

il faut que les angles ABM', ABN', ABP, soient égaux.

Ensuite, puisque l'on a entre les trois angles dièdres la relation

$$MABP = MABN + NABP,$$

il faut encore que les angles rectilignes M'BP, M'BN', N'BP, soient liés entre eux par la relation $M'BP = M'BN' + N'BP$;

COROLLAIRE II. — Si *par le sommet* S (*fig.* 274) *d'un angle trièdre quelconque* SABC, *on mène une droite* SO *dans l'intérieur, et par cette droite, deux plans aboutissant aux deux arêtes* SA, SB, *d'une même face* ASB, *la somme des deux angles plans* ASD, BSD, *qui en résulteront, sera moindre que la somme des deux autres faces* ASC, BSC, *de l'angle trièdre.* FIG. 274.

[Pour faire mieux concevoir la figure, on a coupé l'angle trièdre par un plan quelconque qui détermine dans les faces que l'on a à considérer, les droites AC, CB, AB, et les droites AD, DB; — mais la construction de ce plan n'est pas indispensable pour la démonstration].

Prolongeons le plan ASD, par exemple, jusqu'à la rencontre de la face ASB, suivant une droite SE; on aura, en vertu du théorème précédent,

1° — Dans l'angle trièdre SACE, $\quad ASE < ASC + CSE$,

2° — Dans l'angle trièdre SDEB, $\quad DSB < DSE + ESB$;

d'où, en ajoutant ces inégalités membre à membre,

$$ASE + DSB < ASC + CSE + DSE + ESB,$$

c'est-à-dire $\quad ASD + DSE + DSB < ASC + DSE + CSB$;

ou bien enfin, en retranchant DSE des deux membres,

$$ASD + DSB < ASC + CSB;$$

C. Q. F. D.

SCOLIE. — Ce corollaire et le théorème qui y a conduit, correspondent à la troisième et à la première proposition du n° 38; et les deux modes de démonstration sont tout à fait analogues. — La deuxième proposition du même numéro a également sa corres-

---

ce qui exige, d'après le corollaire qui vient d'être démontré, que les trois droites BM', BN', BP, soient dans un même plan.

Enfin, ces trois droites devant être dans un même plan, et également inclinées sur l'arête AB, celle-ci est nécessairement perpendiculaire aux trois droites BM', BN', BP (n° 326); *C. Q. F. D.*

pondante dans les angles trièdres; mais nous nous bornerons à
Fig. 275. l'énoncer d'après la *figure*. — La *fig*. 275 représente deux angles trièdres SABC, SADE, opposés par l'arête SA; et il s'agirait de prouver que

1° $$BSC + DSE < DSC + ESB,$$

2° $$ESC + DSB < DSC + ESB;$$

ce qui est facile d'après le théorème précédent, si l'on considère alternativement les angles trièdres

SABC, SADE, puis SABD, SACE.

Fig. 276. THÉORÈME III. (*Fig*. 276.)

N° 332. — *Dans tout angle trièdre* S, *la somme des trois faces est moindre que* 4 *angles* DROITS.

Coupons l'angle trièdre par un plan ABC (n° 329); et après avoir pris un point quelconque O intérieur au triangle ABC, tirons les droites OA, OB, OC; nous formerons ainsi trois triangles ayant respectivement pour bases AB, AC, BC, et pour sommet commun le point S; puis, trois autres triangles ayant les mêmes bases et pour sommet commun le point O. — Cela posé, l'angle CAB, formé de la somme des angles OAC, OAB, est moindre que la somme des angles SAC, SAB (n° 331); de même,

$$ACB < ACS + SCB, \quad \text{et} \quad ABC < ABS + SBC;$$

d'où l'on voit que la somme des angles à la base, des triangles qui ont leur sommet au point O, est moindre que la somme des angles à la base, des triangles qui ont leur sommet en S. Or, la somme des angles des trois triangles de chaque système est la même (n° 83); donc la somme des angles en S est moindre que la somme des angles en O; et puisque celle-ci vaut 4 *droits* (n° 31), il s'ensuit que la première est moindre que 4 *droits;*

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est plus grande que* 2 DROITS *et plus petite que* 6 DROITS.

En effet, la somme des angles dièdres de l'angle trièdre proposé, augmentée de la somme des faces de son angle trièdre supplémentaire, forme 6 *droits* (nº 330). Or, la première somme partielle est comprise entre *zéro* et 4 *droits*; donc la seconde est moindre que 6 *droits* et plus grande que 2.

Scolie I. — Il est facile de concevoir que les faces d'un angle trièdre puissent être *trois angles aigus à la fois* [aussi petits ou aussi grands que l'on veut], ou bien, *deux angles aigus* et *un obtus*, ou *un angle aigu* et *deux obtus*, ou bien encore, *trois angles obtus*; elles peuvent aussi être *des angles droits*.

Donc la somme des trois angles dièdres peut elle-même passer par tous les états de grandeur, depuis 2 *droits* jusqu'à 6 *droits*.

Ainsi, un angle trièdre peut avoir *un* ou *deux* ou *trois* angles dièdres droits, *un* ou *deux* ou *trois* angles dièdres obtus.

Cela posé, un angle trièdre est dit *unirectangle* [ou simplement *rectangle*], *birectangle*, *trirectangle*, suivant qu'il a *un*, *deux* ou *trois* angles dièdres droits.

Lorsque les trois angles dièdres sont *droits*, les trois arêtes sont elles-mêmes perpendiculaires deux à deux (nº 308), et les trois faces sont des angles plans *droits*.

Si l'angle trièdre est *birectangle*, une seule des trois arêtes est perpendiculaire aux deux autres; et celles-ci font entre elles un angle qui mesure le troisième angle dièdre (nº 308).

Nº 333. — Scolie II. — On pourrait établir sur l'angle trièdre, des propositions analogues à plusieurs des théorèmes démontrés pour le triangle dans le *chapitre* I du premier *livre*, en exceptant toutefois celles qui sont fondées sur la propriété du nº 84, par la raison que dans l'angle trièdre, la somme des angles dièdres n'est pas constante, et qu'elle peut varier depuis 2 *droits* jusqu'à 6 *droits*.

Mais les propriétés du triangle isoscèle ont leurs correspondantes dans l'angle trièdre.

Ainsi, 1º — *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, les angles dièdres opposés sont égaux*; — d'où il résulte immédiatement que, — *si les trois faces sont égales, les trois angles dièdres sont égaux*;

2° — *Lorsque deux faces sont inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand angle dièdre;*

3° — *Réciproquement*, etc., etc. — (*Voyez* les nos 88 et suiv.)

Un angle *trièdre* [et, en général, un angle polyèdre] est dit *régulier*, lorsqu'il a toutes ses faces égales et tous ses angles dièdres égaux.

Quant aux angles trièdres qui ont *deux* faces égales, on peut, par analogie avec le triangle isoscèle, les nommer des angles trièdres *isoèdres;* — la troisième face, différente des deux autres, est dite alors la *base* de l'angle trièdre.

Nous nous bornerons ici à démontrer la première des propositions qui viennent d'être énoncées.

FIG. 277. Soit SABC (*fig.* 277) un angle trièdre dans lequel nous supposons ASC = BSC.

Tirons la bissectrice SD de la base ASB : le plan mené par SD, perpendiculairement à la face ASB, étant le lieu de tous les points également distants des côtés SA, SB (n° 328, *théor.* VII), contient nécessairement la droite SC, ainsi que la perpendiculaire DC élevée d'un point quelconque D de SD, au plan ASB (n° 311). Maintenant, si du même point D, nous abaissons DA, DB, perpendiculaires à SA, SB, et que nous joignions les points A et B au point C où DC rencontre SC, les droites CA, CB, seront (n° 300) respectivement perpendiculaires aux droites SA, SB; et les angles CAD, CBD, mesureront les angles dièdres suivant SA, SB.

Cela posé, les deux triangles CDA, CDB, sont égaux, puisque CD est commun, et que DA = DB; donc les angles CAD, CBD, sont égaux; et il en est de même des angles dièdres qui leur correspondent.

N. B. — Nous aurions pu simplifier la démonstration en abaissant directement d'un point C de l'arête SC une perpendiculaire sur le plan SAB; mais nous avons préféré employer un mode de démonstration qui fût plus en rapport avec celui du n° 43.

De l'égalité des angles trièdres.

N° 334. — Remarques préliminaires. — Lorsque deux angles trièdres sont superposables, on dit qu'ils sont *égaux;* et alors, ils ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun [*faces* et *angles*]. Or, deux angles trièdres peuvent encore avoir les trois faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées; auquel cas, ils sont dits des *angles trièdres symétriques*

Afin de mieux faire comprendre cette définition, considérons d'abord, en particulier, un angle trièdre SABC (*fig.* 278); Fig. 278.
et prolongeons chacune des arêtes SA, SB, SC, dans le sens opposé par rapport au point S : il en résulte un nouvel angle trièdre S*abc*, dont les faces et les angles sont évidemment les mêmes que les faces et les angles de SABC. Or, on voit facilement que ces deux angles trièdres ne sauraient coïncider; mais il est possible de donner au second, S*abc*, diverses autres positions par rapport au premier.

Imaginons, par exemple, que l'on fasse pivoter la face S*ab*, dans son plan, autour du point S, de manière que S*a* vienne prendre position sur SA, et S*b* sur SB. — Dans ce mouvement, comme l'arête S*c* est, par rapport à l'œil, en arrière du plan S*ab*, tandis que l'arête SC est en avant, la première prendra une position SC′, telle que l'angle dièdre C′SAB sera égal à l'angle dièdre *c*S*ab*, ou CSAB, que l'angle dièdre C′SBA sera égal à l'angle dièdre *c*S*ba*, ou CSBA, et que les faces ASC′, BSC′, seront respectivement égales aux faces *a*S*c*, *b*S*c*, ou ASC, BSC. On obtiendra donc ainsi deux angles trièdres SABC, SABC′, opposés par la face ASB, et ayant d'ailleurs tous leurs éléments égaux [faces et angles].

On peut imaginer maintenant que la face S*ab* fasse une demi-révolution autour de la bissectrice LL′ des angles AS*b*, *a*SB. — Dans ce mouvement, l'arête S*b* viendra s'appliquer sur l'arête SA, l'arête S*a* sur l'arête SB; et comme les deux faces *b*S*c*, *a*S*c*, se trouveront alors en avant de la face ASB, il s'ensuit que l'angle trièdre S*abc* prendra une position telle que SABC″.

Rien n'empêche de faire mouvoir ensuite celui-ci parallèlement à lui-même (n° 62), de manière qu'il prenne la nouvelle position

TDEF, dans laquelle les faces DTE, ETC, CTD, seront respectivement égales aux faces CSB, BSA, CSA, mais disposées dans un ordre *inverse* par rapport à celles-ci.

Les quatre angles trièdres S*abc*, SABC′, SABC″, TDEF n'en font, à proprement parler, qu'un seul, puisque les trois derniers ne sont autres que le premier S*abc* changé de position; — et comme *trois angles plans* ne peuvent évidemment être *assemblés* entre eux, pour former un angle trièdre, que de deux manières essentiellement différentes, la définition se trouve justifiée.

Mais on voit en même temps qu'il n'en est pas de deux angles trièdres *symétriques* comme de deux triangles symétriques, qui, par un *renversement*, peuvent toujours être superposés (n° 6, *App.*, *scol.* I).

N. B. — Deux angles trièdres symétriques *isoèdres* (n° 333) sont *égaux et superposables;* car, du moment où l'on a fait coïncider les deux *bases*, et que les deux angles trièdres sont d'ailleurs placés d'un même côté par rapport à cette face commune, les autres faces coïncident, à cause de l'égalité des angles dièdres adjacents.

Dans ce cas, les deux angles trièdres sont à la fois *symétriques* et *superposables*.

Maintenant, nous pouvons, comme pour les figures planes (n° 62), établir une espèce de *lemme* propre à faciliter l'étude des propriétés relatives à l'égalité [ou à la similitude] des figures de l'espace.

LEMME.

N° 338. — *Lorsque deux polyèdres ont les faces égales chacune à chacune* et *assemblées de la même manière, ainsi que les angles dièdres respectivement compris entre ces faces, on peut toujours les amener dans une position telle, que, s'appuyant par une de leurs faces égales, contre un même plan, et d'un même côté de ce plan, ils aient leurs faces parallèles chacune à chacune.*

En effet, on peut d'abord (n° 62) faire en sorte que les deux polygones égaux par lesquels ils reposent sur le plan aient leurs côtés parallèles deux à deux et dirigés dans le même sens; et après

ce mouvement, les deux polyèdres se trouveront situés d'un même côté du plan. Maintenant, à cause de l'égalité des angles dièdres respectifs, adjacents aux côtés de ces polygones, les autres faces de ces angles dièdres seront aussi parallèles et de même sens deux à deux; puis, les faces adjacentes à celles-là seront encore parallèles; — et ainsi de suite.

Ainsi que dans la première partie de cet ouvrage, nous renverrons au second *Appendice* la théorie des figures symétriques, et nous ne considérerons pour le moment que les polyèdres susceptibles d'être amenés à avoir leurs faces parallèles deux à deux. — On exprime cette position relative en disant que les faces sont *semblablement disposées* [ou mieux, *disposées de la même manière*]. Il ne sera d'ailleurs pas nécessaire, dans l'étude des propriétés, que les polyèdres soient effectivement amenés dans cette position relative; il suffira qu'*ils puissent y être amenés*.

Théorème V. (*Fig.* 279.)

Fig. 279.

N° 336. — *Deux angles trièdres* SABC, S'A'B'C', *sont égaux*,

1° — *Lorsqu'ils ont une face égale* [SAB = S'A'B'] *adjacente à les angles dièdres égaux chacun à chacun* [et disposés de la même manière];

2° — *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal* [BSAC = B'S'A'C'] *compris entre des faces égales chacune à chacune* [et disposées de la même manière];

3° — *Lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune* [et disposées de la même manière].

Premier cas. — Appliquons la face S'A'B' sur son égale SAB, de manière que les arêtes correspondantes SA, SA', se confondent, ainsi que SB, S'B'. Comme les angles dièdres suivant SA, S'A', sont égaux par hypothèse, la face S'A'C' se placera sur la face SAC. Par la même raison, S'B'C' se placera sur SBC; donc l'arête S'C', commune aux deux faces S'A'C', S'B'C', coïncidera avec l'arête SC commune aux deux faces SAC, SBC; et les deux angles trièdres coïncideront.

DEUXIÈME CAS. — Appliquons, comme ci-dessus, la face S'A'B' sur son égale SAB; — les angles dièdres suivant SA, S'A', étant égaux, la face S'A'C' se placera sur SAC; et puisque l'on a aussi ASC = A'S'C' par hypothèse, l'arête S'C' prendra la direction de SC, et les deux faces SBC, S'B'C' coïncideront; donc il en sera de même des deux angles trièdres.

TROISIÈME CAS. (*Voyez* d'abord le n° 63.) — L'égalité des deux angles trièdres serait démontrée si l'on pouvait établir que l'angle dièdre suivant S'A' par exemple, est égal à l'angle dièdre suivant SA, puisque alors la proposition rentrerait dans le second cas. Or, admettant, pour le moment, que l'on ait

$$\mathrm{BSAC} > \mathrm{B'S'A'C'},$$

plaçons, comme précédemment, la face S'A'B' sur son égale SAB: la face S'A'C' prendra une position *intérieure* à l'angle dièdre BSAC; dès lors, l'arête S'C' devra prendre une direction SD intérieure à l'angle trièdre SABC, ou se placer sur SBC suivant SI, ou bien prendre une direction SD' extérieure à la face SBC. Bornons-nous à examiner cette dernière hypothèse. — On aura, d'après cela,

$$\mathrm{B'S'C'} = \mathrm{BSC} = \mathrm{BSD'}.$$

Comme le plan ASD' coupe alors la face SBC suivant une certaine droite SI qui détermine deux angles trièdres SIAC, SIBD', opposés par l'arête SI, il en résulte (n° 351, *scol.*)

$$\mathrm{ASC} + \mathrm{BSD'} < \mathrm{BSC} + \mathrm{ASD'},$$

d'où, retranchant, d'une part, ASC, et de l'autre, son égale ASD',

$$\mathrm{BSD'} < \mathrm{BSC},$$

résultat contradictoire avec l'égalité SBC = BSD', obtenue plus haut.

Les deux autres hypothèses se traiteraient plus facilement.

Ainsi, il est absurde de supposer l'angle dièdre B'S'A'C' différent de BSAC; *donc*, etc., etc. (*).

Corollaire. — *Deux angles trièdres sont encore égaux lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun* [et disposés de la même manière].

En effet, si nous considérons les angles trièdres respectivement supplémentaires (n° 330) des angles donnés, leurs faces sont égales chacune à chacune, comme suppléments respectifs d'angles dièdres égaux chacun à chacun, par hypothèse; donc ces angles trièdres supplémentaires sont égaux, en vertu du troisième cas de la proposition précédente. Par suite, leurs angles dièdres sont égaux chacun à chacun, ainsi que les suppléments de ces angles dièdres, lesquels suppléments ne sont autres que les faces des angles trièdres proposés. Donc, etc., etc.

On remarquera que la même propriété des angles trièdres supplémentaires lie entre eux les deux premiers cas du théorème précédent.

Scolie I. — Nous pourrions établir deux autres cas d'égalité, qui seraient aussi liés entre eux par la propriété des angles trièdres supplémentaires. — Mais nous reviendrons sur ces deux nouveaux cas dans le troisième chapitre.

Ainsi, un angle trièdre est généralement déterminé par la connaissance de trois des six éléments qui le constituent [les *trois* faces et les *trois* angles dièdres compris]; ce qui donne six combinaisons différentes, liées deux à deux au moyen de l'angle trièdre supplémentaire.

Nous ajouterons que la condition d'égalité de deux angles trièdres étant satisfaite, il s'ensuit que les *faces égales* sont opposées à *des angles dièdres égaux;* et réciproquement. C'est une conséquence nécessaire de la possibilité d'opérer une superposition complète des deux angles trièdres.

(*) L'emploi d'un moyen de démonstration analogue à celui du n° 63 (3e cas) eût entraîné dans la considération de deux angles trièdres symétriques, inconvénient que nous avons voulu éviter.

Scolie II. — Enfin, la démonstration que nous avons exposée pour le troisième cas, et celle qui se rapporterait au quatrième [les angles dièdres égaux], donne lieu à deux autres théorèmes analogues à celui qui a fait l'objet du n° 64; en voici les énoncés :

1° — *Lorsque deux faces d'un angle trièdre sont égales, chacune à chacune, à deux faces d'un autre angle trièdre, si l'angle dièdre compris par les premières est plus grand que l'angle dièdre compris par les dernières, la troisième face du premier angle trièdre est plus grande que la troisième face du second;* — et réciproquement.

2° — *Lorsque deux angles dièdres d'un angle trièdre sont égaux, chacun à chacun, à deux angles dièdres d'un autre angle trièdre, si la face adjacente aux deux premiers angles dièdres est plus grande que la face adjacente aux deux derniers, le troisième angle dièdre du premier angle trièdre est plus grand que le troisième angle du second;* — et réciproquement.

Fig. 280.

Théorème VI. (*Fig.* 280.)

N° 337. — *Dans tout angle polyèdre convexe* SABCDEF, *la somme des faces est moindre que* 4 *angles* droits.

Coupons (n° 319) l'angle polyèdre par un plan quelconque [non parallèle aux arêtes]; nous obtenons ainsi un polygone ABCDEF, en dedans duquel nous pouvons prendre un point quelconque O que nous joignons par des droites aux différents sommets A, B, C, D, de ce polygone.

Cela posé, en considérant successivement les trois faces qui ont pour sommet commun le point A, puis les trois faces qui ont pour sommet commun le point B, et ainsi de suite, on prouvera, comme au n° 332, que la somme des angles à la base de tous les triangles qui ont leur sommet au point S, est plus grande que la somme des angles à la base des triangles qui ont leur sommet au point O; d'où, par compensation, la somme des angles au sommet S des premiers triangles est moindre que la somme des angles au sommet O des derniers triangles; mais celle-ci vaut 4 *angles droits;* donc la première somme est moindre que 4 *angles droits.*

Nous renvoyons à l'*Appendice* le complément de la théorie des angles trièdres et polyèdres.

§ IV. — *Des polyèdres convexes.*

[*Voyez*, pour la définition des polyèdres en général, les nos **294** et **295**, où nous avons établi, en outre, les caractères principaux des polyèdres convexes.]

Les deux polyèdres dont nous aurons à nous occuper spécialement par la suite, sont le *prisme* et la *pyramide*.

Du prisme et de ses différentes espèces.

No **338.** — Le Prisme est un *polyèdre qui a pour faces deux polygones plans, égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes, en nombre égal à celui des côtés de chaque polygone.*

Il résulte évidemment de cette définition, que tous les angles polyèdres du prisme sont des angles *trièdres*.

Pour obtenir un prisme, considérons un polygone plan ABCDE (*fig.* 281); puis, par les sommets de ce polygone, menons hors de son plan, et du même côté par rapport à ce plan, les droites égales et parallèles, AA', BB', CC',..., et formons le polygone A'B'C'D'E'. — Les quadrilatères AB', BC', CD', seront des parallélogrammes (no **74**); et le polygone A'B'C'D'E' sera égal au polygone ABCDE (no **322**, *scol.*). Fig. 281.

[La *figure* du no **163**, 3e *const.*, est tout à fait analogue à la *figure* 281 : toute la différence consiste en ce que, dans la *fig.* 106, les droites AA', BB', CC', étaient tracées dans un même plan, tandis que, dans celle-ci, elles sont dirigées arbitrairement dans l'espace, mais parallèles entre elles.]

Les parallélogrammes AB', BC', se nomment les *faces latérales* ou les *pans* du prisme, et les deux polygones parallèles sont dits les *bases* du prisme; la *hauteur* est la perpendiculaire commune aux deux bases.

On reconnaît sans aucune difficulté que

Toute section MNPQR, *faite dans un prisme par un plan parallèle aux deux bases, est un polygone égal aux deux bases.*

D'où il résulte que l'on peut encore considérer le prisme comme engendré par le mouvement d'une de ses bases parallèlement à elle-même le long d'une arête latérale AA'; et il est à remarquer que, dans ce mouvement, le prisme passe *par tous les états de grandeur,* depuis *zéro* jusqu'à *l'infini.*

Il suffit, pour lui faire acquérir une valeur déterminée, de mener un plan parallèle à ABCDE, aussi près ou aussi loin de cette base, que cela est nécessaire.

N. B. — Tout plan non parallèle aux bases partage le prisme en deux polyèdres que l'on nomme des *prismes tronqués* ou des *troncs de prisme.*

N° **339**. — Un prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire, pentagonal,* etc., suivant que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., c'est-à-dire, suivant qu'il a 3, 4, 5,... *pans.*

On nomme *prisme droit* tout prisme dont les arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases; — et dans ce cas, la hauteur est égale à l'une de ces arêtes.

Un prisme est dit *régulier* lorsque ses bases sont des *polygones réguliers,* et qu'il est *droit.* — Toutes les faces latérales sont alors des *rectangles.*

Enfin, tout prisme est *décomposable* en prismes *triangulaires*: il suffit, pour réaliser la décomposition, de mener des *plans diagonaux* par les arêtes AA' et CC', AA' et DD', qui n'appartiennent pas à la même face (n° **294**).

Fig. 282. N° **340**. — *Du parallélipipède* (*fig.* 282). — Lorsque les bases du prisme sont elles-mêmes des parallélogrammes, la figure porte le nom de Parallélipipède. — Le prisme est alors compris sous *six faces* parallélogrammiques opposées *deux à deux.*

Dans tout parallélipipède, *les faces opposées sont égales;* car si l'on considère les faces ABFE, DCGK, par exemple, on a

$$AB = DC, \qquad BF = CG \text{ (n° 74)},$$

et *angle* ABF = angle DCG (n° 322); donc ces deux parallélogrammes sont égaux (n° 78).

Il est visible, en outre, que toute section faite dans un parallélipipède est un *parallélogramme* (n° 318).

Un parallélipipède est dit *droit* ou *rectangle* (*fig.* 283), suivant que, les arêtes étant perpendiculaires aux bases, ces bases sont des parallélogrammes quelconques ou des rectangles; et dans ce dernier cas, toutes les faces sont des rectangles. Fig. 283.

Le parallélipipède rectangle prend le nom de Cube lorsque la *base* étant un *carré*, l'*arête latérale* est, en outre, *égale au côté* du carré. — Ainsi, le *cube* est un prisme compris sous *six carrés égaux entre eux;* et il est aux polyèdres, en général, ce que le carré est aux polygones (n° 80).

N° 341. — *Des diagonales* d'un parallélipipède. — On nomme *arêtes opposées*, deux arêtes, telles que AE, CG (*fig.* 285), parallèles et non situées sur une même face; et il résulte de cette définition que, pour chaque arête, il ne peut exister qu'une seule arête qui lui soit opposée. Or, on compte en tout 12 arêtes dans un parallélipipède; donc, le nombre des *couples d'arêtes opposées* est égal à 6. Fig. 285.

Chaque couple détermine un parallélogramme AEGC (n° 74) dont le plan est un *plan diagonal* (n° 294); ainsi, il existe 6 plans diagonaux. — Chacun de ces parallélogrammes a *deux* diagonales qui sont dites les *diagonales* du parallélipipède. D'où il semble résulter que le polyèdre devrait avoir 12 diagonales. — Mais observons que chacune des diagonales, telles que AG, est commune à *trois* plans diagonaux, ABGK, ADFG, AECG; donc, il n'y a réellement, dans tout parallélipipède, que 4 *diagonales différentes*, savoir : AG, BK, CE, DF; — les extrémités de ces diagonales sont dites les *sommets opposés* du parallélipipède.

Il existe, en outre, 12 autres diagonales qui sont situées à la surface du polyèdre: telles sont AC, AK, AF, BE, BG,....

FIG. 285. THÉORÈME I. (*Fig.* 285.)

N° 342. — *Les quatre diagonales d'un parallélipède concourent en un même point;* — et ce point est en même temps le *milieu de la droite qui joint les centres de deux faces opposées, ainsi que les milieux des arêtes opposées.*

En effet, considérons d'abord les deux diagonales AG, CE, par exemple; comme elles appartiennent au même parallélogramme ACGE, il s'ensuit (n° 76) qu'elles se coupent mutuellement en deux parties égales; soit O leur point d'intersection. Mais la même diagonale AG, et une autre diagonale DF, appartiennent au parallélogramme ADGF; donc le point O, milieu de AG, CE, est aussi le milieu de DF. — On démontrerait de même que le point O est le milieu de BK; ainsi la première partie de la proposition est démontrée.

Maintenant la droite IL, qui joint les milieux I et L des deux diagonales du parallélogramme ACGE, passe par le centre O de ce parallélogramme (n° 78); ce qui démontre la seconde partie de la proposition.

SCOLIE I. — Le point O, milieu des quatre diagonales du parallélipipède, ainsi que de chacune des droites qui joignent les centres de deux faces opposées, se nomme le *centre* du parallélipipède.

FIG. 283. SCOLIE II. — *Dans tout parallélipipède rectangle* AG (*fig.* 283), *le carré de chaque diagonale*, DF, *est égal à la somme des carrés des trois arêtes*, BF, BA, BC, *qui forment un même angle trièdre* B.

Tirons la diagonale BD de la face ABCD. — Le triangle rectangle FBD donne

$$FD^2 = FB^2 + BD^2;$$

mais, par hypothèse, le triangle BDA est aussi rectangle en A:

ainsi l'on a $$DB^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2;$$

donc, en substituant pour DB² sa valeur dans l'égalité précédente,

on obtient $$FD^2 = FB^2 + BA^2 + BC^2.$$

Même démonstration pour les trois autres diagonales.

D'où il résulte nécessairement que — *Les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales* (nº 79).

De la pyramide.

Nº 343. — On donne le nom de PYRAMIDE à un *polyèdre dont, une des faces étant un polygone quelconque, toutes les autres sont des triangles ayant un sommet commun, et pour bases respectives les côtés du polygone.*

Un angle polyèdre (*fig.* 270) dont toutes les faces sont coupées par un même plan MN, fournit une pyramide SABCDEF. FIG. 270.

La face ABCDE d'une pyramide SABCDE (*fig.* 286), est dit la *base* de la pyramide; le sommet S, commun à tous les triangles SAB, SBC, SCD,..., porte, plus particulièrement, le nom de *sommet* de la pyramide, et sa hauteur est la perpendiculaire SO abaissée du sommet sur la base. — Les triangles SAB, SBC,..., se nomment les *faces latérales* ou les *pans* de la pyramide; enfin, SA, SB, SC, en sont les *arêtes latérales.* FIG. 286.

Une pyramide est dite *régulière,* lorsque sa base étant un polygone régulier, son sommet et le centre du polygone sont situés sur une même perpendiculaire à la base. — Dans ce cas, toutes les faces latérales sont des triangles *égaux et isoscèles* (nº 303).

Les perpendiculaires abaissées du sommet S sur les côtés de la base sont aussi égales, puisque les apothèmes du polygone régulier sont égaux; et chacune de ces perpendiculaires se nomme l'*apothème* de la pyramide régulière.

Une pyramide régulière ou irrégulière, est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale,* suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc.; mais la pyramide *triangulaire* est plus particulièrement désignée sous le nom de TÉTRAÈDRE. — C'est ainsi que nous la désignerons dorénavant.

Fig. 286.

THÉORÈME II. (*Fig.* 286.)

N° 344. — *Tout plan mené dans une pyramide parallèlement à sa base détermine une section semblable à cette base, et divise les arêtes latérales* SA, SB,..., *ainsi que la hauteur* SO, *en parties proportionnelles.*

D'abord, puisque les plans ABCDE, *abcde*, sont parallèles, il s'ensuit que les droites AB et *ab*, BC et *bc*, CD et *cd*,..., sont parallèles (n° 318); donc déjà, les angles ABC et *abc*, BCD et *bcd*, sont respectivement égaux (n° 322). — De plus, les couples de triangles semblables SAB et S*ab*, SBC et S*bc*,..., donnent (n° 195) les suites de rapports égaux

SA : S*a* :: AB : *ab* :: SB : S*b*,
SB : S*b* :: BC : *bc* :: SC : S*c*,
SC : S*c* :: CD : *cd* :: SD : S*d*;
. . . .
. . . .

d'où, à cause des rapports communs,

AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* ::....

Ainsi les deux polygones ABCDE, *abcde*, sont semblables (n° 198).

Maintenant, en ne considérant que les rapports entre les arêtes latérales, on a

SA : S*a* :: SB : S*b* :: SC : S*c* ::...;

d'où l'on voit que les arêtes sont coupées en parties proportionnelles.

Enfin, si, par l'arête SB et la hauteur SO, nous menons un plan, son intersection *bo* avec le plan *abcde* sera parallèle à BO (n° 318); et les deux triangles semblables SBO, S*bo*, donneront

SO : S*o* :: SB : S*b* :: SA : S*a* ::...;

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

Corollaire. — *Lorsque deux pyramides* SABCDE, TMNP, *ont des bases équivalentes* [bases que l'on peut toujours supposer sur un même plan] *et des hauteurs égales,* SO = TQ, *les deux sections* abcde, mnp, *faites par un même plan parallèle à leurs bases, sont aussi équivalentes.*

D'abord, puisque les polygones ABDCE, *abcde,* sont semblables, on a la proportion

$$\text{ABCDE} : abcde :: \text{AB}^2 : ab^2;$$

donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus,

$$\text{ABCDE} : abcde :: \text{SO}^2 : \text{S}o^2.$$

Ensuite, les deux polygones MNP, *mnp,* donnent également

$$\text{MNP} : mnp :: \text{TQ}^2 : \text{T}q^2;$$

on a d'ailleurs par construction,

$$\text{SO} = \text{TQ}, \quad \text{S}o = \text{T}q;$$

donc $\text{ABCDE} : abcde :: \text{MNP} : mnp.$

Or, par hypothèse, ABCDE = MNP; donc aussi, $abcde = mnp$.
C. Q. F. D.

Scolie. — Si les bases des deux pyramides sont, non-seulement équivalentes, mais *égales et superposables,* il doit en être de même des sections faites à la même hauteur dans les pyramides; car elles ne sauraient être semblables à leurs bases respectives, et équivalentes entre elles, sans être égales.

De l'égalité des polyèdres.

Théorème III.

N° 348. — *Deux polyèdres convexes qui ont les mêmes sommets et en même nombre, coïncident entièrement.*

La démonstration étant tout à fait analogue à celle que nous avons exposée pour les polygones (n° 88), nous nous contente-

rons de renvoyer à cette dernière : il suffit de remplacer les mots *côtés* et *diagonales* par les mots *faces* et *plans diagonaux*.

Fig. 287. THÉORÈME IV. (*Fig.* 287.)

N° 346. — *Deux prismes quelconques sont égaux lorsqu'ils ont un angle trièdre égal* [A, A'], *compris entre trois polygones égaux chacun à chacun* et *assemblés de la même manière*.

D'abord, puisque les bases sont égales, et que l'on a en même temps

$$ABGF = A'B'G'F', \quad AELF = A'E'L'F',$$

il s'ensuit que les trois angles plans qui forment l'angle trièdre en A sont respectivement égaux aux trois angles plans qui forment l'angle trièdre en A', ce qui entraîne l'égalité des angles dièdres (n° 330). Donc, si l'on place la base A'B'C'D'E' sur son égale ABCDE, les faces A'B'G'F', A'E'L'F', s'appliqueront sur leurs égales ABGF, AELF; ainsi, les points F', G', L', coïncideront avec les points F, G, L; et les plans des deux bases supérieures, ayant trois points communs, se confondront (n° 290); comme d'ailleurs ces bases sont égales, les autres sommets I', K', L' coïncideront avec I, K, L; donc enfin, les deux prismes coïncideront (n° 345).

SCOLIE I. — *Deux prismes droits sont égaux lorsqu'ils ont une base égale et même hauteur.*

Car si l'on place les deux bases l'une sur l'autre, de manière que leurs sommets homologues coïncident, comme, par hypothèse, les arêtes latérales sont perpendiculaires aux bases, elles devront prendre la même direction; et puisqu'elles sont égales, les sommets des deux bases supérieures coïncideront; donc il en sera de même des deux prismes.

SCOLIE II. — Il sera démontré dans l'*Appendice*, que les deux
Fig. 282. prismes triangulaires ABCEFG, ADCEGK (*fig.* 282) sont *symétriques*; et par conséquent ils ne sauraient, en général, être superposés, quoique ayant les faces égales chacune à chacune, ainsi que les angles dièdres. — C'est seulement lorsque le parallélipipède est

droit (*fig.* 283), que les deux prismes sont superposables : il suffit alors, pour les faire coïncider, de faire subir au second prisme un mouvement tel, que sa base inférieure BCD vienne s'appliquer sur son égale ADB. Comme, par hypothèse, les deux prismes sont droits, les arêtes correspondantes prendront la même direction (nº 301) ; d'ailleurs elles sont égales; donc les sommets des deux bases supérieures coïncideront; et il en sera de même des deux prismes. Fig. 283.

Concluons de là que — *Les deux prismes droits dans lesquels un parallélipipède droit peut être décomposé par l'un des plans diagonaux, sont égaux et superposables.*

Théorème V. (*Fig.* 288.) Fig. 288.

Nº 347. — *Deux tétraèdres sont égaux* dans deux cas principaux :

1º — *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal* [DABC = D'A'B'C'] *compris entre deux faces égales chacune à chacune et assemblées de la même manière ;*

2º — *Lorsqu'ils ont un angle trièdre égal* [A, A'] *compris en trois faces égales chacune à chacune et assemblées de la même manière.*

Premier cas. — Plaçons la face A'B'D' sur son égale ABD ; — comme l'angle dièdre suivant A'B' est égal à l'angle dièdre suivant AB, le plan de la face A'B'C' s'appliquera sur celui de la face ABC ; et comme ces deux faces sont égales, les droites B'C', A'C', coïncideront respectivement avec BC, AC. Ainsi, les sommets A', B', C', D', coïncidant avec les sommets A, B, C, D, les deux tétraèdres coïncideront.

Second cas. — Puisque les trois faces de l'angle trièdre A' sont égales, chacune à chacune, aux trois faces de l'angle trièdre A, il s'ensuit (nº 290) que les angles dièdres suivant A'B' et AB sont égaux ; et la proposition rentre dans le cas précédent.

Corollaire. — *Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont leurs arêtes égales chacune à chacune, et disposées dans le même ordre :*

c'est-à-dire de telle façon que les *triangles* qui en résultent soient *égaux chacun à chacun* et *assemblés de la même manière* (nº 333), car alors les faces sont égales.

SCOLIE I. — *Deux tétraèdres sont* encore *égaux lorsqu'ils ont une face égale*, ainsi que *les angles dièdres adjacents égaux chacun à chacun et disposés de la même manière;* — car, si l'on fait coïncider les deux faces égales, les plans des trois autres faces du second angle trièdre s'appliqueront sur ceux des trois faces correspondantes du premier. — Donc le point de concours des trois premiers plans coïncidera avec celui des trois autres.

SCOLIE II. — *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle trièdre égal compris entre trois faces égales chacune à chacune* [la base et deux faces latérales] et *assemblées de la même manière.*

En effet, plaçons les deux bases l'une sur l'autre; nous démontrerons, comme ci-dessus, que les faces supposées égales doivent coïncider. — Donc les sommets des deux pyramides coïncideront; donc, etc.

Nº 348. — *Décomposition d'un polyèdre en tétraèdres.*

Avant de passer à la théorie des polyèdres égaux, en général, nous donnerons d'abord quelques notions sur leur décomposition en tétraèdres.

De même qu'il existe (nº 83) plusieurs moyens de décomposer un polygone en triangles, de même aussi un polyèdre quelconque peut être décomposé en tétraèdres de plusieurs manières dont les deux principales sont analogues à celles qu'on a employées pour les polygones.

PREMIER MOYEN. — Concevons un point O pris arbitrairement dans l'intérieur du polyèdre [supposé convexe]; puis par ce point, et par chacune des arêtes, faisons passer une série de plans : — tous ces plans se couperont deux à deux suivant des droites concourant au même point O; et ces droites détermineront, avec les différentes faces du polyèdre, *autant de pyramides*, triangulaires, quadrangulaires, etc., *qu'il y a de faces* dans le polyèdre,

toutes ces pyramides ayant d'ailleurs le point O pour sommet commun.

Maintenant, si dans chaque face, quadrangulaire, pentagonale, etc., on mène d'un même sommet des diagonales à tous les autres, on aura ainsi décomposé la surface polyédrale en triangles, et l'on obtiendra ainsi dans le polyèdre *autant de tétraèdres* ayant pour sommet commun le point O, *que l'on aura de triangles* sur la surface totale, ces triangles étant d'ailleurs les bases des différents tétraèdres.

SECOND MOYEN. — Considérons un sommet quelconque A du polyèdre, et décomposons en triangles chacune des faces, autres que celles qui concourent au point A [par des diagonales menées d'un même sommet, pour chaque face]; puis par le point A, et les différents côtés de tous ces triangles, faisons passer des plans. Il est facile de voir que l'on aura ainsi décomposé le polyèdre *en autant de tétraèdres*, ayant tous pour sommet commun le point A, *que l'on aura de triangles* dans les faces du polyèdre, excepté celles qui concourent au point A.

Ainsi, dans le parallélipipède, par exemple, comme chaque angle solide est *trièdre*, il reste à décomposer trois faces, dont chacune donne deux triangles; donc le polyèdre est égal à la somme de six tétraèdres ayant pour sommet commun le point A (*fig.* 282), et pour bases les triangles dont nous venons de parler. FIG. 282.

N° 349. — *Remarque importante* sur ces deux modes de décomposition. — Quel que soit celui des deux modes que l'on emploie, on est conduit à diviser les tétraèdres qui, par leur ensemble, constituent le polyèdre total, en *deux* espèces principales, savoir : des tétraèdres *extérieurs* et des tétraèdres *intérieurs*.

On nomme tétraèdres *extérieurs* ceux qui ont ou *deux* ou *trois* faces placées à la surface du polyèdre; et tétraèdres *intérieurs* ceux qui n'ont qu'une seule face placée à la surface : c'est la base même du tétraèdre.

La *figure* 289, où la décomposition du polyèdre a été faite d'après le second mode [celui dont nous faisons le plus souvent FIG. 289.

usage], est propre à faire comprendre les deux espèces de tetraèdres dont nous venons de parler.

On distingue, dans le polyèdre ABCDEFGKILM, 7 faces *antérieures:* ABDE, BCD, DEF, CDFG, CGK, KCB, KBAI; et 5 faces *postérieures:* ALMFE, GMF, GMLK, LIK, AIL.

Si l'on prend le point A, par exemple, pour sommet commun, comme, en ce point, viennent se réunir les quatre faces, KBAI, ABDE, AIL, ALMFE, il n'y a lieu à décomposer en triangles que les faces antérieures BCD, DEF, CDFG, CGK, KCB, ce qui donne déjà 6 triangles; puis les faces postérieures LIK, GLMK, GMF, ce qui donne 4 triangles. — D'où il résulte que le polyèdre est décomposable en 10 tétraèdres ayant le point A pour sommet commun.

N. B. — Il y a de l'avantage à prendre un sommet où viennent aboutir le plus de faces possibles.

Les tétraèdres ABCD, ADEF, AKGC,..., sont de la première espèce, comme ayant ou *trois* faces situées à la surface du polyèdre, ou *deux* faces.

Le tétraèdre AMGF est de la seconde espèce; car le triangle GMF est la seule face qui soit située à la surface du polyèdre, les arêtes AG, AM, AF, étant intérieures au polyèdre.

En général, l'espèce peut être déterminée facilement d'après l'inspection de la base [A étant le sommet] et des faces latérales.

Nous ajouterons que, dans les tétraèdres de la première espèce, *trois* angles dièdres, ou *un seul* angle dièdre, sont des angles dièdres même du polyèdre; tandis que dans les tétraèdres de la seconde espèce, c'est-à-dire dans les tétraèdres dits *intérieurs*, les angles dièdres sont toujours des *différences* entre des angles dièdres appartenant, soit au polyèdre, soit à des tétraèdres *extérieurs*, soit à d'autres tétraèdres *intérieurs*.

Cela tient à ce que tous les tétraèdres qui composent la figure sont réunis les uns aux autres par des faces communes, et sans jamais se pénétrer.

Toutes ces remarques seront fort utiles par la suite, et l'on ne saurait trop chercher à les bien comprendre.

N° 350. — *Égalité des polyèdres quelconques.* — Deux polyèdres sont dits égaux et superposables, quand on peut les amener à coïncider entièrement.

D'où il résulte — 1° que — *Deux polyèdres égaux ont toutes leurs arêtes et toutes leurs diagonales égales chacune à chacune ;*

Que 2° — *Ils peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres égaux et disposés de la même manière ;*

Que 3° — *Toutes leurs faces sont égales chacune à chacune, ainsi que leurs angles dièdres.*

Les deux dernières propositions sont susceptibles de réciproques qui feront l'objet des théorèmes suivants.

Théorème VI.

N° 351. — *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de tétraèdres égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.*

Car ces tétraèdres étant, dans les deux polyèdres, adjacents les uns aux autres (n° 349) et disposés dans le même ordre, il suffira de faire d'abord coïncider deux des tétraèdres égaux pour que tous les autres coïncident successivement; et alors les deux polyèdres coïncideront.

Théorème VII.

N° 352. — *Deux polyèdres sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune et disposées de la même manière, ainsi que les angles dièdres.*

En effet, les deux polyèdres étant décomposés en tétraèdres [d'après le deuxième mode (n° 348)], si l'on compare d'abord deux à deux tous les tétraèdres qui ont *deux* ou *trois* faces placées à la surface du polyèdre, en d'autres termes, les tétraèdres *extérieurs* (n° 349), ces tétraèdres sont égaux (n° 347), soit comme ayant un angle dièdre égal [appartenant aux deux polyèdres] compris entre deux faces égales, soit comme ayant trois faces égales [triangles homologues dans les deux polyèdres]; d'où l'on déduit que toutes les autres parties de ces tétraèdres extérieurs sont égales chacune à chacune.

Comparant ensuite deux tétraèdres *intérieurs* adjacents aux précédents, on verra qu'ils sont aussi égaux, comme ayant un angle dièdre égal [différence entre un angle dièdre de chaque polyèdre et l'un des angles dièdres des tétraèdres reconnus égaux], compris entre deux faces égales chacune à chacune [savoir : une face égale dans les deux polyèdres, ou une partie égale de cette face, puis une face égale des tétraèdres précédents, reconnus égaux]; et ainsi de proche en proche. — Donc enfin, les deux polyèdres sont égaux comme étant composés d'un même nombre de tétraèdres égaux.

Scolie. — On pourrait encore démontrer cette dernière proposition en plaçant l'une des faces du second polyèdre sur son homologue du premier. — Alors, toutes les faces adjacentes à celles-ci coïncideraient aussi, puisqu'elles sont, par hypothèse, égales, également inclinées par rapport à la face déjà commune, et disposées de la même manière. En continuant ainsi de proche en proche, on ferait coïncider entièrement toutes les faces.

Ce moyen de démonstration donne lieu à des remarques analogues à celles qui ont été faites pour les polygones, sur le nombre des données nécessaires à leur détermination (*voyez* les nos 167 et *suiv.*); mais nous n'insisterons pas davantage sur ces considérations qui sortent tout à fait des *éléments de Géométrie* (*).

Nous nous bornerons à faire observer que, dans les polyèdres, le nombre des angles dièdres surpasse toujours le nombre des faces, tandis que, dans les polygones, le nombre des angles est égal à celui des côtés. On explique cela facilement par cette circonstance, qu'à une même face polygonale quelconque se rattachent plusieurs autres faces polygonales d'un nombre de côtés plus ou moins grand. Or on a vu (no 294) qu'à chaque arête correspond un angle dièdre.

C'est ainsi que le tétraèdre a 4 faces et 6 angles dièdres, qu'une pyramide quelconque a $(n + 1)$ faces et $2n$ angles dièdres, n étant le nombre des côtés de la base, *etc.*

Fig. 289. Ainsi, dans la *figure* 289 par exemple, on compte 12 faces et 20 arêtes ou angles dièdres.

(*) M. Cauchy a démontré que, quand les polyèdres sont *convexes*, l'égalité des faces est suffisante pour entraîner l'égalité des polyèdres. [*Voir* le *Journal de l'École Polytechnique*, XVIe cahier, *page* 87 et *suiv.*]

CHAPITRE II.

DES TROIS CORPS RONDS. — DU CYLINDRE, DU CONE, ET DE LA SPHÈRE. — POLYÈDRES RÉGULIERS.

Ce chapitre aura *quatre* paragraphes : Le *premier* traitera du *cylindre* et du *cône ;* le *second* de la *sphère* et de ses principales propriétés ; le *troisième* de la théorie des *triangles* et des *polygones sphériques ;* et le *quatrième*, des polyèdres *inscriptibles* ou *circonscriptibles*, et en particulier, des polyèdres *réguliers*.

§ I. — *Du cylindre et du cône.*

Du cylindre droit.

N° 383. — On donne le nom de Cylindre droit [celui dont traite spécialement la Géométrie élémentaire] à la figure engendrée par la révolution d'un rectangle ABDC (*fig.* 290) autour d'un de ses côtés, AB, qui s'appelle alors l'*axe* du cylindre, ou sa *hauteur*. Fig. 290.

Dans ce mouvement, le côté CD, opposé à AB, engendre une portion de surface que l'on nomme la *surface cylindrique ;* et les côtés BD, AC, ne cessant pas d'être perpendiculaires à AB, décrivent des cercles dont les plans sont aussi perpendiculaires à AB ; ces cercles se nomment les *bases* du cylindre ; et la droite CD est dite la *génératrice* ou l'*arête* de la surface cylindrique. — *La génératrice du cylindre droit est égale à sa hauteur,* c'est-à-dire à *l'axe.*

Dans ce même mouvement, chacun des points I, de l'arête, restant toujours à la même distance de l'axe, décrit une circonférence de cercle dont le rayon IO est perpendiculaire à l'axe, et égal au rayon CA ou DB, des deux bases ; ce que l'on exprime en disant que :

Toute section faite parallèlement aux bases est égale à chacune de ces bases.

D'où l'on voit que le *cylindre* peut encore être considéré comme *engendré par le mouvement de l'une de ses bases parallèlement à elle-même le long de la génératrice;* et dans ce mouvement, la surface cylindrique est engendrée par la circonférence.

Fig. 290.

THÉORÈME I. (*Fig.* 290.)

N° 384. — *Tout plan* EFGK *mené parallèlement à l'axe* AB *d'un cylindre, et passant par une corde* EF *de la base, coupe la surface cylindrique suivant deux génératrices* EG, FK.

En effet, puisque ce plan est parallèle à AB et passe par le point E, il doit contenir (n° 318, *corol.* I) la parallèle à AB menée par ce point; ainsi il contient la génératrice EG. — De même, puisqu'il passe par le point F, il contient la génératrice FK correspondant à ce point.

Ainsi (n° 1), les génératrices EG, FK, sont les intersections du plan avec la surface cylindrique.

N. B. — La figure EFGK est d'ailleurs un *rectangle*.

SCOLIE I. — Lorsque le plan passe par l'axe lui-même, la section CDD'C' est évidemment un rectangle *double* du rectangle générateur; et les deux génératrices correspondantes sont dites des *génératrices opposées*.

Si le plan parallèle passe par une droite LL' tangente à la base au point M, il porte le nom de *plan tangent* au cylindre, parce que, dans ce cas, il n'a de commun avec la surface que la seule génératrice MN menée par le point de contact. On conçoit, en effet, que nul autre point de ce plan, situé de l'un ou de l'autre côté de MN, ne saurait se trouver en même temps sur la surface cylindrique : car, si cela était, comme la génératrice correspondant à ce point devrait aussi appartenir au plan (n° 383), il faudrait que cette génératrice rencontrât la base sur la droite LL', ce qui est *absurde*.

Le *plan tangent* au cylindre est donc le plan conduit en même temps suivant une tangente à la base, et suivant la génératrice qui

passe par le point de contact : sa propriété caractéristique est de *toucher la surface dans toute l'étendue de la génératrice*, en ce sens que

Tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface cylindrique suivant une circonférence de cercle, et le plan tangent suivant une tangente à ce cercle.

N° 385. — Scolie II. — Si l'on inscrit et si l'on circonscrit à la circonférence de la base inférieure différents polygones, et que par les côtés de ces polygones, on conçoive des plans perpendiculaires à la base, ces plans couperont la base supérieure suivant des polygones égaux à ceux de la base inférieure, et détermineront avec ces polygones, des prismes (n° 338) que nous nommerons des *prismes inscrits* ou des *prismes circonscrits* au cylindre.

Lorsque les polygones sont réguliers, les prismes eux-mêmes sont des *prismes réguliers* (n° 339).

Considérons en particulier un prisme régulier circonscrit, et supposons que le nombre des côtés de sa base devienne *infiniment grand*; dans ce cas, le périmètre du polygone se confondra avec la circonférence de la base du cylindre (n° 245), d'où il suit que *le cylindre peut être considéré comme un prisme régulier d'un nombre infini de faces rectangulaires, ayant pour hauteur commune celle du cylindre, et pour bases les éléments* (n° 245) *de la base du cylindre.*

Théorème II. (*Fig.* 291.) Fig. 291.

N° 386. — *La surface latérale de tout cylindre droit peut être développée sur un même plan*, et *représentée par un rectangle ayant pour hauteur celle du cylindre, et pour base la longueur de la circonférence du cylindre*, supposée *rectifiée* (n° 241).

Pour fixer les idées, prenons d'abord un prisme hexagonal régulier, ABCDEFA'B'C'D'E'F', circonscrit à un cylindre dont la base a pour rayon OI, et dont la hauteur est AA'.

Supposons, en outre, que sur une droite indéfinie *ax*, on ait porté des parties *ab*, *bc*,..., *fa''*, égales aux côtés AB, BC, CD,..., FA, du polygone, et qu'ensuite on ait élevé les perpendiculaires *aa'*, *bb'*, *cc'*,..., *a''a'''*, égales à la hauteur AA'. — Il est

bien évident que le rectangle $aa''a'''a'$ représentera [dans sa véritable grandeur] la surface latérale du prisme, *développée* sur un seul et même plan.

[Pour se rendre compte autrement de cette propriété, il suffit de concevoir que le rectangle BCC′B′ tourne autour de BB′ comme charnière et vienne prendre position sur le plan du rectangle ABB′A′, que le rectangle CDD′C′ tourne ensuite autour de CC′ pour venir prendre position sur le plan des deux premiers; et ainsi de suite : c'est en cela que consiste ce que l'on nomme le *développement* d'une surface sur un plan.]

Maintenant, comme on peut répéter les mêmes opérations pour les prismes réguliers de 12, 24,... côtés, il s'ensuit que l'on pourra arriver ainsi à un dernier rectangle $all'a'$ ayant pour hauteur $aa' = $ AA′, et pour base une certaine ligne al égale en longueur à la circonférence OI rectifiée; *C. Q. F. D.*

N. B. — Les petits rectangles $agg'a'$, $gkk'g'$,.... représentent ici les *éléments superficiels* de la surface latérale du cylindre, correspondant *aux éléments* ag, gk,.... de la circonférence OI de la base.

Du cône droit.

Nº 587. — Le Cône droit est une figure engendrée par la révolution d'un triangle rectangle SOA (*fig.* 292) autour d'un des côtés de l'angle droit, SO, que l'on nomme l'*axe* du cône.

Fig. 292.

La surface engendrée dans ce mouvement, par l'hypoténuse SA, s'appelle *surface conique;* et la droite SA en est la *génératrice* ou l'*arête*. — Le cercle décrit par le second côté AO du triangle rectangle est la *base* du cône; et l'axe SO en est dit aussi la *hauteur*. Enfin le point S se nomme le *sommet* du cône.

Dans ce même mouvement, un point quelconque I de l'arête SA décrit un cercle dont le rayon IO′, perpendiculaire à l'axe SO, est évidemment au rayon OA de la base, dans le rapport de la distance SO′ à la distance SO.

D'où il résulte que — *Toute section faite dans un cône parallèlement à la base* [ou perpendiculairement à l'axe] *est une circonférence de cercle.*

THÉORÈME III. (*Fig.* 292.) FIG. 292.

N° 358. — *Tout plan mené par le sommet d'un cône droit et par une corde* EE′ *de la base, coupe la surface conique suivant deux génératrices* SE, SE′, égales à SA.

En effet, ce plan, passant par les trois points S, E, E′, doit contenir chacune des deux génératrices SE, SE′, qui correspondent aux points E, E′. — Ainsi (n° 1) SE, SE′, sont les intersections du plan avec la surface conique.

Lorsque le plan passe par l'axe SO, c'est-à-dire est mené par le sommet S et un diamètre de la base, la section résultante est un triangle isoscèle ASA′ *double* du triangle OSA; et les deux génératrices correspondantes SA, SA′, sont dites des *génératrices* ou des *arêtes opposées*.

N° 359. — SCOLIE I. — Un plan est dit *tangent* au cône, quand il passe par une arête SM et par la tangente LL′ à la base, menée par le point M. — En effet, aucun autre point pris de l'un ou de l'autre côté de l'arête SM, dans le plan SLL′, ne saurait appartenir à la surface conique : car, si cela était, en joignant ce point au sommet S, on aurait une autre génératrice qui, étant située dans le plan SLL′, rencontrerait la base suivant la droite LL′, ce qui est *absurde*, puisque, par hypothèse, LL′ est tangent à la base.

Le plan tangent au cône, comme le plan tangent au cylindre (n° 354, *scol.* I), *touche la surface conique dans toute l'étendue de la génératrice*, en ce sens que

Tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface conique suivant une circonférence de cercle (n° 357), *et le plan tangent suivant une tangente* à ce cercle.

N° 360. — SCOLIE II. — En inscrivant et circonscrivant des polygones à la circonférence de la base, puis faisant passer successivement des plans par les côtés de ces polygones et par le sommet du cône, on forme ainsi des pyramides inscrites et des pyramides circonscrites à la surface conique.

Lorsque ces polygones sont réguliers, les pyramides sont aussi dites *régulières* (n° 343).

Dans les pyramides régulières circonscrites, la droite nommée *apothème* [même numéro] est constamment égale à la génératrice SA du cône.

Enfin, on peut dire, en s'exprimant ici comme pour le cylindre (n° 355), que

Le cône est une pyramide régulière d'un nombre infini de faces triangulaires, tous ces triangles *ayant pour hauteur commune la génératrice* ou *l'arête du cône, et pour bases, les éléments de la circonférence de la base du cône.*

Fig. 239 et 293 *bis*.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 293 et 293 *bis.*)

N° 361. — *La surface latérale d'un cône droit quelconque peut toujours être développée sur un plan, et représentée par un secteur circulaire* (n° 251) *ayant pour rayon l'arête du cône, et pour base un arc de cercle égal en longueur à la circonférence de la base.*

Considérons d'abord la pyramide hexagonale régulière circonscrite au cône dont la base a pour rayon OI (*fig.* 293), la génératrice ou l'arête SI étant en même temps l'apothème de la pyramide; et tâchons d'opérer le développement de ses faces latérales sur un même plan. — Il suffit, pour cela, de concevoir que la face SBC tourne autour de SB comme charnière, jusqu'à ce qu'elle vienne prendre position sur le plan de la face SBA; après quoi, l'on peut faire tourner la face SCD autour de SC, de manière que son plan vienne se confondre avec celui des deux premières, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi le développement de la pyramide.

Ce développement, représenté par *six* triangles isoscèles *sab*, *sbc*,..., *sfa'* (*fig.* 293 *bis*), adjacents les uns aux autres sur un même plan, détermine un secteur polygonal *sabcdefa'* (n° 255) ayant pour base une ligne brisée régulière *abcdefa'*, telle que la somme des angles au centre *s* sera moindre que 4 *droits* (n° 337), et égale en longueur au périmètre de la base de la pyramide, l'apothème de ce secteur étant d'ailleurs l'arête SI du cône auquel la pyramide est circonscrite.

Maintenant, comme ces constructions peuvent s'exécuter quel

que soit le nombre des faces de la pyramide régulière circonscrite, elles sont applicables à la surface conique qui en est la limite; et alors il est évident que le développement sera représenté par un secteur circulaire dont la base est un arc égal en longueur à la somme des éléments de la circonférence de la base du cône, le rayon de cet arc étant d'ailleurs l'arête même SA, ou la génératrice du cône; *C. Q. F. D.*

SCOLIE. — Les surfaces coniques et cylindriques ne sont que des cas particuliers d'une classe générale de surfaces que l'on nomme *surfaces développables*, et dont il sera question dans le second *Appendice*, où nous reviendrons également sur les surfaces cylindriques et coniques considérées sous un point de vue beaucoup plus général.

§ II. — *De la sphère et de ses principales propriétés.*

N° 362. — Une SPHÈRE est la figure décrite par la révolution d'un demi-cercle AMB (*fig.* 294) autour d'un de ses diamètres AB; — la surface engendrée par la demi-circonférence se nomme SURFACE SPHÉRIQUE. FIG. 294.

Dans ce mouvement, chaque point M de la demi-circonférence décrit une autre circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe de révolution AB, et dont le centre P est situé sur cet axe, le rayon étant d'ailleurs MP.

Dans ce même mouvement, tous les points de la demi-circonférence génératrice, AMB, restent également distants du point O, centre de cette circonférence; d'où résulte une autre définition de la sphère et de sa surface :

La *sphère* est une *figure terminée par une surface dont tous les points sont également distants d'un même point* que l'on appelle *centre*. — Toute droite menée du centre à la surface est dite un *rayon*; toute droite passant par le centre et terminée de part et d'autre à la surface, se nomme un *diamètre* de la sphère. (*Voyez* le n° 13 pour la définition du cercle.)

On déduit évidemment de cette seconde définition

1° — Que — *Deux sphères de même rayon sont égales ;*

2°— Que — *Tout plan* ARBS *passant par le centre de la sphère, détermine un cercle dont le rayon est le même que celui de la surface ;* — et que de plus, il *divise la figure en deux parties égales* que l'on nomme *hémisphères.*

Fig. 295. THÉORÈME I. (*Fig.* 295.)

N° 363. — *Toute section de la sphère par un plan quelconque* MNPQR *est un cercle dont le centre est le pied* I *de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de la sphère sur ce plan ;* — ce qui s'accorde avec le second *alinéa* du numéro précédent.

En effet, si l'on joint le point I aux différents points M, N, P,..., du contour de la section, et le centre de la sphère à ces mêmes points, toutes les obliques OM, ON, OP,..., sont égales comme rayons de la sphère; donc (n° 303) leurs pieds M, N, P, sont également distants du point I qui est alors le centre d'une circonférence passant par tous ces points.

COROLLAIRE. — *La surface sphérique est une surface convexe;* car l'intersection de cette surface par un plan, étant une circonférence de cercle, et celle-ci ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en deux points, il en est de même de la surface, ce qui est le principal caractère d'une surface convexe (n° 294).

SCOLIE I. — Lorsque le plan coupant passe par le centre de la sphère, la section obtenue porte le nom de *grand cercle.*

Dans une même sphère, tous les grands cercles sont égaux, — ainsi que nous l'avons déjà établi au numéro précédent : car ils ont pour rayon celui de la sphère.

Tout autre plan sécant détermine ce qu'on nomme un *petit cercle.*

Fig. 295. En désignant par R le rayon OM d'une sphère (*fig.* 295), par r le rayon OI d'une section quelconque, et par d la distance du point O au plan de la section, on a

$$R^2 = r^2 + d^2 \text{ (n° 204)}; \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{R^2 - d^2};$$

ce qui démontre que le rayon r d'un petit cercle *diminue* à mesure que la distance du centre de la sphère au plan de ce petit cercle *augmente;* et *vice versâ.*

Scolie II. — On donne le nom de *pôles* d'un cercle aux deux points L, L', où la perpendiculaire, abaissée du centre de la sphère sur le plan de ce petit cercle, rencontre la surface sphérique; et la droite LL' est dite l'*axe* de ce cercle.

Ces points L, L', et la droite LL', sont en même temps les pôles et l'axe de tous les cercles parallèles au cercle MNPQR, et en particulier du grand cercle ACBD.

Ainsi, — *L'axe d'un grand cercle de la sphère est le diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle;* — les extrémités de ce diamètre en sont les *pôles.*

Théorème II. (*Fig.* 296.) Fig. 296.

N° 364. — *Tout plan mené par l'axe* AB *d'un petit cercle* PQRS, *détermine un grand cercle* BPAR, BDAD',..., *perpendiculaire au plan de ce petit cercle et à tous ses parallèles.*

En effet, on vient de voir que AB est perpendiculaire au plan PQRS; donc il en est de même de tous les plans passant par cet axe (n° 309).

Ces plans sont dits des *méridiens* du petit cercle, ainsi que de tous les parallèles (n° 319), et en particulier du grand cercle CDC'D', qui en fait partie.

Scolie I. — *Tous les arcs* de *méridiens* BP, BQ, BR,..., *compris entre un petit cercle et chacun de ses pôles, sont égaux:* — car si l'on tire les cordes BP, BQ, BR,..., elles sont toutes égales (n° 303).

Chacun des arcs de méridiens, BPC, BQD, BRC',..., correspondant à un grand cercle CDC'D', est un *quadrant,* puisque les angles rectilignes BOC, BOD, BOC',..., sont *droits.*

Scolie II. — Un grand cercle CDC'D' ne peut avoir qu'*un seul* méridien passant par un point donné sur la surface de la sphère,

soit C sur ce grand cercle, soit Q au dehors [pourvu toutefois qu'il soit différent du pôle] : car ce point et l'axe AB déterminent un plan (n° 291).

Quelquefois, *l'arc* de cercle QD, dont le plan est perpendiculaire à celui de la circonférence CDC'D', est dit lui-même *perpendiculaire* à cette dernière.

SCOLIE III. — Il résulte enfin de ce qui vient d'être dit, que, *pour obtenir* sur la surface d'une sphère *le pôle* d'un grand cercle CDC'D', il suffit de concevoir, en deux points C, D, de ce cercle, deux arcs de grand cercle, CB, DB, perpendiculaires à CDC'D', que l'on prolonge jusqu'à leur rencontre mutuelle aux points A et B, ou bien encore un seul arc CPB perpendiculaire à CD et égal à un *quadrant*.

Réciproquement, le pôle d'un grand cercle étant donné, pour obtenir ce cercle, il faut, de ce pôle, et avec une ouverture égale à la corde d'un *quadrant*, décrire (*) une circonférence : ce sera celle du cercle demandé.

FIG. 296.

THÉORÈME III. (*Fig.* 296.)

N° 308. — *Tout plan* MN *mené par l'extrémité* A *d'un rayon de la sphère, perpendiculairement à ce rayon, est tangent à la sphère* — [ce qui veut dire que ce plan n'a qu'un point commun avec la surface sphérique].

Car, toute droite OI, menée du centre de la sphère à un point quelconque I du plan MN, est une oblique à ce plan ; donc elle est plus longue que OA (n° 303) ; ainsi ce point est situé hors de la sphère.

RÉCIPROQUEMENT, — *Un plan qui n'a qu'un point commun avec la sphère*, ou *un plan tangent*, *est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact :* — car ce rayon est la plus courte distance du centre à tous les points du plan.

(*) Il existe des instruments, nommés *compas sphériques*, à l'aide desquels on peut décrire des circonférences sur une *surface sphérique*, comme on les décrit sur un plan avec le compas ordinaire.

Corollaire. — *Tout plan mené par le point de contact* A *coupe* ı *sphère suivant un grand* ou *un petit cercle*, et *le plan tangent* *uivant une tangente* à ce cercle : — car, si cette droite avait quel- ue point intérieur au cercle, le plan tangent aurait aussi un point ıtérieur à la sphère, ce qui est *absurde*.

N° 366. — **Scolie.** — Soient deux grands cercles ACBC′, ADBD′, ıenés par le diamètre AB, et AE, AF, les deux tangentes qui ésultent de l'intersection du plan tangent et des plans des deux rands cercles.—L'angle EAF étant formé par des perpendiculaires AB, menées respectivement dans les deux plans, mesure (n° 308) angle dièdre CBAD.

Ce même angle dièdre a aussi pour mesure l'angle au centre COD, ɔrmé par deux droites OC, OD, perpendiculaires à AB, ou paral- èles aux tangentes AE, AF, ou bien encore (n° 119), l'arc CD ompris entre les côtés de cet angle.

N. B. — On nomme **Fuseau sphérique** la *portion de la surface phérique comprise entre deux demi-circonférences de grand cercle*; t **Onglet sphérique**, l'*espace renfermé entre les deux demi-cercles* *t le fuseau*, espace qui n'est qu'une portion de l'angle dièdre orrespondant à ce fuseau.

Des sphères sécantes et tangentes.

N° 367. — *Proposition préliminaire.* — De ce que la *surface phérique* est une surface *rentrante et fermée*, il résulte nécessai- ement que, si deux surfaces sphériques sont tellement placées l'une ɔar rapport à l'autre, que la seconde, par exemple, ait *un* ou plu- ieurs points *intérieurs* à la première, et en même temps *un* ou plu- ieurs points *extérieurs* à celle-ci, les deux surfaces *se coupent*.

On donne le nom de *ligne des centres* à la droite indéfinie qui oint les centres des deux sphères : c'est dans cette direction que e mesure la *distance des centres*.

Théorème IV. (*Fig.* 297.) Fig. 297.

N° 368. — *Lorsque deux surfaces sphériques se coupent, la ligne d'intersection est une circonférence de cercle dont le plan est*

perpendiculaire à la ligne des centres, et dont le centre est situé sur cette droite.

Soient, en effet, O, O′, les centres de deux sphères, M un point commun à leurs surfaces, et MP la perpendiculaire abaissée du point M sur la ligne des centres. Menons un plan par les trois points O, O′, M : ce plan déterminera (nº 363, *scol.* I) dans les deux sphères, des grands cercles dont les circonférences passeront toutes deux par le point M. Or, en supposant que les deux demi-cercles AMB, A′MB′, fassent une révolution entière autour de l'axe commun AB′, il est clair que, dans ce mouvement, la perpendiculaire MP décrira un cercle commun aux deux sphères ainsi engendrées (nº 362). — Donc, celles-ci se coupent suivant un cercle dont le centre est sur l'axe, et dont le rayon est la perpendiculaire abaissée du point commun M sur cet axe.

Scolie. — Quelle que soit la position relative des deux sphères dans l'espace, comme tout plan conduit suivant la ligne des centres détermine deux circonférences dont les centres et les rayons sont ceux des sphères elles-mêmes, il s'ensuit que les conditions de *contact* et d'*intersection* de leurs surfaces sont, en tous points, *identiques* avec celles qui se rapportent à deux circonférences. — Ainsi, pour énumérer et démontrer ces différentes conditions, il suffit de se reporter au paragraphe IV du 2e *chap.*, *liv.* I.

Nous nous bornerons à énoncer ici la condition relative au contact :

Lorsque deux sphères se touchent, la distance des centres est égale à la somme ou à la différence des rayons. — Elles ont d'ailleurs, au point de contact, *un plan tangent commun.*

§ III. — *Des triangles et des polygones sphériques.*

Fig. 298. Nº 369. — *Introduction.* — Soit O (*fig.* 298) le centre d'une sphère. Considérons ce point comme le sommet d'un angle polyèdre convexe qui satisfasse d'ailleurs à la condition établie au nº 329, c'est-à-dire tel, que toutes ses faces soient situées d'un même côté par rapport à un certain plan mené par le point O. — Cela posé, les plans de ces faces rencontrent la surface sphérique

ıivant des circonférences de grands cercles, qui, en se coupant eux à deux, déterminent un polygone ABCDE que nous nomıerons un *polygone sphérique*.

Or, d'après ce qui vient d'être dit, les sommets A, B, C, D, E, e ce polygone doivent être *tous* placés sur le même hémisphère éterminé par le plan MNP indiqué plus haut, plan que l'on prend rdinairement pour celui de la figure.

Les arcs de grands cercles, AB, BC, CD,... qui, par leurs in:rsections mutuelles, déterminent le polygone, sont dits *les côtés* e ce polygone, dont *les angles* en A, B, C,..., ne sont autres, n valeur, que les angles dièdres formés par les plans de ces rands cercles; car ces angles dièdres ont nécessairement pour ıesure (nº **366**) les angles rectilignes formés respectivement aux oints A, B, C,... par les tangentes aux arcs AB et AE, BC et BA, D et CB,..., ou bien encore, les angles que forment au centre de ı sphère les droites menées respectivement dans les plans des rands cercles, *perpendiculairement* aux arêtes des angles dièdres.

Dans le cas particulier d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 299), FIG. 299.
: plan de la figure peut être déterminé d'une autre manière :

Concevons d'abord le plan qui passe par les trois sommets ι, B, C : — ce plan coupe (nº **368**) la surface sphérique suivant ne circonférence qui ne peut être que celle d'un petit cercle, uisque, autrement, le plan contiendrait le centre de la sphère; t les trois points A, B, C, se trouvant alors sur une même cironférence de grand cercle, ne sauraient former un triangle.

Maintenant, si nous menons par le centre O un plan MNP paallèle à celui des trois points A, B, C, il est clair que ces points eront situés sur l'un des deux hémisphères que détermine le plan INP; et c'est ce plan que nous pouvons prendre pour celui de la igure. — Ainsi, nous supposerons toujours dorénavant que la urface d'un triangle sphérique est entièrement comprise sur un nême hémisphère.

Des triangles sphériques en particulier.

Nº **370**. — On ne considère ordinairement, dans la *Géométrie élémentaire*, que les triangles formés par des arcs de grand cercle;

— de plus, puisque le triangle doit être placé sur un même hémisphère en vertu du numéro précédent, il s'ensuit que — *Chaque côté est moindre qu'une demi-circonférence.*

On doit d'ailleurs remarquer que, si l'on prolonge dans tous les sens les faces de l'angle trièdre au centre, correspondant à un triangle sphérique donné, les plans de ces faces déterminent sur la surface de la sphère *sept* autres triangles dont les éléments ont, avec ceux du triangle donné, les mêmes relations de position [et de grandeur] que les éléments des *huit* angles trièdres auxquels donnent lieu trois plans qui se coupent en un même point (nº 293); et chacun des côtés de tous ces triangles sphériques est ainsi moindre qu'une demi-circonférence.

Nº 371. — L'analogie qui existe entre un angle trièdre au centre d'une sphère et le triangle sphérique qui lui sert de base, fait pressentir que les propriétés de celui-ci sont des conséquences nécessaires des propriétés de l'angle trièdre.

Ainsi, par exemple, on est conduit presque immédiatement aux propositions suivantes :

FIG. 299. 1º — *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 299), *un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres :*

Car, dans l'angle trièdre OABC, on a

$$AOB < AOC + BOC \text{ (nº 331)};$$

or, les arcs AB, AC, BC, étant décrits avec le même rayon, peuvent servir de mesure aux angles qui leur correspondent; et l'on a par conséquent, $AB < AC + BC.$

Par suite, un *côté quelconque d'un polygone sphérique* ABCDE
FIG. 298. (*fig.* 298) est moindre que la somme de tous les autres;

2º — *La somme des trois côtés d'un triangle sphérique est moindre qu'une circonférence entière*, puisque, dans l'angle trièdre correspondant, la somme des trois faces est moindre que 4 *droits* (nº 332);

3º — Un triangle sphérique peut être *unirectangle* [ou simplement *rectangle*], *birectangle*, *trirectangle :* car un angle trièdre peut avoir (nº 332, *scol.* I) *un seul* angle dièdre *droit*, ou *deux*, ou même *trois* angles dièdres *droits*.

4° — *Dans tout triangle sphérique isoscèle, aux côtés égaux ont opposés des angles égaux.*

Car si l'on a AB = AC (*fig.* 299), par exemple, l'angle AOB est Fig. 299.
gal à AOC; et l'angle trièdre OABC étant *isoèdre*, il en résulte ue les angles dièdres suivant OC, OB, sont égaux (n° 334, *N. B.*); onc l'angle C est égal à l'angle B.

Et ainsi des autres propriétés analogues à celles des n° 333 et *suiv.*

En un mot, dans le développement des autres propriétés des riangles sphériques, il nous suffira le plus souvent de rappeler es propriétés analogues des angles trièdres; comme nous pourons aussi en donner des démonstrations directes toutes les fois ue ce procédé nous semblera plus simple. — C'est ce que nous llons faire pour la proposition suivante qui correspond à la proriété de l'angle trièdre supplémentaire.

Du triangle polaire.

N° 372. — Un triangle sphérique ABC (*fig.* 301) étant donné, Fig. 301.
upposons que le point C' soit celui des deux pôles de l'arc AB n° 363, *scolie* II) qui se trouve situé d'un même côté que le ommet C par rapport au plan AOB, et que B', A', soient les ôles analogues des arcs AC, BC; puis, par les trois points A', ', C', faisons passer des arcs de grands cercles : nous obtenons insi un second triangle sphérique A'B'C', dont les trois côtés 'C', A'C', A'B', ont réciproquement pour pôles, les trois sommets A, B, C, du premier triangle.

En effet, C' étant un des pôles de l'arc AB, l'arc de grand ercle passant par les points C' et A, est égal à *un quadrant* n° 364); de même, B' étant un des pôles de l'arc AC, l'arc de rand cercle passant par les points B' et A est égal à un quadrant; insi, puisque AC' et AB' sont des quadrants, il s'ensuit (même numéro) que le point A est le pôle de l'arc ou du côté B'C'.

Même raisonnement pour chacun des points B, C, par rapport aux côtés correspondants, A'C', A'B'.

En raison de cette propriété, les deux triangles sont dits des *triangles polaires l'un de l'autre*, ou simplement *des triangles polaires.* — Cela posé :

FIG. 301. THÉORÈME I. (*Fig.* 301.)

N° 373. — *Tout angle d'un triangle sphérique a pour mesure le supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle polaire;* — et de même, — *Chaque côté du premier triangle est le supplément de l'angle qui lui est opposé dans le second.*

Pour démontrer la première partie de la proposition, soient prolongés les côtés CA, CB, du triangle ABC, jusqu'à leur rencontre en D, E, avec le côté A′B′ qui, dans le polaire A′B′C′, est opposé à l'angle C. — Comme le point C est le pôle du côté A′B′ (n° 372), il en résulte que les arcs CD, CE, sont des quadrants (n° 364); ainsi l'arc DE est la mesure de l'angle C (n° 365, *scol.* II). Mais les points A′ et B′ étant aussi les pôles respectifs des côtés BC et AC, les arcs A′E, B′D, sont des quadrants, ce qui donne

$$A'E + B'D, \quad \text{ou} \quad A'D + DE + DB' = A'B' + DE = 2 \; \textit{quadr.};$$

donc A′B′ est le supplément de DE ou de l'angle C.

On démontrerait de la même manière, que A′C′, B′C′, sont les suppléments respectifs des angles B et A.

Quant à la seconde partie, elle résulte nécessairement de ce que les deux triangles sont *polaires l'un de l'autre*. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle C′ a pour mesure le supplément du côté AB, en prolongeant AB jusqu'à sa rencontre en G, K, avec les côtés C′A′, C′B′.

N. B. — En vertu de cette propriété du triangle A′B′C′ par rapport au triangle ABC, on donne au second triangle le nom de *triangle supplémentaire* du premier.

SCOLIE I. — Il est important de faire attention à la manière dont les points C′, B′, A′, ont été déterminés dans l'énoncé; car si l'on considérait les autres pôles [C″, B″, A″] des côtés AB, AC, BC, en les combinant trois à trois avec C′, B′, A′, on pourrait former d'autres triangles sphériques; mais ceux-ci ne jouiraient pas de la propriété énoncée.

Nous ajouterons que cette propriété aurait pu être déduite de la propriété de l'angle trièdre supplémentaire établie au n° **330**; mais la démonstration que nous venons d'exposer nous paraît plus simple.

Scolie II. — Désignons par A, B, C, et A′, B′, C′, les angles de deux triangles polaires réciproques, ABC et A′B′C′, puis, par a, b, c, et a', b', c', les côtés respectivement opposés à ces angles. — On a, d'après le théorème précédent, les relations

$$\mathrm{A} + a' = 2^{droits},\quad \mathrm{B} + b' = 2^{droits},\quad \mathrm{C} + c' = 2^{droits},$$

d'où $$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + a' + b' + c' = 6 \textit{ droits}.$$

Or, tant que le triangle sphérique ABC existe, il en est de même du triangle A′B′C′; et l'on a

1° $$a' + b' + c' < 4 \textit{ droits} \text{ (n° 371, 2°)};$$

d'où $$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} > 2 \textit{ droits};$$

2° $$a' + b' + c' > 0,$$

d'où $$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} < 6 \textit{ droits}.$$

Ainsi, — *Dans tout triangle sphérique, la somme des trois angles est plus grande que* 2 DROITS *et plus petite que* 6 DROITS.

Cette somme peut approcher de chacune de ces limites autant que l'on veut; en sorte que les trois angles peuvent être *aigus*, *obtus*, ou *droits* à la fois, ainsi que nous l'avons déjà établi au numéro **371**.

Dans le triangle *birectangle*, deux des côtés sont égaux à des *quadrants;* et dans le triangle *trirectangle*, les trois côtés sont des *quadrants*. — Tout cela est parfaitement d'accord avec ce qui a été dit au n° **332**, *scol.* I.

Théorème II.

N° 374. — Sur une même sphère ou sur des sphères égales [c'est-à-dire de même rayon], — *Deux triangles sphériques sont égaux, — 1° — lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à des angles égaux chacun à chacun et semblablement disposés*, ou bien, *un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun et semblablement disposés; — 2° — lorsqu'ils ont les trois côtes égaux chacun à chacun*, ou bien, les *trois angles chacun à chacun et semblablement disposés;* —3° — ils peuvent être égaux encore lorsqu'ils ont *deux côtés égaux ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux*, ou bien, *deux angles égaux ainsi que le côté opposé à l'un d'eux* [mais ce dernier cas est susceptible de plusieurs restrictions].

Cet énoncé présente, comme on le voit, *six* cas différents, mais liés deux à deux par la proposition du triangle sphérique supplémentaire.

Quant à la démonstration de chacun d'eux, il suffit de faire coïncider les angles trièdres aux centres, O et O′, correspondant à ces triangles sphériques, lesquels coïncideront aussi nécessairement.

N. B. — On donne le nom de *tétraèdres sphériques* aux deux espaces OABC, O′A′B′C′, déterminés par les faces des angles trièdres, et par les triangles sphériques ABC, A′B′C′; il est évident que ces tétraèdres sphériques coïncident en même temps que les triangles.

Scolie. — Lorsque deux triangles sphériques ont tous leurs éléments égaux chacun à chacun [côtés et angles], mais non disposés de la même manière, on dit que les triangles sont *symétriques*, parce qu'en effet ils correspondent alors à des angles trièdres symétriques. (*Voyez* le n° 334.)

Mais, dans le cas particulier où les triangles sphériques sont isoscèles, c'est-à-dire où l'on suppose AB = AC, A′B′ = A′C′, l'égalité des deux triangles a lieu en même temps que leur symétrie: car alors les angles trièdres correspondants étant isoc-

dres, il s'ensuit que ceux-ci sont aussi égaux et superposables (n° 334, *N. B.*).

Ceci nous conduit à une proposition importante :

THÉORÈME III. (*Fig.* 303.) FIG 303.

N° 378. — *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents* [en surface].

Considérons les triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on suppose les côtés AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C', égaux chacun à chacun, ainsi que les angles opposés à ces côtés, mais disposés symétriquement.

Soit P celui des deux pôles du petit cercle passant par les trois points A, B, C, qui se trouve situé d'un même côté que ce petit cercle, par rapport au centre de la sphère; et joignons le point P aux points A, B, C, par des arcs de grands cercles, PA, PB, PC (n° 364, *scol.* I). Traçons ensuite sur la surface du triangle A'B'C', un arc de grand cercle A'P' qui forme avec A'B' un angle P'A'B' égal à l'angle PAB, et prenons A'P' = AP. Joignons enfin le point P' aux points A', C' par des arcs de grands cercles, P'A', P'C'.

Cela posé, les deux triangles ABP, A'B'P', ont un angle égal, PAB = P'A'B', compris entre côtés égaux, AB = A'B', AP = A'P'; d'ailleurs ils sont isoscèles, puisque AP = PB, A'P' = P'B' (n° 364); ainsi, ces triangles sont égaux et superposables (*scol.* précédent).

Pareillement, les triangles APC, A'P'C', sont égaux et superposables; car d'abord, de ce que les angles BAC et B'A'C', PAB et P'A'B', sont respectivement égaux, il en résulte

$$\textit{angle}\ \mathrm{PAC} = \textit{angle}\ \mathrm{P'A'C'}\,;$$

de plus, les triangles sont isoscèles, puisque

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PC},\quad \mathrm{P'A'} = \mathrm{P'C'}.$$

Même conclusion pour les triangles PCB, P'C'B'.

Les deux triangles ABC, A'B'C', sont donc composés de

parties PAB et P'A'B', PAC et P'A'C', PBC et P'B'C', superposables chacune à chacune, et ayant par conséquent des surfaces égales; donc aussi, les surfaces de ces deux triangles sont égales.

N. B. — Le point P', déterminé par la construction précédente, est le pôle du petit cercle passant par les trois points A', B', C', de même que P est le pôle du petit cercle passant par les points A, B, C.

COROLLAIRE. — On déduit du théorème précédent, que les tétraèdres sphériques OABC, O'A'B'C', sont *équivalents*, puisqu'ils sont composés de parties égales et superposables chacune à chacune (nº 375), comme correspondant à des triangles sphériques égaux et superposables.

Par suite, les angles trièdres correspondant à ces tétraèdres sphériques, sont eux-mêmes équivalents, en ce sens qu'ils sont décomposables, chacun, en trois angles *trièdres isoèdres* que l'on pourrait faire coïncider (nº 364, *scol.* I).

Nous terminerons ce paragraphe par quelques propriétés de la sphère, dont la première peut, au premier abord, sembler *paradoxale*, mais n'en est pas moins une conséquence rigoureuse de la proposition établie au nº 262, pour les arcs de cercle décrits avec des rayons différents, sur une corde commune.

FIG. 304. THÉORÈME IV. (*Fig.* 304.)

Nº 376. — *L'arc de grand cercle* [rectifié], AMB, *passant par deux points quelconques* A, B, *d'une surface sphérique, est moindre que tout arc de petit cercle terminé aux extrémités* A, B.

En effet, soient O le centre de la sphère, R son rayon, ou celui d'un grand cercle, *r* le rayon de l'un quelconque des petits cercles qu'on peut imaginer par les points A et B, enfin, *d* la distance du centre O au plan de ce petit cercle — La rela-

tion $r=\sqrt{R^2-d^2}$, obtenue au nº 363, nous prouve que tous les cercles passant par les points A, B, et situés sur la sphère, ont un rayon plus petit que celui de la sphère ; donc (nº 262) l'arc AMB est moindre que tout autre arc de cercle passant par les mêmes points A, B.

N. B. — Il est bien entendu qu'il ne s'agit ici que de la plus petite des deux portions de circonférence de grand cercle, soutendues par la corde AB.

Scolie. — On peut obtenir les différents arcs de cercle, situés sur un même plan, comme dans la figure 168 du nº 262, en faisant tourner les plans de tous les petits cercles, autour de AB comme charnière, pour les rabattre sur le plan du grand cercle OAB.

L'arc de grand cercle sera l'arc AMB ayant son centre en O; l'arc du petit cercle dont le plan est perpendiculaire au plan OAB, sera vu suivant une demi-circonférence ANB dont le centre sera au milieu *o* de AB; et un tout autre arc de petit cercle se trouvant dans un plan intermédiaire entre les deux précédents, aura un rayon *o'*A plus petit que OA, mais plus grand que *o*A; il sera donc vu suivant un arc ARB, intermédiaire; et l'on aura, comme dans le nº 262,

$$AMB < ARB < ANB.$$

Théorème V. (*Fig.* 304 *bis.*) Fig. 304 *bis.*

Nº 377. — *Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface d'une sphère est le plus petit des deux arcs de grand cercle passant par ces deux points.*

En effet, remarquons d'abord que, d'après sa nature, la sphère est une figure *parfaitement ronde*, en ce sens que toute section de sa surface par un plan mené sous une direction quelconque, est une circonférence de cercle.

Cela posé, soit ACDEB une ligne tracée au hasard sur cette surface, et différente de l'arc AMB; on peut toujours la regarder ou comme un arc de petit cercle, ou comme un assemblage

d'arcs de grands cercles AC, CD, DE, EB, situés dans des plans différents, ou bien enfin, comme un assemblage d'arcs de petits cercles finis ou infiniment petits.

Or, dans le premier cas, la proposition est déjà démontrée d'après ce qui a été dit ci-dessus.

Dans le second, comme les arcs AC, CD,... forment avec l'arc AMB un polygone sphérique, l'arc AMB est moindre que AC + CB +..., (nº 371), ou moindre que ACDEB.

Dans le troisième cas, chacun des arcs de petits cercles AC, CD,... est moindre que l'arc de grand cercle ayant les mêmes extrémités A et C, C et D,...; donc, *à fortiori*,

$$AMB < ACDEB; \qquad C. Q. F. D$$

N. B. — Ce mode de démonstration nous paraît beaucoup plus direct et surtout plus en rapport avec la nature de la sphère, que toutes les démonstrations consignées dans d'autres ouvrages.

§ IV. — *Des polyèdres inscriptibles ou circonscriptibles, et en particulier, des polyèdres réguliers.*

Fig. 305. THÉORÈME I. (*Fig.* 305.)

Nº 378. — *Tout tétraèdre* DABC *est inscriptible à une sphère;* — en d'autres termes, — *On peut toujours faire passer une surface sphérique par quatre points non situés dans un même plan.*

Soient I, I', les centres des cercles circonscrits à deux des faces ABC, ADC, par exemple; et menons les axes IL, I'L', de ces cercles (nº 303, *scol.* I). — Je dis, — 1º — que ces droites se rencontrent en un certain point O; — 2º que le point O est le centre d'une sphère dont la surface contient les quatre points A, B, C, D.

Premièrement, AC étant une corde commune aux deux cercles circonscrits, il s'ensuit que les perpendiculaires à AC, menées par le milieu K de cette corde, dans les plans respectifs ABC, ADC, passent par les points I, I' (nº 41); — de plus, le plan conduit suivant ces perpendiculaires KI, KI', est perpendiculaire à la corde AC (nº 312), et par conséquent aux deux plans ABC, ADC;

lonc il contient les axes IL, I'L' (n° 311); et comme les droites
{I, KI', se coupent, il doit en être de même des axes IL, I'L'
n° 50). — Soit O le point d'intersection de ces deux droites.

En second lieu, tirons les droites OA, OB, OC, OD. On a vu
n° 303) que IL est le lieu de tous les points situés à égale distance
e A, B, C; donc

$$OA = OB = OC.$$

'ar une raison analogue, on a

$$OA = OC = OD.$$

Ainsi, la surface de la sphère qui a pour rayon OA, passe
nécessairement par les autres points B, C, D; *C. Q. F. D.*

Scolie I. — Comme, d'après les raisonnements qui précèdent,
e centre de toute sphère passant par les quatre points A, B, C, D,
loit se trouver à la fois sur IL, et sur I'L', lesquelles droites se
coupent en un point *unique,* il en résulte qu'il ne peut exister
ju'*une seule* sphère satisfaisant à la condition énoncée. — On est
lonc ainsi conduit aux deux propositions suivantes :

1° — *Si, par les centres des cercles circonscrits aux quatre faces d'un tétraèdre, on élève des perpendiculaires aux plans de ces faces, les quatre perpendiculaires concourent en un même point.*

2° — *Si, par les milieux des six arêtes d'un tétraèdre, on mène des plans perpendiculaires* à ces arêtes, et par conséquent aux faces, *les six plans concourent en un même point.*

Ce point *unique,* dans l'un et l'autre énoncé, n'est autre
que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Scolie II. — Le théorème principal peut être énoncé sous forme
de problème, de la manière suivante :

Faire passer une sphère par quatre points donnés.

Mais alors il y a lieu d'examiner diverses hypothèses :

1° — Si les quatre points donnés ne sont pas dans un même

plan, auquel cas ils peuvent être considérés comme les sommets d'un tétraèdre, le problème est toujours possible et admet une *seule* solution.

2° — Si les quatre points sont dans un même plan, et appartiennent à une même circonférence de cercle, tous les points de l'axe (n° **303**, *scol.* I) de cette circonférence sont les centres d'autant de sphères passant par les quatre points; et, dans ce cas, le problème est susceptible d'*une infinité* de solutions.

3° — Si les quatre points, étant dans un même plan, ne se trouvent pas sur une même circonférence de cercle [hypothèse qui comprend comme cas particulier, celui de 3 points en ligne droite], le problème est *impossible*. — Et en effet, dans cette hypothèse, les axes des cercles menés par les quatre points combinés *trois à trois* deviennent *parallèles;* et leur point d'intersection, ou le centre de la sphère, est situé à l'*infini*.

Toutefois, dans ce cas, on pourrait dire que la sphère demandée a un rayon *infini,* ou que son centre est situé à l'*infini*. — La surface serait alors le plan des quatre points donnés.

4° — Enfin, si les quatre points étaient tous en ligne droite, on aurait pour solutions des plans en nombre infini, etc.

Fig. 306.

Théorème II. (*Fig.* 306.)

N° **379**. — *Tout tétraèdre* DABC *est circonscriptible à une sphère*. — ou bien, — *on peut toujours obtenir une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre*.

Considérons les trois plans bissecteurs des angles dièdres à la base ABC; ces plans déterminent un nouveau tétraèdre OABC dont le sommet O peut être pris pour le centre d'une sphère tangente aux quatre faces.

En effet, soient abaissées du point O les perpendiculaires OI, OK, OG, OL, sur les quatre faces ABC, ABD, ADC, DBC. On a vu (n° **328**) que le plan bissecteur OAB est le lieu de tous les points également distants des faces ABC, ABD; donc OI = OK. Pareillement, le plan OBC étant le lieu de tous les points également distants des faces ABC, BCD, on a OI = OL, et par conséquent OI = OK = OL.

On démontrerait encore que OI = OG, et par suite que OI = OK = OG = OL.

Ainsi, la sphère qui a pour centre le point O, et pour rayon OI, passera nécessairement par les quatre points I, K, G, L: et de plus, elle sera tangente aux quatre faces (n° 363).

SCOLIE I. — Comme chacun des angles dièdres à la base n'a qu'un plan bissecteur, et que les trois plans bissecteurs ne sauraient avoir qu'un point commun, il s'ensuit qu'à un tétraèdre donné on ne peut *inscrire* qu'une seule sphère.

On est d'ailleurs conduit à cette nouvelle proposition :

Les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre concourent en un même point qui est le centre de la sphère inscrite.

SCOLIE II. — En procédant comme pour le triangle (n° 173), on pourrait obtenir *quatre* autres sphères [dites alors des sphères *ex-inscrites*], en prolongeant chacune des faces d'un même angle trièdre, de l'autre côté de la face opposée au sommet de cet angle trièdre, puis en menant les plans bissecteurs des angles dièdres supplémentaires. — Mais nous n'insisterons pas sur ces résultats.

Des polyèdres réguliers.

N° 380. — On donne le nom de *polyèdre régulier* à tout *polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont les angles dièdres sont égaux ;* d'où il suit d'abord que les angles polyèdres doivent être eux-mêmes *égaux et réguliers*, et ensuite, qu'un polyèdre régulier est nécessairement *convexe*.

[On voit que cette définition ne comprend pas les prismes réguliers et les pyramides régulières, tels que nous les avons définis aux n°s 339 et 343 ; ici, la régularité porte sur l'espèce et non sur le genre.]

THÉORÈME III.

N° 381. — *Il ne peut exister plus de cinq sortes de polyèdres réguliers.*

En effet, nous savons déjà qu'il faut au moins trois faces pour

former un angle polyèdre, et, en outre, que la somme de toutes les faces de cet angle solide doit être *moindre que 4 droits* (n° 337); il suffit donc de passer en revue tous les angles de polygones réguliers dont les assemblages 3 à 3, 4 à 4, 5 à 5,..., donnent une somme moindre que 4 *droits*.

Or, — 1° — L'angle du triangle équilatéral étant égal à $\frac{2}{3}$ d'1 *droit*, on peut assembler *trois*, *quatre*, ou *cinq* angles du triangle équilatéral, mais pas davantage, puisque $\frac{2}{3} \times 6$ donnerait $\frac{12}{3}$ ou 4 *droits*.

2° — L'angle du carré valant 1, on ne peut assembler que *trois* de ces angles au plus, puisque quatre donneraient une somme égale à 4 *droits*.

3° — L'angle du pentagone régulier valant $\frac{6}{5}$, on ne saurait également assembler que *trois* de ces angles, ce qui donnerait $\frac{6}{5} \times 3$ ou $3\frac{3}{5}$.

Comme $\frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$ est l'angle de l'hexagone régulier, et que $\frac{4}{3} \times 3 = 4$, il s'ensuit que l'on ne peut former un angle solide avec des angles d'hexagones réguliers, et *à fortiori*, de polygones réguliers d'un plus grand nombre de côtés.

Ainsi, les seuls polyèdres réguliers *possibles* sont ceux dont chaque angle solide est formé par *trois*, *quatre*, *cinq* angles de triangle équilatéral, puis par *trois* angles droits, et enfin par *trois* angles de pentagone régulier; en tout *cinq* polyèdres.

C. Q. F. D.

Scolie. — Il resterait à prouver que chacun de ces cinq polyèdres réguliers peut toujours être formé; et c'est ce que nous ferons ultérieurement. Les polyèdres obtenus sont le *tétraèdre régulier* [4 faces], l'*hexaèdre régulier* ou le *cube* (n° 340) [6 faces], l'*octaèdre régulier* [8 faces], le *dodécaèdre régulier* [12 faces], enfin, l'*icosaèdre régulier* [20 faces].

Nous ferons toutefois connaître dès à présent la construction du *tétraèdre* et de l'*hexaèdre*, sur une droite donnée comme côté.

Fig. 307. Soient d'abord ABC (*fig.* 307) le triangle équilatéral construit sur une ligne donnée (n° 187), O le centre du cercle inscrit ou circonscrit à ce triangle. Élevons par ce point une perpendiculaire

au plan ABC; puis, marquons sur cette perpendiculaire un point S tel, que la distance SA soit égale à AB, et tirons les droites SA, SB, SC; nous obtiendrons ainsi le tétraèdre demandé.

Car, 1° — Les trois droites SA, SB, SC, sont égales (n° 303); et puisque, par construction, SA = AB, les quatre faces SAB, SAC, SBC, ABC, sont égales; il en est de même des angles dièdres. Ainsi la figure est un polyèdre *régulier*.

Soit, en second lieu, MNPQ un *carré*. Par les quatre sommets M, N, P, Q, élevons des droites perpendiculaires au plan de ce carré, et égales à MN; puis tirons M′N′, N′P′, P′Q′, Q′M′: la figure MP′ ainsi obtenue est évidemment un *cube* ou un *hexaèdre régulier*.

Théorème IV. (*Fig.* 308.) Fig. 308.

N° 382. — *Tout polyèdre régulier est à la fois inscriptible et circonscriptible à une sphère*; — ce qui veut dire qu'on peut toujours, — 1° — *faire passer la surface d'une sphère par tous les sommets d'un polyèdre régulier*; — 2° — *construire une autre sphère tangente à toutes les faces*.

Soient en effet ABCD..., ABC′D′..., deux faces contiguës quelconques, et I, I′, les centres de ces deux faces. On peut prouver, comme au n° 378, que les axes IL, I′L′, des cercles passant par les sommets des deux polygones réguliers, se coupent en un point O; et si l'on joint ce point à tous les sommets A, B, C, D,..., C′, D′,..., on aura, à cause de OI = OI′ [ainsi qu'on peut le prouver facilement au moyen des triangles rectangles OIK, OI′K], une série d'obliques égales OA, OB, OC, OD,..., OC′, OD′,....

En combinant l'une de ces faces, ABCD.... par exemple, avec une troisième face qui lui soit contiguë, on prouvera de la même manière que l'axe de ce nouveau polygone rencontre IL au même point O, et par suite, que toutes les obliques de jonction du point O aux sommets de la troisième face sont égales aux obliques précédentes; et ainsi de suite.

Il résulte de là que le point O peut être considéré comme le sommet commun à une suite de *pyramides régulières* (n° 343) égales,

ayant pour bases les différentes faces du polyèdre, et pour axes les droites qui joignent le point O aux centres des faces.

Donc — 1° — La sphère qui a pour *centre* le point O, et pour *rayon* OA, passera par *tous* les sommets du polyèdre;

2° — La sphère qui a pour *centre* le même point O, et pour *rayon* OI, sera *tangente à toutes les faces* du polyèdre aux points I, I′, I″,....; *C. Q. F. D.*

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE. — PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Introduction.

N° 383. — Dans le troisième chapitre de chacun des deux premiers livres, nous avons exposé les moyens de résoudre graphiquement des problèmes qui se rapportent aux figures planes. — L'objet que nous nous proposons dans celui-ci étant de résoudre des problèmes sur les points, les lignes, les surfaces et les corps, il est naturel de se demander comment on peut arriver à leur solution par des constructions exécutées *sur un seul et même plan*. Or, c'est à quoi l'on parvient en employant le secours d'une science dont l'invention est due, en grande partie, à l'illustre Monge, l'un des fondateurs de l'École Polytechnique. Du moins, c'est lui qui a le plus contribué à réunir les éléments de cette science en un corps de doctrine.

Ainsi, avant de nous occuper de la résolution de nouveaux problèmes, nous devons poser les principes fondamentaux de la *Géométrie descriptive*, branche des mathématiques dont le but principal est de représenter et de fixer, au moyen de constructions exécutées sur *une feuille de dessin*, la position absolue ou relative d'un ou de plusieurs objets dont les diverses parties sont généralement dans des plans différents.

N° 384. — *Définitions.* — Considérons deux plans perpendiculaires entre eux, l'un, MN (*fig.* 309), que nous nommerons PLAN HORIZONTAL [c'est *la feuille de dessin* sur laquelle doivent s'exécuter toutes les constructions]; l'autre, NP, nommé PLAN VERTICAL. — Ces deux plans se coupent suivant une droite LL′ désignée ordinairement sous la dénomination de LIGNE DE TERRE. Fig. 309.

Cela posé, si nous nous rappelons (n° 328) que *la projection d'un point sur un plan* est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan, et que *la projection d'une droite sur un plan* est la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées des différents points de la droite donnée sur le plan, nous dirons,

1° — Que la projection *horizontale* d'un point A de l'espace, est la projection *a* de ce point sur le plan horizontal, et que sa projection *verticale* est la projection *a′* de ce même point sur le plan vertical;

2° — Que les projections *horizontale* et *verticale* d'une droite AB sont les projections *ab*, *a′b′*, de cette droite sur le plan horizontal et sur le plan vertical.

Les deux plans MN, NP, portent conjointement le nom de PLANS DE PROJECTION.

Les plans AB*ba*, AB*b′a′*, qu'on doit imaginer par la droite AB, perpendiculairement aux deux plans MN, NP, pour obtenir les deux projections de cette droite, tant sur le plan horizontal que sur le plan vertical, se nomment LES DEUX PLANS PROJETANTS.

Maintenant, on donne le nom de TRACES d'un plan quelconque aux intersections CD, C′D, de ce plan avec les deux plans de projection; CD est *la trace horizontale*, et C′D *la trace verticale:* — ces deux traces se coupent nécessairement *en un même point* de la ligne de terre LL′, et fixent la position du plan.

Si le plan que l'on considère est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan vertical par exemple, sa *trace horizontale* EG est *perpendiculaire* à la ligne de terre (n° 312), puisqu'elle est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal. De même, un plan perpendiculaire au plan horizontal a sa *trace verticale perpendiculaire* à la ligne de terre.

N° 385. — Pour compléter ces notions préliminaires, nous

avons encore à faire une remarque importante, savoir : — Comme toutes les opérations graphiques doivent, en définitive, être exécutées, soit sur une feuille de dessin *horizontale*, soit même sur un tableau *vertical*, on est, à chaque instant, obligé de supposer
Fig. 309. que l'un des plans de projection, NP par exemple (*fig.* 309), tourne autour de la ligne de terre LL′ pour venir se rabattre sur l'autre plan. Il arrive alors [et c'est une circonstance qu'il faut se rappeler continuellement] qu'après le rabattement, puisque les deux plans de projection s'étendent indéfiniment en tous sens, la partie *inférieure*, NP′, du plan vertical (*) vient se confondre avec la partie *antérieure*, MN, du plan horizontal, et au contraire, que la partie *supérieure*, NP, du plan vertical, vient se confondre avec la partie *postérieure*, QN′, du plan horizontal, c'est-à-dire avec la partie de ce plan que cache le plan vertical.

Ces notions étant établies, nous diviserons le chapitre en trois paragraphes. — Le *premier* aura pour objet ce qu'on nomme la *méthode des projections*, ainsi que ses applications à différents problèmes sur le point, la ligne droite et le plan ; le *second*, la méthode *de rabattement* et ses principales applications ; enfin le *troisième* comprendra diverses questions sur la *sphère*, qui se rattachent plus ou moins directement, soit à la méthode des projections, soit à celle de rabattement.

§ I. — *Méthode des projections.*

Principes fondamentaux.

Fig. 310. PREMIER PRINCIPE. (*Fig.* 310.)

N° 386. — *Les projections horizontale et verticale*, o, o′, *d'un point* O *de l'espace, doivent être*, après le rabattement du plan vertical de projection, par exemple, *sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre.*

En effet, par les perpendiculaires Oo, Oo′, abaissées du point O

(*) On suppose ordinairement que le mouvement se fasse d'avant en arrière.

sur les plans de projection, conduisons un plan : ce plan, étant à la fois perpendiculaire au plan horizontal et au plan vertical (n° 309), l'est aussi à leur intersection LL′ (n° 312), et par conséquent, il coupe les plans de projection suivant des droites ok, $o'k$, passant par le même point k, et perpendiculaires à LL′. Or, dans le mouvement que fait le plan vertical pour se coucher sur le plan horizontal, la droite $o'k$ ne cesse pas d'être perpendiculaire à LL′; donc, après le rabattement, le point o' doit venir se placer en o'', sur le prolongement de ok; ainsi, les points o, o'', qui représentent actuellement les projections du point O, sont situés sur une même droite oo'' perpendiculaire à la ligne de terre.

N. B. — La figure $Ooko'$ étant un rectangle, on a

$$Oo = o'k = o''k, \quad \text{et} \quad Oo' = ok,$$

ce qui prouve que la distance du point O de l'espace, au plan horizontal, est également représentée par Oo et par $o'k$ ou $o''k$; de même, Oo', ok, représentent également sa distance au plan vertical.

SCOLIE I. — RÉCIPROQUEMENT, *lorsqu'*après le rabattement du plan vertical, *on donne deux points* o, o″, *sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre, ces points peuvent être considérés comme les projections d'un même point de l'espace, et en fixent généralement la position.*

Car, supposons que les plans de projection soient remis dans leur véritable position [de plans rectangulaires] : — dans ce mouvement, la droite ko'' ne cessera pas d'être perpendiculaire à LL′, et prendra une position telle que ko'; dès lors, les droites ko', ko, détermineront un plan perpendiculaire à LL′ (n° 309); et si, par les points o, o', on élève des perpendiculaires respectives aux deux plans de projection, ces nouvelles droites, étant situées dans le plan oko' (n° 311), se rencontreront en un certain point O (n° 80) qui ne pourra être autre que celui dont les points o et o' ou o'' sont les projections.

Ainsi, les deux projections d'un point en fixent la position.

N. B. — Il faut observer, toutefois, que, d'après la remarque

faite au n° 385, les points o, o'', considérés comme projections d'un même point O de l'espace, représentent également les projections d'un second point O', qui serait situé *derrière* le plan vertical, et *au-dessous* du plan horizontal.

SCOLIE II. — Lorsqu'un point r est situé dans le plan horizontal, il est à lui-même sa propre projection *horizontale*; et sa projection *verticale* doit être le pied r' de la perpendiculaire abaissée du point r sur la ligne de terre (n° 311). — De même, la projection *verticale* d'un point s' situé dans le plan vertical, est le point s' lui-même; et sa projection *horizontale* est sur la ligne de terre en s, pied de la perpendiculaire abaissée du point s'.

FIG. 309, 311. DEUXIÈME PRINCIPE. (*Fig.* 309 et 311.)

N° 387. — *Les projections horizontale et verticale d'une droite de l'espace étant données, la droite est*, en général, *complétement déterminée de position.*

Il peut se présenter plusieurs cas :

PREMIER CAS. — Nous supposerons d'abord qu'aucune des deux projections ne soit ni parallèle ni perpendiculaire à la ligne de terre.

FIG. 309. Soient donc ab, $a'b'$ (*fig.* 309), ces deux projections. — Par ces droites conduisons des plans respectivement perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical; — ces plans perpendiculaires doivent nécessairement se couper, puisque, autrement, ils seraient parallèles; et comme la trace verticale du plan mené par ab est perpendiculaire à la ligne de terre LL' (n° 384), il devrait en être de même de la droite $a'b'$, trace verticale du second plan (n° 34, 4°), ce qui serait contre la supposition. Or, ces deux plans se coupant, leur intersection ne saurait être qu'une droite AB dont ab, $a'b'$, sont les deux projections; et cette droite est unique.

DEUXIÈME CAS. — Supposons maintenant que l'une des deux projections données, la projection horizontale cd par exemple, FIG. 311. (*fig.* 311), soit *parallèle* à la ligne de terre, la projection verticale étant une droite quelconque $c'd'$: — dans ce cas, les deux plans

perpendiculaires se rencontreront encore, puisque le plan passant par $c'd'$ coupe le plan vertical de projection, et que celui-ci est nécessairement parallèle au plan mené suivant cd (n° 322); l'intersection de ces deux plans perpendiculaires sera alors la droite CD dont les projections sont cd, $c'd'$: — cette droite est d'ailleurs *parallèle au plan vertical* de projection, puisqu'elle se trouve située dans un plan parallèle à celui-ci.

On démontrerait de même qu'une droite $e'f'$ parallèle à la ligne de terre, et une autre droite quelconque ef, sont les projections, *verticale* et *horizontale*, d'une certaine droite EF *parallèle au plan horizontal.*

TROISIÈME CAS. — On peut encore supposer que les deux droites données, gk, $g'k'$, soient à la fois *parallèles à la ligne de terre.* — Dans ce cas, il est facile de reconnaître que les deux plans perpendiculaires se rencontrent encore; et leur intersection est une droite GK qui est elle-même parallèle à la ligne de terre LL'.

QUATRIÈME CAS. — Enfin, on peut supposer que l'une des projections, par exemple la projection *horizontale*, soit une droite rs perpendiculaire à la ligne de terre; mais alors, la projection *verticale* $r's'$ doit être elle-même perpendiculaire à LL', et située sur le prolongement de rs. — Car le plan mené par rs perpendiculairement au plan horizontal, étant en même temps perpendiculaire au plan vertical (n° 311), représente à la fois le plan *projetant* de la droite de l'espace, sur chacun des deux plans de projection.

Dans ce cas, la droite de l'espace aura une position tout à fait *indéterminée* dans ce plan. — Elle pourra, par exemple, être *perpendiculaire* au plan vertical; et alors, ses deux projections seront la droite rs et un point quelconque de la droite $r's'$ [prolongement de rs]; ou *vice versâ.*

On voit donc que, ce quatrième cas excepté, une droite est complétement déterminée par ses deux projections.

SCOLIE. — Toute droite EF (*fig.* 311), parallèle au plan horizontal, est dite *une ligne horizontale;* — mais il n'est pas vrai de dire que toute droite parallèle au plan vertical soit une *verticale,* FIG. 311.

puisque, d'après le troisième cas traité plus haut, une droite peut être à la fois parallèle au plan horizontal et au plan vertical.

On donne le nom de *verticale* à toute droite perpendiculaire au plan horizontal (*).

Tout plan mené par une *verticale* est dit un *plan vertical* comme étant perpendiculaire au plan horizontal de projection; et tout plan *parallèle au plan horizontal* de projection est dit un *plan horizontal*.

Troisième Principe.

N° 388. — *Les projections horizontales et verticales de deux droites parallèles dans l'espace sont respectivement parallèles.*

Car si, d'un point de chaque droite, on mène une perpendiculaire au plan horizontal, les plans verticaux (n° 386, *scol.*), passant respectivement par les deux droites et par les deux perpendiculaires, seront parallèles (n° 322); donc leurs intersections avec le plan horizontal, qui ne sont autre chose que les projections horizontales des deux droites, sont parallèles entre elles (n° 318). — Même raisonnement pour les projections verticales.

Scolie. — Pareillement, *les traces horizontales et verticales de deux plans parallèles sont respectivement parallèles* (même numéro).

Fig. 312.

Quatrième et dernier Principe. (*Fig.* 312.)

N° 389. — *Lorsqu'une droite* AB *et un plan* RS *sont perpendiculaires entre eux, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.*

Concevons, par exemple, le plan *projetant* de la droite AB sur le plan horizontal MN; et soit *ab* la trace horizontale de ce plan projetant, laquelle n'est autre que la projection horizontale de la droite. — Soit, en outre, RT la trace horizontale du plan RS.

Cela posé, le plan projetant AB*ba* est en même temps perpendiculaire au plan horizontal et au plan donné RS, puisqu'il passe par une droite AB perpendiculaire à celui-ci (n° 309); donc il est

(*) Ce n'est autre chose que la direction du *fil à plomb*.

perpendiculaire à leur intersection commune RT : réciproquement RT est perpendiculaire au plan projetant, et par conséquent aussi à la droite *kab* qui passe par son pied *k* dans ce plan ; ainsi *ab* est perpendiculaire à RT.

On démontrerait d'une manière analogue que la projection verticale de la droite est perpendiculaire à la trace verticale du plan.

Scolie. — Il n'est pas vrai de dire que si deux droites sont *perpendiculaires* dans l'espace, leurs projections, sur le plan horizontal ou sur le plan vertical, soient perpendiculaires entre elles.

En général, suivant l'inclinaison du plan de deux droites perpendiculaires entre elles, par rapport au plan horizontal, l'angle formé par leurs projections horizontales peut passer par tous les états de grandeur depuis *zéro* jusqu'à *deux droits*.

On nomme *projection horizontale* d'un angle dans l'espace, l'angle formé par les projections de ses deux côtés sur le plan horizontal, et *projection verticale* d'un angle, l'angle formé par les projections des côtés sur le plan vertical.

Passons maintenant aux différents problèmes de la Géométrie descriptive, que l'on nomme les PRÉLIMINAIRES.

Observation importante. — Jusqu'ici, nous avons eu recours à des figures *en relief* pour expliquer les définitions et les principes fondamentaux. — Mais, dorénavant, nous nous bornerons à tracer *la ligne de terre* pour représenter les deux plans de projection, plans dont elle est, en quelque sorte, la ligne de séparation. On ne doit pas alors perdre de vue ce qui a été dit au n° 388, savoir : que la partie de la figure qui est en avant de la ligne de terre représente à la fois, et la partie *antérieure* du plan horizontal, et la partie *inférieure* du plan vertical, tandis que l'autre partie de la figure représente à la fois, et la partie *postérieure* du plan horizontal, et la partie *inférieure* du plan vertical.

Nous ajouterons que, pour abréger le discours, nous représenterons presque toujours par [*ab*, *a'b'*] une droite de l'espace, dont les projections seront *ab*, *a'b'* ; et cette droite sera alors désignée

elle-même par AB. — De même, $[a, a']$, $[b, b']$,... représenteront les points A, B,... de l'espace.

Enfin, nous nommerons, suivant l'usage, Épure d'un problème, l'ensemble des constructions que l'on aura exécutées avec la règle et le compas, pour parvenir à le résoudre.

Fig. 313. **Problème I.** (*Fig.* 313.)

N° 390. — *Les projections de deux points étant données, construire la distance entre ces deux points.*

Soient LL' la ligne de terre, $[a, a']$, $[b, b']$ les deux points donnés A, B. — Remarquons d'abord que les perpendiculaires abaissées de ces points sur le plan horizontal, tombant en a, b, forment avec ab, AB, un trapèze vertical ABab. — Maintenant, imaginons que le plan de ce trapèze tourne autour de sa trace horizontale ab, pour se rabattre sur le plan horizontal: les perpendiculaires dont nous venons de parler se rabattront suivant deux droites $aA = ka'$, $bB = gb'$ (n° 386, *N. B.*), perpendiculaires à ab; et si l'on joint les points A et B, on aura AB pour la distance demandée.

Scolie. — Si, dans le trapèze rabattu ABba, nous menons par le point A le plus rapproché de la ligne ab, une parallèle AB'' à cette droite, nous formerons un triangle rectangle AB''B dans lequel on aura AB'' $= ab$, et BB'' égal à la différence des distances des deux points A, B, au plan horizontal, lesquelles distances sont représentées sur la figure par les lignes données $a'k$, $b'g$.

De là résulte un autre moyen de construction du problème proposé :

1° — *Menez* par le point a' la droite $a'f$ parallèle à la ligne de terre LL';

2° — A partir du point f, *portez* sur la droite fa' prolongée, une distance fa'' égale à ba;

3° — *Tirez* $b'a''$.

Vous obtenez ainsi la distance demandée; car, d'après cette construction, les triangles $b'a''f$, BAB'', sont évidemment égaux.

N. B. — Cette construction est plus simple que la première, en

ce que les perpendiculaires ka', gb', étant déjà données d'après l'énoncé, il suffit de mener par le point a' une parallèle à LL', tandis que dans la première construction, on est obligé de mener deux perpendiculaires aA, bB.

PROBLÈME II. (*Fig.* 314.)

FIG. 314.

N° 391. — *Déterminer les traces horizontale et verticale d'une droite* [ab, $a'b'$], c'est-à-dire, *les points où la droite* AB *perce* ou *rencontre chacun des plans de projection.*

ANALYSE. — Le point où la droite perce le plan horizontal est à lui-même sa projection *horizontale* (n° 388, *scol.* II); et sa projection *verticale* est à la fois, et sur la projection verticale de la droite, et sur la perpendiculaire menée du même point à la ligne de terre LL'. — Pareillement, la trace verticale de la droite a pour projection *verticale* cette trace elle-même, et pour projection *horizontale* le point de rencontre de la projection horizontale de la droite, avec la perpendiculaire abaissée de cette trace sur la ligne de terre. — On est ainsi conduit à la construction suivante :

SYNTHÈSE. — 1° — *Prolongez* $a'b'$ jusqu'à sa rencontre en r' avec LL', et *élevez* au point r' une perpendiculaire à LL' : elle rencontre ab en un point r, qui n'est autre que la trace horizontale de la droite AB.

2° — *Prolongez* ab jusqu'à sa rencontre en s avec LL', et *élevez* au point s une perpendiculaire à LL' : le point s', où cette perpendiculaire rencontre $a'b'$, est la trace verticale de la droite AB.

N. B.—Si la droite AB avait la position indiquée par [ab, $a'b'$] (*fig.* 315), la construction serait la même; mais alors le point r serait situé *derrière* le plan vertical, et le point s' serait *au-dessus* du plan horizontal (*voyez* la remarque du n° 385). FIG. 315.

SCOLIE. — On peut avoir besoin de connaître *l'angle* que forme la droite AB avec le plan horizontal, c'est-à-dire avec sa projection horizontale ab (n° 326). — Or, il suffit, pour cela, de remarquer que, dans l'espace, la droite qui joint les points r, s',

b'P, cP, ou Q'P, QP, doivent se couper en un même point P de la ligne de terre.

Fig. 317. **Problème VI.** (*Fig.* 317.)

N° 395. — *Étant donnés les deux plans* NMN', QPQ', *construire les projections de leur intersection commune.*

Puisque les traces horizontales MN, PQ, appartiennent aux deux plans, le point a où elles se coupent, est un point de leur intersection commune; et c'est celui où elle perce le plan horizontal. En abaissant de ce point une perpendiculaire aa' sur la ligne de terre, on aura a' pour sa projection verticale.

De même, puisque le point b', où se coupent les traces verticales des deux plans, est la trace verticale de l'intersection commune, le pied b de la perpendiculaire abaissée du point b' sur LL', sera sa projection horizontale.

Donc les droites de jonction, ab, $a'b'$, sont les projections *horizontale* et *verticale* de l'intersection commune des deux plans.

N° 396. — Scolie. — Cette construction suppose que les points a, b', sont connus de position sur le plan de la figure. Mais il peut arriver que les traces des deux plans ne puissent se rencontrer qu'à une très-grande distance, comme l'indique la
Fig. 318. *fig.* 318.

Dans ce cas, il faut employer une autre méthode :

Prenons sur la ligne de terre LL' un point p beaucoup plus rapproché de M, que ne l'est le point P; et menons les droites pq, pq', respectivement parallèles à PQ, PQ'; ces parallèles seront les traces d'un nouveau plan parallèle au plan QPQ'; et son intersection avec le plan NMN' devra être parallèle à l'intersection cherchée (n° 318).

Cela posé, nous pouvons, comme dans le numéro précédent, déterminer les projections ab, $a'b'$, de l'intersection des deux plans NMN', qPq', auxquelles les projections cherchées devront être parallèles (n° 388). Ainsi, il suffit d'obtenir un point de chacune de ces dernières.

A cet effet, supposons, pour le moment, que A, B', soient les

points de concours des traces MN et PQ, MN′ et PQ′, que B, A′, soient les points des deux projections cherchées, qui se trouvent situés sur la ligne de terre; et tirons AB, A′B′. — Les deux couples de triangles semblables, AMP et *a*M*p*, AMB et *a*M*b*, donnent les deux proportions

$$\text{AM} : a\text{M} :: \text{MP} : \text{M}p,$$
$$\text{AM} : a\text{M} :: \text{MB} : \text{M}b;$$

d'où, à cause du rapport commun,

$$\text{M}p : \text{MP} :: \text{M}b : \text{MB}.$$

Or, les trois premiers termes de cette proportion sont des lignes connues; ainsi, la position du point B peut être facilement déterminée (n° 207); et, en menant par le point B une parallèle à *ba*, on aura la projection horizontale de l'intersection commune.

De même, en construisant le quatrième terme de la proportion

$$\text{M}p : \text{MP} :: \text{M}a' : \text{MA}',$$

et menant par le point A′ une parallèle à *a′b′*, on aura la projection verticale.

N. B. — Nous pourrions donner ici un moyen direct, emprunté aux seuls principes de la Géométrie descriptive, pour obtenir un point particulier de l'intersection commune; mais l'exposition de ce moyen exigerait trop de détails : il nous suffira de dire que c'est en imaginant des plans parallèles au plan horizontal ou au plan vertical de projection, qu'on parvient à ce but.

PROBLÈME VII. (*Fig.* 319.) FIG. 319.

N° 397. — *D'un point donné* [*a*, *a′*] *hors d'un plan* NMN′, *mener une perpendiculaire à ce plan*, et *construire la longueur de cette perpendiculaire*, c'est-à-dire, *la distance entre le point donné et le point où la perpendiculaire rencontre le plan.*

En vertu du quatrième principe (n° 389), les projections de la droite cherchée doivent être respectivement perpendiculaires aux traces du plan donné; d'ailleurs elles doivent passer, l'une par le

point a, l'autre par le point a'; donc les droites ab, $a'b'$, abaissées perpendiculairement à NM, N'M, sont les projections demandées.

Quant à la seconde partie de la question, elle serait ramenée au problème du n° 390 si l'on pouvait déterminer les projections du point où la perpendiculaire perce le plan.

Pour fixer la position de ce point, concevons par la droite le plan qui a servi à la projeter sur le plan horizontal : — Les traces de ce plan *projetant* sont, d'abord, la droite abs, projection horizontale de la perpendiculaire, puis, une droite ss' perpendiculaire à la ligne de terre (n° 391). Ensuite, ce même plan coupe le plan donné NMN' suivant une droite qui contient le pied de la perpendiculaire; ainsi, tout se réduit à avoir les projections de l'intersection commune des deux plans NMN' et ass'. Or, sa projection horizontale est as, et sa projection verticale s'obtient en abaissant (n° 398) du point p une perpendiculaire pp' sur la ligne de terre, puis joignant le point p' au point s'.

Quant à la projection verticale du point cherché, comme elle doit être à la fois sur $a'b'$ et sur $p's'$, elle se trouve à la rencontre k' de ces deux droites. Cela posé, abaissons du point k' une perpendiculaire sur la ligne de terre, et prolongeons cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en k, avec la droite ab, droite qui représente en même temps, et la projection horizontale de la perpendiculaire, et la projection horizontale de l'intersection des plans NMN', ass', nous aurons la projection horizontale du pied de la perpendiculaire.

Connaissant les projections [a, a'], [k, k'] de deux points, on obtiendra leur distance, d'après le second moyen de construction indiqué au n° 395; ce qui donnera enfin $a'k''$ pour la longueur de la perpendiculaire.

N. B. — Comme moyen de vérification, on peut concevoir le plan qui a servi à projeter la perpendiculaire sur le plan vertical. — Les traces de ce plan sont $a'b'r'$ et $r'r$ [perpendiculaire à LL']. — Les projections de l'intersection du nouveau plan projetant avec le plan donné NMN' sont $a'r'$ et rq'; le point de rencontre de rq'

avec ab doit être précisément le point k déjà déterminé, si la construction a été faite exactement.

Problème VIII. (*Fig.* 320.) Fig. 320.

N° 398. — Réciproquement : — *Par un point donné* $[a, a']$, *mener un plan perpendiculaire à une droite* donnée $[bc, b'c']$.

Puisque les traces du plan cherché doivent être respectivement perpendiculaires aux droites données bc, $b'c'$, il suffit de connaître un point de chaque trace ; et pour y parvenir, nous pouvons employer une construction analogue à celle du n° 394 : — Par le point donné $[a, a']$ et dans le plan cherché, supposé connu, imaginons une *horizontale*, c'est-à-dire, une parallèle à la trace horizontale de ce plan : — les projections de cette parallèle seront, d'abord une droite $a'd'$ parallèle à LL', puis une droite ad parallèle à la trace horizontale du plan cherché, et par conséquent perpendiculaire à la projection horizontale bc de la droite donnée.

Déterminant ensuite (n° 391) le point d' où cette droite perce le plan vertical, et menant par d' une perpendiculaire $Q'd'P$ à la droite $b'c'$, nous aurons la trace verticale du plan demandé.

Menons de même par le point $[a, a']$ une parallèle $[af, a'f']$ à la trace verticale du plan, et déterminons le point f où cette parallèle rencontre le plan horizontal : alors, abaissant du point f une perpendiculaire QfP sur ab, nous aurons la trace horizontale du plan demandé. — Si la construction est bien faite, il faut que les deux droites $Q'd'$, Qf, se coupent en un même point P de la ligne de terre.

N. B. — Les traces du plan étant connues ainsi que les projections de la droite, on peut, comme dans le problème précédent, déterminer le point de rencontre de la droite et du plan.

Scolie I. — A la question qui vient d'être résolue, se rattache immédiatement la suivante : — *Mener d'un point donné* $[a, a']$ *hors d'une droite* $[bc, b'c']$, *une perpendiculaire à cette droite.*

Commencez d'abord par *construire les traces* d'un plan passant par le point $[a, a']$, et perpendiculaire à la droite $[bc, b'c']$. —

Déterminez ensuite le point où le plan rencontre la droite, et *joignez* les projections de ce point avec les projections du point donné : — vous obtenez ainsi les projections de la perpendiculaire demandée.

SCOLIE II. — Tant que le point [a, a'] est situé hors de la droite [bc, $b'c'$], le dernier problème est susceptible d'une solution et n'en offre qu'*une seule*. — Mais si le point se trouve sur la droite, le problème est *indéterminé*, puisqu'en effet le plan construit est (n° 299) le lieu de toutes les perpendiculaires menées du point donné à la droite. — Il serait même *indéterminé* dans le cas général, si l'énoncé du problème ne disait pas *explicitement* que les deux droites dussent se rencontrer.

FIG. 321. PROBLÈME IX. (*Fig.* 321.)

N° 399. — *Construire l'angle de deux droites données par leurs projections.*

Nous supposerons ici que les deux droites se coupent, puisque, si elles se croisaient dans l'espace sans se rencontrer, il faudrait (n° 328, *scol.* I), pour obtenir l'angle de ces droites, *mener* par un point de l'une d'elles une parallèle à l'autre, et *déterminer* l'angle que fait cette parallèle avec la première droite.

De plus, les projections du point commun doivent être (n° 390) situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Soient donc [ab, $a'b'$], [ac, $a'c'$], les projections des deux droites données. — Déterminons d'abord (n° 391) leurs traces horizontales b, c, et tirons de plus la droite bc. — Nous remarquerons que le point A et les points b, c, forment, dans l'espace, un triangle dont l'angle au sommet A est l'angle demandé ; et nous connaîtrons cet angle si, en faisant tourner le plan du triangle Abc autour de sa trace horizontale bc, pour le rabattre sur le plan horizontal, nous pouvons avoir la position du point A dans le plan rabattu.

A cet effet, soit abaissée du point a, projection horizontale du sommet A, une droite ak perpendiculaire sur bc, et concevons le point k joint au point A de l'espace ; cette ligne de jonction Ak doit

ître (n° 300) perpendiculaire à *bc*, et n'est autre que la hauteur du triangle A*bc*. Or, cette hauteur peut être facilement construite; car elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont *ak* est un côté de l'angle droit, et A*a* = *a'h* (n° 386, *N. B.*) l'autre côté. Si donc nous portons *ak* sur *h*L de *h* en *g*, et que nous tirions *a'g*, nous aurons *a'g* pour la hauteur A*k*.

Prolongeons maintenant *ka* indéfiniment, et portons *a'g* de *k* en A : ce dernier point représentera le sommet du triangle dans le plan rabattu.

Tirant enfin A*b*, A*c*, nous obtiendrons *b*A*c* pour l'angle demandé.

N. B. — On aurait encore le triangle A*bc*, dans le plan rabattu, en construisant (n° 390) les longueurs des droites A*b*, A*c*, dont les projections sont, d'une part, *ab*, *a'b'*, et, de l'autre, *ac*, *a'c'*, puisqu'alors on connaîtrait les trois côtés *bc*, A*b*, A*c*, du triangle. Mais cette construction est moins simple que la précédente.

COROLLAIRE. — Pour — *Construire l'angle d'une droite et d'un plan* [qui n'est autre (n° 326) que l'angle formé par la droite avec sa projection sur le plan] :

D'un point quelconque de la droite, *abaissez* (n° 397) une perpendiculaire sur le plan; puis *déterminez* l'angle que forme cette perpendiculaire avec la droite donnée : — vous obtenez ainsi le *complément* de l'angle cherché, et par suite, cet angle lui-même.

SCOLIE. — Les projections de la *bissectrice* de l'angle des deux droites peuvent être obtenues facilement d'après la construction du problème principal.

Déterminez d'abord la bissectrice A*m* de l'angle *b*A*c* rabattu, et prolongez-la jusqu'à sa rencontre en *m* avec la trace horizontale *bc* du plan qui contient l'angle. — *Joignez* ensuite le point *m* au point *a* : — vous obtenez ainsi la projection horizontale *am* de la bissectrice.

Projetez *m* en *m'* sur la ligne de terre, et *tirez* *a'm'* : — vous obtenez la projection verticale.

FIG. 322. **PROBLÈME X.** (*Fig.* 322.)

N° 400. — *Construire l'angle de deux plans* NMN′, QPQ′.

1re SOLUTION. — D'un point quelconque de l'espace *abaissez* de droites respectivement perpendiculaires aux deux plans (n° 397 ; — puis *déterminez* l'angle de ces deux perpendiculaires (n° 399, lequel sera l'angle demandé ou son *supplément* (n° 325, *scol.* 1

Mais on peut employer une construction plus simple.

2e SOLUTION. — Soit d'abord déterminée (n° 398) la projection horizontale *ab* de leur intersection commune, qui n'est autre que la droite de jonction du point *a* au point *b′* [les deux plans de projection étant supposés dans leur véritable position]. Concevons ensuite en un point quelconque O de cette intersection commune un plan qui lui soit perpendiculaire. — La trace horizontale sera une certaine droite *cd* perpendiculaire à la projection *ab* (n° 389), et cette droite pourra être considérée comme la base d'un triangle O*cd*, dont l'angle au sommet O sera l'angle demandé. Tâchons donc d'obtenir ce triangle dans son plan rabattu sur le plan horizontal.

Pour cela, remarquons que le plan dont la trace est *cd*, et le plan vertical conduit suivant *ab*, se coupent, dans l'espace, suivant une droite O*i* qui est à la fois perpendiculaire à l'intersection commune des deux plans donnés [comme se trouvant dans le plan O*cd* perpendiculaire à cette intersection], et à la droite *cd*, puisque *cd* est (n° 389) perpendiculaire au plan projetant. La droite O*i* est donc la hauteur du triangle O*cd*. Or, on aura la grandeur de cette hauteur en imaginant que le triangle rectangle dont *ab′* est l'hypoténuse, et *ab*, *bb′*, les deux côtés de l'angle droit, tourne autour de *bb′* comme charnière, pour venir prendre position sur le plan vertical de projection. Dans ce mouvement, les points *a*, *i*, décriront autour du point *b* des arcs de cercle, et viendront se placer en *a′*, *i′*; la droite *b′a* sera alors représentée par *b′a′*, et la hauteur cherchée par une perpendiculaire *i′o′* abaissée sur *b′a′*. — Cette perpendiculaire étant construite, il ne s'agira plus que de la porter

sur ia de i en O; et en tirant cO, dO, on obtiendra cOd pour l'angle demandé.

SCOLIE I. — Si les traces des deux plans donnés avaient des directions indiquées par la *figure* 318, on aurait recours au plan auxiliaire qpq'; et la construction rentrerait dans le cas précédent. FIG. 318.

SCOLIE II. — En divisant l'angle rabattu cOd en deux parties égales, et joignant le point a au point g où cette bissectrice rencontre la trace horizontale du triangle Ocd, on obtient la trace horizontale du *plan bissecteur* de l'angle des deux plans. — Quant à sa trace verticale, il suffit de joindre le point b' au point k où la trace ag rencontre LL'.

Ainsi, ak et $b'k$ sont les traces de ce plan bissecteur.

PROBLÈME XI. (*Fig.* 323.) FIG. 323.

N° 401. — *Construire les angles qu'un plan* NMN' *forme avec le plan horizontal et avec le plan vertical.*

Ce problème, qui n'est qu'un cas particulier du précédent, mérite une attention spéciale, à cause de ses nombreuses applications.

En un point quelconque A de MN, menons un plan perpendiculaire à cette droite : — ce plan coupe le plan horizontal et le plan donné suivant deux droites perpendiculaires à MN (n° 299), et formant entre elles le premier des angles demandés. Or, la trace horizontale de ce plan est AB perpendiculaire à MN; sa trace verticale est BC perpendiculaire à LL', et son intersection avec le plan donné est une droite qui perce les deux plans de projection l'un au point A, l'autre au point C, rencontre des deux traces MN', BC.

Faisons maintenant tourner le triangle ABC, rectangle en B, autour de BC comme charnière, de manière à le rabattre dans le plan vertical de projection : — dans ce mouvement, BA vient s'appliquer sur LL', et prend la position BA'. En joignant alors le point C au point A', nous obtenons CA'B pour l'angle que forme le plan donné avec le plan horizontal.

Le second angle s'obtient en menant par un point quelconque D de MN', la droite DE perpendiculaire à MN', puis EF perpendiculaire à LL', rabattant ensuite ED de E en D', enfin tirant FD' :

— l'angle FD'E est celui que forme le plan donné avec le plan vertical.

N. B. — On aurait pu également rabattre le premier angle autour de AB dans le plan horizontal, et le second autour de DE dans le plan vertical.

Scolie. — Si l'on tire la bissectrice A'G de l'angle CA'B, et qu'on joigne le point M au point G, il est facile de reconnaître que MG et MN sont les traces du *plan bissecteur* de l'angle formé par le plan donné avec le plan horizontal.

Fig. 324, 325. Problème XII. (*Fig.* 324, 325.)

N° 402. — *Construire les projections et la longueur de la plus courte distance de deux droites.*

Nous avons exposé au n° 324, deux moyens de fixer la position de la perpendiculaire commune à deux droites, nommée aussi leur plus courte distance; et il ne s'agirait ici que d'appliquer à ces deux modes de construction les principes de la *Géométrie descriptive*; mais nous nous bornerons à développer le second moyen comme étant le plus simple.

Fig. 266. Reprenons d'abord la figure en relief (*fig.* 266), en supprimant les constructions qui n'ont servi qu'à la démonstration.

Fig. 324. Soient AB, CD (*fig.* 324), les deux droites données :

1° — Par un point quelconque E pris sur CD, *menons* EF parallèle à AB;

2° — *Faisons passer* un plan MN par les deux droites CD, EF ; ce plan est parallèle à la droite AB;

3° — D'un point quelconque G de AB, *abaissons* GK perpendiculaire, et *déterminons* le pied K de cette perpendiculaire sur le plan parallèle;

4° — *Menons* par le point K une parallèle KI à EF ou AB; elle va rencontrer CD en un point I;

5° — Du point I *menons* IH parallèle à GK ou perpendiculaire au plan parallèle.

La droite IH est la plus courte distance.

Appliquons maintenant les principes de la méthode des projections. — Voici les détails de l'épure :

Soient LL′ (*fig.* 325) la ligne de terre, et [*ab*, *a′b′*], [*cd*, *c′d′*], les projections des deux droites données AB, CD. FIG. 325.

1° — *ef*, *e′f′*, respectivement parallèles à *ab*, *a′b′*, et menées par les projections *e*, *e′*, d'un même point de la droite [*cd*, *c′d′*], sont les projections de la droite EF parallèle à AB ;

2° — NMN′ est le plan parallèle à AB, conduit suivant les droites [*cd*, *c′d′*], [*ef*, *e′f′*] (*voyez* le scolie du n° 393) ;

3° — *gkl*, *g′k′l′*, menées perpendiculairement aux traces MN, MN′, du plan parallèle, sont les projections de GK [les points *k*, *k′*, projections du pied de cette perpendiculaire, doivent être déterminés d'après le problème du n° 397] ;

4° — *ki*, *k′i′*, sont les projections de la droite KI menée par le point I parallèlement à AB ;

5° — *ih*, *i′h′*, menées par les points *i*, *i′*, parallèlement à *gk*, *g′k′*, ou perpendiculairement aux traces MN, MN′, et prolongées jusqu'à leur rencontre avec *ab*, *a′b′*, sont les projections de la plus courte distance demandée.

6° — Enfin, connaissant les extrémités [*i*, *i′*], [*h*, *h′*] de cette plus courte distance, on peut en construire la longueur *i′h″* d'après le problème du n° 390.

N. B. — Cette épure, dont l'exécution n'offre aucune difficulté réelle, exige cependant beaucoup de soin, à raison du grand nombre de lignes à tracer. On a d'ailleurs plusieurs moyens de vérification, tirés du *premier principe* (n° 386).

On voit enfin que ce problème n'est que l'application d'une partie des problèmes précédents.

Nous proposerons comme nouveaux exercices les problèmes suivants :

1° — *Determiner l'intersection commune de trois plans dont les traces sont données ;*

2° — *Un point et deux droites étant donnés par leurs projections, mener par le point une troisième droite qui rencontre les deux premières.*

Ces deux problèmes sont des applications de celui du n° 395, et sont susceptibles de discussion.

§ II. — *Méthode de rabattement. — Problèmes sur les angles trièdres.*

N° **403**. — *Introduction*. — Il arrive souvent que, pour résoudre un problème de la *Géométrie de l'espace*, on est conduit à exécuter certaines constructions dans un plan donné par ses traces ; et pour cela, il est nécessaire, — 1° — de *rabattre* ce plan sur l'un des plans de projection, le plan horizontal, par exemple [les problèmes des n°s 399 et 400, en ont offert des exemples] ; — 2° — de *fixer la position*, dans ce plan rabattu, de certains points ou de certaines lignes, qui doivent s'y trouver situés d'après l'énoncé, et dont les projections sont supposées connues ; — 3° — d'*exécuter*, dans ce plan [confondu pour le moment avec le plan horizontal] *les constructions* que prescrit l'énoncé ; — 4° — enfin de *déterminer* les projections des nouveaux points et des nouvelles lignes, ainsi trouvés. — Tel est l'objet de la méthode connue sous la dénomination de Méthode de rabattement, dont les principes fondamentaux se réduisent aux trois questions suivantes :

Fig. 326. Problème I. (*Fig*. 326.)

N° **404**. — *Un plan* NMN′ *étant donné par ses traces, rabattre ce plan sur l'un des plans de projection, le plan horizontal par* exemple.

Considérons sur la trace verticale MN′ un point quelconque a' dont la projection horizontale est en a ; et par ce point, concevons un plan perpendiculaire à la trace horizontale MN : — la trace verticale de ce plan est une droite $a'a$ perpendiculaire à la ligne de terre (n° **384**), et sa trace horizontale une autre droite ap perpendiculaire à MN. — Son intersection avec le plan NMN′ sera une droite pa' [dans l'espace] aussi perpendiculaire à MN.

Cela posé, faisons tourner le plan donné autour de sa trace horizontale MN : — dans ce mouvement, le point a' ne sortira pas

du plan $a'pa$, et se rabattra sur le prolongement pA de pa, en un point A dont la distance au point fixe M sera représentée en grandeur par Ma'. — Si donc, du point M comme centre, avec le rayon Ma', nous décrivons un arc de cercle qui vienne couper aA au point A, et que nous joignions le point M à ce dernier point, la droite MAN″ représentera le *rabattement* sur le plan horizontal, de la trace verticale MN′. — Nous obtiendrons ainsi NMN″ pour le plan donné, rabattu sur le plan horizontal.

N. B. — En décrivant du point o comme centre, avec ap pour rayon, un arc de cercle qui coupe LL′ en un point p', et tirant $a'p'$, on a $a'p'a'$ pour l'angle que le plan donné fait avec le plan horizontal (nº 401). — Or cet angle est souvent utile à considérer dans les applications de la méthode de rabattement.

PROBLÈME II. (*Fig.* 326.) FIG. 326.

Nº 408. — *Un point* o *représentant la projection horizontale d'un point* O *situé dans un plan donné* NMN′; — 1º — *Trouver sa projection verticale* o′; — 2º — *fixer la position du point* O *dans le plan* NMN′ *supposé rabattu sur le plan horizontal;* — et réciproquement, *un point* O *étant donné de position dans un plan rabattu, déterminer les projections de ce point.*

Remarquons d'abord que, le point O devant être situé dans le plan donné, sa projection horizontale o en fixe complétement la position dans l'espace; car, si par le point o on élève une verticale (nº 387, *scol.*), cette droite va percer le plan donné en un point qui n'est autre que le point O.

Maintenant, pour résoudre la première partie de la question, abaissons du point o une perpendiculaire indéfinie oro' sur la ligne de terre LL′: la projection verticale o' du point O sera située sur cette perpendiculaire (nº 386), et il ne s'agit que de déterminer la distance ro' du point o' à la ligne de terre.

Or, nous avons deux moyens d'y parvenir :

PREMIER MOYEN. — Abaissons oq perpendiculaire sur MN, et joignons le point q au point O de l'espace; nous formons ainsi un

triangle rectangle Oqo, dans lequel le côté de l'angle droit qo est connu, ainsi que l'angle aigu Oqo, puisque, qO étant perpendiculaire à MN (n° 401), cet angle mesure l'angle du plan donné avec le plan horizontal, angle déjà construit dans le problème précédent, et égal à $a'p'a$.

En rabattant ce triangle autour de qo comme charnière, menant par le point O une perpendiculaire oO' à oq; puis formant au point q l'angle oqO' égal à l'angle $a'p'a$, nous obtenons $oO'q$ pour le triangle rabattu; et oO' représente alors la distance du point O au plan horizontal. Si donc nous portons oO' de r en o', le point o' est la projection verticale demandée.

Second moyen. — Concevons par le point O de l'espace une horizontale dans le plan donné: — la projection horizontale de cette horizontale est une droite ob parallèle à la trace MN (n° 294); et comme la trace verticale de cette horizontale doit se trouver sur la trace MN', et sur la perpendiculaire à LL' menée par le point b, il s'ensuit que cette trace verticale est en b'; donc la projection verticale de l'horizontale est une parallèle $b'o'$ à LL' menée par le point b': — enfin le point o', où cette parallèle rencontre la perpendiculaire indéfinie oro', est la projection verticale cherchée.

N. B.—Ce second moyen est, en général, le plus simple.

Passons à la seconde partie de la question.

Remettons dans sa position verticale le triangle $O'qo$, qui devient alors Oqo, et observons que, dans le mouvement du plan donne autour de MN pour se rabattre sur le plan horizontal, la droite qO, perpendiculaire à MN, doit se rabattre sur le prolongement de oq en un point O dont la distance au point q est égale à la droite qO' déjà construite. Donc, si nous décrivons du point q comme centre, avec le rayon qO', un arc de cercle qui vienne couper oq prolongé en un point O, ce point sera le rabattement de celui dont o, o', sont les projections.

Autrement: — Si, du point M comme centre, avec Mb' pour rayon, nous décrivons un arc de cercle qui vienne couper MN'' (*problème précédent*) en un point B, que par ce point nous tirions

une parallèle à MN, cette parallèle représentera l'horizontale qui a été menée plus haut par le point O. Donc la rencontre de cette parallèle avec *oq* prolongé donnera encore la position du point dont les projections sont *o*, *o'*.

RÉCIPROQUEMENT : — Le point O étant donné de position dans le plan rabattu, NMN'', pour obtenir les projections de ce point quand le plan vient à reprendre sa position primitive NMN', il suffit, — 1° — d'*abaisser* O*q* perpendiculaire sur MN, en prolongeant cette perpendiculaire indéfiniment; — 2° — de faire au point *q* un angle *oq*O' égal à l'angle donné *a'p'a*; — 3° — de *prendre* *q*O' = *q*O, puis d'*abaisser* O'*o* perpendiculaire sur *qo*, ce qui fixe déjà la projection horizontale *o*; — 4° — enfin, d'*abaisser* une perpendiculaire *oro'* sur LL', et de *prendre* *ro'* = *o*O'.

Le point *o'* est la projection verticale cherchée.

Ou bien encore : — 1° — *Menez* O*q* perpendiculaire à MN, et OB parallèle à cette même trace ; — 2° — *portez* MB de M en *b'* sur la trace MN', et *menez* la droite indéfinie *b'o'* parallèle à LL' ; — 3° — *abaissez* *b'b* perpendiculaire sur LL', et par le point *b* *tirez* une droite *bo* parallèle à MN.

Le point *o*, où *bo* rencontre la droite O*q* prolongée, est la projection horizontale du point O ; et le point *o'* où la perpendiculaire *oo'* rencontre *b'o'*, en est la projection verticale.

Les constructions qu'on vient d'indiquer pour la réciproque sont des conséquences de la marche qui a été suivie par rapport à la directe.

PROBLÈME III. (*Fig.* 327.) FIG. 327.

N° 406. — *Étant donnée la projection horizontale* ab *d'une droite située dans un plan* NMN', — 1° — *Construire sa projection verticale ;* — 2° — *déterminer sa position dans le plan rabattu ;* — et réciproquement, — *Étant donnée une droite dans un plan rabattu, trouver ses projections, lorsque le plan a repris sa véritable position.*

En appliquant à deux des points de la droite les constructions du problème précédent, on arriverait à une solution de la question proposée ; mais on peut opérer d'une manière plus simple :

Par la projection ab, concevons un plan vertical : — la trace horizontale de ce plan est ab, et sa trace verticale est bb' perpendiculaire à LL'. Donc, si l'on détermine, comme au n° 395, la projection verticale de l'intersection commune des deux plans NMN', abb', on aura la projection verticale $a'b'$ de la droite.

Quant à la seconde partie de la question, remarquons que le point a où la droite perce le plan horizontal, ne change pas de position dans le mouvement du plan donné autour de MN. D'un autre côté, le point b' où elle perce le plan vertical, vient prendre la position B, point que l'on obtient en portant Mb' de M en B sur MN'', ou en prolongeant la perpendiculaire abaissée du point b sur MN, jusqu'à sa rencontre avec MN''. — Donc aB représente la droite rabattue sur le plan horizontal.

Réciproquement : — Une droite CD étant située d'une manière quelconque dans le plan rabattu, pour en avoir les projections lorsque le plan a repris sa position primitive, nous observerons que le point D où la droite CD rencontre MN', ne change pas de position : c'est, par conséquent, un point de la projection horizontale de cette droite, et le pied d' de la perpendiculaire abaissée du point D sur MN, est la projection verticale de ce point. — Portant ensuite MC de M en c' sur MN', puis abaissant $c'c$ perpendiculaire sur LL', et menant les droites cD, $c'd'$, on obtient les projections horizontale et verticale de la droite.

Appliquons ces principes à de nouveaux problèmes.

Problème IV.

N° **407**. — *Un point et une droite étant donnés par leurs projections, mener par ce point une seconde droite qui rencontre la première et forme avec celle-ci un angle donné.*

Commencez par *faire passer* un plan par le point et la droite donnés (n° 393, *scol.*), puis *rabattez* ce plan autour de sa trace horizontale (n° 404), ainsi que le point et la droite (n°s 405. 406). — *Exécutez* ensuite dans le plan rabattu la construction indiquée par l'énoncé, ce qui donne *deux* droites pour réponse à la

question (nº 188). — *Déterminez* enfin (nº 406) les projections de ces deux droites.

N. B. — On peut, comme cas particulier, — *Trouver* par ce moyen *les projections et la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné, sur une droite aussi donnée*, — problème qui a déjà été résolu d'une autre manière (nº 398, *scol.* I).

PROBLÈME V.

Nº 408. — *Trois points étant donnés par leurs projections, trouver le centre et le rayon d'un cercle passant par ces trois points.*

1º — *Faites passer* un plan par les trois points donnés (nº 398), et *rabattez* ce plan autour de sa trace horizontale (nº 404); — 2º — *déterminez* la position dans le plan rabattu, de chacun des trois points donnés (nº 405); — 3º — *construisez* (nº 181, 2º) *le centre* du cercle passant par les trois points ainsi rabattus; — 4º — *déterminez* les projections de ce centre (nº 405, *récip.*), et *joignez* ces projections avec les projections respectives d'un des points donnés.

Le centre et le rayon du cercle cherché se trouvent ainsi déterminés de position et de grandeur: — donc le problème est résolu.

N. B. — Le rayon est même déjà connu par la construction qui a été faite dans le plan rabattu.

SCOLIE. — Ce problème, ainsi que le précédent, forment d'excellents exercices sur la méthode de rabattement. — Nous engageons même les commençants à *déterminer* (nº 405) les projections d'une suite de points de la circonférence supposée déjà tracée dans le plan rabattu. — En liant entre elles les projections horizontales, puis les projections verticales de ces différents points, par des lignes *continues*, on obtient deux courbes *rentrantes et fermées* qui ne sont autres que les projections horizontale et verticale du cercle situé dans l'espace.

On démontre, d'après les principes de la *Géométrie analytique*, que ces courbes sont des *ellipses* (nº 49, *App.*).

Application de la méthode de rabattement à la construction des angles trièdres.

Proposition préliminaire.

N° **409**. — Nous avons déjà vu que, dans tout angle trièdre, une quelconque des trois faces est moindre que la somme des deux autres (n° 331), et que leur somme est moindre que 4 *droits* (n° 332).

Je dis que, réciproquement, — *avec trois angles rectilignes dont le plus grand est moindre que la somme des deux autres, et qui forment une somme moindre que 4 droits, il est toujours possible de former un angle trièdre.*

Fig. 328. Soient trois angles consécutifs CSA, ASB, BSC′ (*fig.* 328), situés sur un même plan horizontal, et tels que l'on ait

$$\text{ASB} > \text{ASC}, \quad \text{ASB} > \text{BSC}',$$

mais

$$\text{ASB} < \text{ASC} + \text{BSC}',$$

et

$$\text{CSA} + \text{ASB} + \text{BSC}' < 4 \textit{ droits}$$

[le plus grand angle est supposé ici placé entre les deux autres].

Cela posé, prenons sur SC, SC′, deux distances égales SD = SD′, et des points D, D′, abaissons DE, D′E′, respectivement perpendiculaires sur SA, SB; puis, concevons que les triangles rectangles SDE, SD′E′, tournent autour de SA, SB, et fassent une demi-révolution; en sorte que le côté SD vienne prendre la position S*d* dans le plan de l'angle ASB, et le côté SD′ la position S*d*′. — Il est clair que, dans ce mouvement, les triangles rectangles engendreront deux cônes (n° 387), et les côtés SD, SD′, ou plutôt, SC, SC′, deux surfaces coniques. Or, les plans verticaux engendrés par DE, D′E′, se couperont nécessairement, et de plus, ils devront se couper *intérieurement* aux deux cônes : car, de ce que l'on a ASB < ASC + BSC′, il en résulte ASC < AS*d* + BS*d*′ : ainsi, les droites DE*d*, D′E′*d*′, se croiseront en un point K intérieur à l'angle *d*S*d*′. Ces plans verticaux auront donc pour intersection commune une droite KI qui percera à la fois les deux surfaces coniques en un même point I; et en joignant le point S au

point I, nous aurons une arête SIL commune à ces deux surfaces. — Les droites SA, SB, SL, formeront alors un angle trièdre dont es faces seront

$$ASB, \quad ASL = ASC, \quad BSL = BSC'; \quad C. Q. F. D.$$

N. B. — Les trois angles ASB, CSA, C'SB, peuvent être considérés comme le *développement* de l'angle trièdre SALB sur un même plan horizontal SAB (*voyez* le nº 361); — l'arête SL s'est, en quelque sorte, scindée en *deux*, pour venir prendre position en SC, SC'.

En outre, si l'on conçoit que les deux triangles rectangles SDE, SD'E', aient achevé une révolution entière, les deux surfaces coniques auront, *au-dessous* du plan ASB, une seconde arête commune qui déterminera un angle trièdre *symétrique* du premier (nº 334).

SCOLIE. — Nous avons supposé dans la *figure* 328 que, le plus grand angle ASB étant aigu ou obtus, les deux autres angles CSA, C'SB, soient aigus. Fig. 328.

Mais on peut supposer que deux des angles ASB, ASC (*fig.* 329), soient obtus, et le troisième, BSC', aigu, ou bien que les trois angles soient obtus (*fig.* 330); — la proposition n'en serait pas moins vraie. Fig. 329. Fig. 330.

Dans le cas de la *figure* 329, la perpendiculaire DE tomberait sur le prolongement de AS, et la perpendiculaire D'E', sur le côté SB lui-même; mais les deux plans verticaux engendrés par DE, D'E', ne s'en couperaient pas moins *intérieurement* aux deux cônes; et les deux surfaces coniques auraient encore une arête commune SL formant avec SA, SB, un angle trièdre. Fig. 329.

Dans le cas de la *figure* 330, les perpendiculaires DE, D'E', tomberaient l'une et l'autre sur les prolongements respectifs de SA, SB; et les deux plans verticaux se couperaient suivant une verticale IK dont le pied K serait intérieur à l'angle DSD'; les deux surfaces coniques auraient donc encore dans ce cas une arête commune SL. Fig. 330.

Passons à la construction des angles trièdres d'après certaines données.

Fig. 331, 332. **Problème VI.** (*Fig.* 331 et 332.)

N° 410. — ***Étant données les trois faces d'un angle trièdre, construire les angles dièdres.***

Pour faire mieux comprendre le mode de construction que nous avons à développer, et qui a l'avantage de s'appliquer à tous les cas, nous considérerons d'abord une figure en relief.

Fig. 331. Soit donc *sabc* (*fig.* 331) l'angle trièdre dont il s'agit d'obtenir *graphiquement* chacun des angles dièdres, par exemple, l'angle dièdre suivant *sa*.

Prenons sur les arêtes, trois parties égales, $sa = sb = sc$, et joignons les points *a*, *b*, *c*, deux à deux; nous formons ainsi un tétraèdre dont les faces latérales sont isoscèles; d'où il suit que les angles à la base de ces faces sont tous *aigus* (n° 86). — Cela posé,

Par un point quelconque *m* de l'arête *sa*, menons les droites *mn*, *mp*, perpendiculaires à *sa*; elles rencontreront nécessairement les côtés *ab*, *ac*, du triangle *abc* (n° 34), en deux points *n*, *p*. Tirant *np*, nous aurons un triangle *mnp* qui, étant construit dans sa véritable grandeur, fera connaître l'angle *m* ou la mesure de l'angle dièdre suivant *sa* (n° 308). — Or, on parvient à cette construction par le *développement* du tétraèdre *sabc* sur un même plan.

A cet effet, *traçons* sur un même plan horizontal trois angles
Fig. 332. consécutifs ASC′, ASB, BSC″ (*fig.* 332), respectivement égaux
Fig. 331. aux trois angles donnés *asc*, *asb*, *bsc* (*fig.* 331) [l'angle ASB étant ici pris pour base de la construction]; et, après avoir *marqué* les quatre distances égales

$$SC' = SA = SB = SC'',$$

tirons C′A, AB, BC″; puis, des points A et B comme centres, avec les rayons AC′, BC″, *décrivons* deux arcs de cercle qui doivent se couper en un point C situé par rapport à AB du côté opposé au point S; et *joignons* AC, BC : nous obtenons ainsi le tétraèdre *sabc* développé sur le plan horizontal. [Le mouvement de la base *abc* du tétraèdre s'est fait autour du côté *ab* ou AB.] Il ne reste plus alors qu'à déterminer sur ce développement les grandeurs des côtés du triangle *mnp*.

Or, il est d'abord évident que les côtés *mn*, *mp*, seront représentés par les deux parties MN, NR, d'une même perpendiculaire à SA, menée par un point quelconque M pris à partir du point A sur SA. D'un autre côté, le point *p* a dû, dans le développement du tétraèdre, prendre position à la fois sur AC′ et sur AC qui représente *ac*; donc, en prenant AQ = AR, et joignant le point Q au point N, nous aurons NQ = *np*. Ainsi, les trois côtés du triangle *mnp* sont respectivement égaux à MN, MR, et NQ. — Donc, si sur MN comme base nous construisons le triangle MNP (nº 187), tel que l'on ait MP = MR, NP = NQ, l'angle en M sera l'angle dièdre demandé, rabattu sur le plan horizontal.

La construction serait tout à fait identique par rapport à l'angle dièdre suivant l'arête *sb*; mais celle de l'angle dièdre suivant *sc* exige une légère modification, parce que l'arête *sc* est représentée dans le développement par SC′, SC″, et que le point *c* a pris les trois positions C, C′, C″.

Après avoir pris sur SC′, SC″, deux parties C′T′, C″T″, arbitraires, mais égales, *élevons* T′V′, T″V″, respectivement perpendiculaires à SC′, SC″, puis prenons sur CA, CB,

$$CP'' = C'V', \quad CN'' = C''V'',$$

et tirons N″P″; les trois droites N″P″, T′V′, T″V″, représenteront les côtés *n″p″*, *m″n″*, *m″p″* du triangle à construire; et, cette construction étant exécutée sur la base N″P″, l'angle opposé M″ sera l'angle demandé.

Au surplus, on éviterait cette dernière construction en prenant ASC, à son tour, pour base du développement.

Scolie I. — Le cas où l'on donne *les trois angles* de l'angle trièdre rentre dans le problème précédent, d'après la propriété de l'angle trièdre supplémentaire (nº 330) :

Prenez les suppléments des trois angles donnés, et vous obtenez ainsi les trois faces du nouvel angle trièdre; *construisez* les angles dièdres de celui-ci, et *prenez*-en les suppléments : vous obtenez enfin les trois faces cherchées.

Scolie II. — La *réduction d'un angle à l'horizon* est encore un cas particulier du problème précédent.

En effet, *réduire un angle à l'horizon, c'est trouver la projection horizontale de l'angle formé par deux rayons visuels* [dont le sommet est l'œil], *connaissant cet angle et ceux que forment les rayons visuels avec la verticale.*

Fig. 333. Soient donc SA, SB (*fig.* 333), deux rayons visuels, et SC la verticale abaissée du point S. — On connaît, par hypothèse, l'angle ASB, ainsi que les angles ASC, BSC, et il s'agit de déterminer l'angle MPN formé par les projections de SA, SB, sur un plan horizontal mené par un point quelconque de la verticale. Or, tout se réduit à construire l'angle dièdre suivant SC de l'angle trièdre SABC, connaissant les trois faces ASB, ASC, BSC.

Fig. 334. Problème VII. (*Fig.* 334.)

N° 411. — *Étant données deux faces d'un angle trièdre et l'angle compris, construire la troisième face*, et par suite, *les trois angles dièdres.*

Ce problème est toujours possible, quelles que soient les deux faces données, et quel que soit l'angle compris.

En effet, supposons d'abord les deux faces données ASB, ASC, placées sur un même plan, celui de la face ASB, par exemple, et faisons ensuite tourner la face ASC autour de SA comme charnière Dès que l'angle dièdre compris entre les deux faces données sera devenu égal à l'angle dièdre donné, la troisième face CSB sera elle-même complétement déterminée dans l'espace.

Il ne s'agit donc que d'en fixer la grandeur dans le développement de l'angle trièdre sur la face ASB.

Pour cela, d'un point quelconque D de l'arête SC rabattue. abaissons sur SA une perpendiculaire indéfinie DEF, et supposons que la face CSA soit remise dans la position qu'elle doit avoir pour former avec ASB l'angle donné; les deux droites ED, EF, seront alors situées dans un plan vertical, et formeront entre elles un angle qui mesure l'angle dièdre donné. Concevons ensuite que ce plan vertical, en tournant autour de EF, vienne se rabattre sur le plan de la face ASB; la droite DE prendra, après ce mouvement, une position EI telle que FEI soit égal à l'angle

lonné; et si nous portons ED de E en I, que nous menions IF perpendiculaire sur EF, le point F sera le pied d'une verticale abaissée du point D de l'arête SC dans l'espace, sur le plan horizontal.

Imaginons enfin que la troisième face C'SB tourne autour de SB pour se rabattre sur le plan horizontal; le point D, dont la projection horizontale est en F, se trouvera, dans le rabattement de la troisième face, sur la perpendiculaire indéfinie FE'D'; d'ailleurs il doit rester à une distance du point S égale à SD. Donc, si nous décrivons du point S comme centre, avec le rayon SD, une circonférence de cercle, elle viendra couper la droite FE'D' en un point D' qui, étant joint au point S, déterminera BSC' pour la troisième face demandée.

Les trois faces étant connues, on pourra construire les angles dièdres inconnus d'après le problème précédent.

N. B. — Cette construction est susceptible de quelques modifications suivant les cas qui peuvent se présenter; mais le principe en est toujours le même.

Scolie. — La propriété de l'angle trièdre supplémentaire ramène au cas général qui vient d'être traité, celui où l'on donne *une face et les deux angles adjacents*.

Problème VIII. (*Fig.* 335.) Fig. 335.

N° 412. — *Étant donnés deux faces et l'angle opposé à l'une d'elles, construire la troisième face et les deux autres angles dièdres.*

Il est d'abord facile de reconnaître que le problème peut, suivant les cas, admettre *deux* ou *une* solution, ou n'en admettre *aucune*. En effet, ASB étant l'une des faces données, concevons qu'un second angle égal à l'autre face donnée, et ayant le côté SB commun avec le premier, tourne autour de SB, et prenne toutes les positions possibles dans l'espace; qu'en outre, un troisième plan passant par l'arête SA, forme avec ASB un angle dièdre égal à l'angle donné. — Cela posé, dans le mouvement du second plan autour de SB, le côté mobile engendre évidemment une

surface conique dont le sommet est en S. Or, il peut arriver trois cas :

Ou le troisième plan dont la position est fixée, *rencontre* la surface conique suivant deux de ses génératrices dont chacune doit alors être considérée comme la troisième arête d'un angle trièdre ayant SB, SA, pour ses deux autres arêtes; et les angles trièdres ainsi formés satisfont aux conditions de l'énoncé ;

Ou le plan ne fait que *toucher* la surface conique suivant une de ses arêtes (nº 389); auquel cas, on obtient *un seul* angle trièdre satisfaisant à l'énoncé;

Ou bien enfin, le plan est tout à fait *extérieur* à la surface conique; et dans ce cas, il ne peut exister d'angle trièdre.

Voyons maintenant, lorsque cet angle est possible, comment déterminer la troisième face.

Soient ASB, BSC, les deux faces données, dont nous prendrons la première pour le plan de construction, la seconde étant d'ailleurs supposée rabattue dans ce plan.

Par un point quelconque E de SB, menons un plan perpendiculaire à cette droite; ce plan, qui est vertical, coupe les deux faces ASB, BSC, suivant des droites EF, ED, perpendiculaires à SA, et la troisième face inconnue, suivant une certaine droite, dont nous allons d'abord chercher à fixer la direction dans ce plan vertical, en le supposant, pour le moment, rabattu autour de sa trace EF sur le plan horizontal. — A cet effet, concevons par le même point E un autre plan vertical et perpendiculaire à l'arête SA; ce nouveau plan, qui contient la verticale élevée du point E, coupe la face ASB suivant la droite EK perpendiculaire à SA, et la face inconnue suivant une droite, aussi perpendiculaire à SA, et formant par conséquent avec EK un angle égal à l'angle dièdre donné. — Or, si nous rabattons ce nouveau plan lui-même autour de sa trace EK, la perpendiculaire à SA, située dans la face inconnue, prendra, après ce rabattement, une position KI telle que IKE soit égal à l'angle donné; et la verticale partant du point E, devant être perpendiculaire à EF, sera représentée en grandeur par EI. — D'ailleurs cette verticale appartient également au premier plan vertical que nous avons imaginé; et dans le ra-

battement de ce plan autour de sa trace EF, elle devra prendre la direction EB. — Si donc nous portons EI de E en G sur EB, et que nous joignions le point G au point F, trace horizontale de la droite d'intersection du premier plan vertical avec la face inconnue, nous aurons la direction de cette droite dans ce plan vertical rabattu.

Il reste maintenant, pour achever la résolution du problème, — 1° — à déterminer la position du point D dans ce plan rabattu; — 2° — à déterminer la position de ce même point lorsque la troisième face tourne autour de SA pour se rabattre sur le plan horizontal.

Or, — 1° — dans le mouvement que fait le plan GEF pour se rabattre sur le plan horizontal, la distance du point D au point E ne doit pas changer; donc si du point E comme centre, avec ED pour rayon, nous décrivons une circonférence de cercle, elle rencontrera généralement la droite FG en deux points d', d'', qui représenteront alors deux positions différentes du point D dans le plan vertical GEF rabattu.

2° — Remettons ce plan dans sa position verticale, puis faisons tourner d'SA ou d''SA autour de SA. Dans ce mouvement, les distances des points d', d'', au point F ne changeront pas; ainsi ces points devront se trouver sur les circonférences décrites du point F comme centre avec les rayons Fd', Fd''. — D'un autre côté, ces mêmes points doivent appartenir à la circonférence qui a pour rayon SD. — En cherchant donc les points D′, D″ où cette circonférence rencontre les deux autres, et joignant ces points au point S, on obtiendra ASD′, ASD″, ou plutôt, ASC′, ASC″, pour la troisième face demandée.

N. B. — Si la circonférence ED ne faisait que toucher la droite FG, il n'y aurait qu'une solution; et si elle ne la rencontrait pas, le problème n'admettrait aucune solution.

Connaissant la troisième face, on déterminerait les angles dièdres inconnus d'après le problème du n° 410.

Nous n'insisterons pas davantage sur le dernier problème, dont la discussion complète nous entraînerait trop loin.

Scolie. — Au moyen de l'angle trièdre supplémentaire, on déduit du cas que nous venons de traiter, celui où l'on donne *deux angles dièdres et la face opposée à l'un d'eux*.

Nous avons donc les moyens de déterminer *graphiquement* trois quelconques des six éléments qui constituent un angle trièdre, lorsque les trois autres sont donnés. Par suite, les questions relatives aux *triangles sphériques* sont susceptibles elles-mêmes de solutions purement graphiques.

§ III. — *Problèmes sur la sphère.*

Problème I.

N° 413. — *Circonscrire une sphère à un tétraèdre donné;* en d'autres termes, *faire passer une sphère par quatre points donnés*.

Les projections des quatre points étant supposées connues, *déterminez* (n° 393) les traces du plan qui passe par trois des points donnés; puis *cherchez* (n° 408) les projections du centre du cercle passant par ces trois points, et *élevez* par ce point ainsi construit une perpendiculaire au plan des trois points.

Répétez les mêmes constructions par rapport au *quatrième* point combiné avec *deux* des premiers.

Le point où les deux perpendiculaires se coupent (n° 378) sera le centre de la sphère demandée.

Autrement : — Par les milieux de trois arêtes d'un même angle trièdre du tétraèdre donné, *menez* des plans perpendiculaires à ces arêtes (n° 398), et *déterminez* le point d'intersection de ces trois plans.

Vous obtenez ainsi le *centre* de la sphère cherchée (n° 378).

N. B. — Les projections du centre et celles de l'un des points étant connues, le rayon peut être facilement construit.

Scolie. — Quand on peut disposer des plans de projection à volonté, la construction est susceptible de grandes simplifications. — Ainsi, par exemple, rien n'empêche de prendre pour *plan*

horizontal le plan de trois des quatre points donnés, et pour *plan vertical* le plan vertical passant par l'arête qui joint le quatrième point à l'un des trois premiers.

Nous engageons les commençants à exécuter l'épure de ce problème, — 1° — en supposant les points situés d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection, — 2° — dans le cas particulier où le plan horizontal et le plan vertical ont la position spéciale que nous venons d'indiquer.

PROBLÈME II.

N° 414. — *Inscrire une sphère à un tétraèdre donné.*

Nous savons déjà (n° 379) que le centre de la sphère demandée se trouve à l'intersection des *trois plans bissecteurs* des angles dièdres à la base du tétraèdre donné.

Les quatre sommets du tétraèdre étant supposés donnés par leurs projections, on peut d'abord *déterminer* les traces des plans passant par ces sommets combinés *trois à trois* (n° 393). — Après quoi, l'on cherche (n° 400, *scol.* II) les traces des plans bissecteurs des angles que forme la face prise pour base avec chacune des trois autres; et enfin l'on détermine (n° 402, *N. B.*, 1°) le point d'intersection de ces trois plans.

Mais cette solution générale se simplifie beaucoup lorsqu'on suppose la base du tétraèdre placée dans le plan horizontal.

Autres problèmes sur la sphère.

N° 415. — OBSERVATION PRÉLIMINAIRE. — Les problèmes suivants n'ont d'autre analogie avec la *Géométrie descriptive*, qu'en ce qu'ils se résolvent, quelques-uns du moins, par des constructions exécutées sur un plan. Mais ces constructions sont fondées uniquement sur les principes de la Géométrie ordinaire.

Nous supposerons toutefois que l'on ait à sa disposition un instrument, nommé *compas sphérique* (n° 364, *note*), au moyen duquel, en plaçant l'une des pointes en un point de la surface d'une sphère, et appuyant l'autre pointe sur la même surface, on puisse décrire une circonférence de cercle, dont le point pris sur la surface est alors le pôle (n° 363, SCOLIE II) : — La distance rectiligne

des deux pointes est, dans ce cas, la corde de l'arc de grand cercle compris entre le pôle et le point où se trouve placée la seconde pointe : — lorsque le cercle décrit est un grand cercle, l'ouverture du compas est le côté du carré inscrit, ou *la corde du quadrant*.

Fig. 336.

PROBLÈME III. (*Fig.* 336.)

N° 416. — *Une sphère étant donnée, construire son rayon.*

D'un point quelconque P pris pour pôle, et avec une ouverture arbitraire, *décrivons* d'abord une circonférence de cercle sur la surface de la sphère (n° 418), et marquons trois points A, B, C sur cette circonférence. *Prenons* ensuite trois ouvertures égales respectivement aux cordes AB, AC, BC, et sur un plan donné, *construisons* avec ces cordes comme côtés, un triangle A'B'C'; — le cercle circonscrit à ce triangle (n° 181, 2°) n'est autre que le petit cercle ABC; donc, en nommant D le centre de ce petit cercle, D' celui du cercle circonscrit, on a DA = D'A'.

Maintenant, *prenons* EF = A'D', puis *élevons* au point F la droite indéfinie GFG' perpendiculaire à EF, et *marquons* sur cette perpendiculaire un point G tel que l'on ait EG égal à AP [ce qui est possible puisque AP > AD > EF]. — *Construisons* enfin l'angle GEO' égal à l'angle EGG' [il suffit, pour cela, d'élever par le milieu I de GE une perpendiculaire à cette droite].

Nous formons ainsi un triangle isoscèle O'EG égal au triangle isoscèle OAP; donc O'E = OA est le rayon demandé.

SCOLIE. — Pour obtenir sur une sphère donnée *la corde du quadrant*, il faut, d'après le problème précédent, déterminer *le rayon* de la sphère; et la corde cherchée est *la diagonale* du carré *construit* sur ce rayon.

Nous avons vu d'ailleurs (n° 364, *scol.* III) que les circonférences de grand cercle doivent être décrites avec une ouverture de compas égale à la corde du quadrant.

Fig. 337.

PROBLÈME IV. (*Fig.* 337.)

N° 417. — *Par deux points donnés, A, B, sur la surface d'une sphère, tracer une circonférence de grand cercle.*

Prenons [nº 416, *scol.*] une distance égale à la corde du quadrant; puis, des points donnés A, B, comme centres respectifs, et avec cette distance comme rayon, *décrivons* d'un même côté par rapport au plan ABO [O étant le centre de la sphère] deux arcs qui se couperont en un point P; — ce point sera le pôle de la circonférence cherchée (nº 364, *scol.* III), ligne qui pourra alors être décrite facilement, puisque la distance de ce pôle à chacun des points A, B, est connue et égale à la corde du quadrant.

PROBLÈME V.

Nº 418. — *Étant donnés une circonférence de grand* [ou de petit] *cercle* et *un point* sur la surface de la sphère, *mener par ce point une circonférence de grand cercle perpendiculaire à la première.*

Les moyens de construction sont tout à fait identiques avec ceux des problèmes (nºs 148, 149, *fig.* 89, 90) : il suffit de supposer que la ligne donnée est une partie de circonférence au lieu d'être une ligne droite. FIG. 89, 90.

PREMIER CAS, le point donné étant situé *sur* la circonférence donnée.—(*Fig.* 89.)—*Prenez* sur la circonférence donnée, de part et d'autre du point donné A, deux distances égales AB, AC; puis, des points B, C, comme pôles, et avec la même ouverture [plus grande que BA ou CA], *décrivez* deux arcs de cercle qui se coupent en un point D, et *faites passer* une circonférence de grand cercle par les deux points A, D (nº 417); FIG. 89.

Vous obtenez ainsi la circonférence demandée.

SECOND CAS, le point donné étant situé *hors* de la circonférence. — (*Fig.* 90.) — Du point A comme pôle, *décrivez* un arc de cercle qui coupe la circonférence donnée en deux points C, D; puis, de ces deux points comme pôles respectifs, et avec une ouverture suffisamment grande, *décrivez* deux arcs qui se coupent en un point D′ situé du côté opposé au point A par rapport à l'arc CD; enfin *faites passer* une circonférence de grand cercle par les deux points A, D. FIG. 90.

SCOLIE. — On peut, par un procédé analogue à celui du nº 180,

diviser un arc de *grand* ou de *petit* cercle d'une longueur donnée en 2, 4, 8,... parties égales par une circonférence de grand cercle

COROLLAIRE. — Pour *faire passer par trois points* donnés sur une surface sphérique, *une circonférence de cercle*, il faut, d'après le problème qui vient d'être résolu, *tracer* deux circonférences de grand cercle dont tous les points soient, pour chacune, également distants des points donnés, pris deux à deux. — Ces circonférences se couperont en deux points qui seront les pôles du cercle cherché (n° 364, *scol.* III), lequel sera alors facile à construire.

Enfin, on peut, par ce moyen, *trouver les pôles d'un cercle donné.*

FIG. 337. PROBLÈME VI. (*Fig.* 337.)

N° 419. — *Étant donnés une circonférence de petit cercle et un point sur la surface de la sphère, mener par ce point une circonférence de grand cercle tangente à la première.*

D'abord, deux cercles d'une même sphère sont dits *tangents* l'un à l'autre en un point, lorsqu'ils ont une tangente commune en ce point; — et comme le méridien (n° 364) de tout cercle qui correspond au point de contact est perpendiculaire à la tangente, il s'ensuit que les deux cercles tangents ont un méridien *commun* au point de contact.

Nous remarquerons en outre que, par un même point d'un petit cercle, on peut mener une infinité d'autres cercles qui lui soient tangents : car il suffit de faire passer par la tangente un plan quelconque.

Mais il n'existe qu'*un seul grand cercle tangent* et passant par ce point : c'est celui que déterminent le centre de la sphère et la tangente.

Cela posé, traitons successivement chacun des deux cas.

PREMIER CAS. — Soient AMB le petit cercle donné, M le point de *contact* de la circonférence demandée.

Déterminez d'abord (n° 418, *corol.*) le pôle P du petit cercle; puis *faites passer* un grand cercle PMP′ par les points P, M

(n° 417) : vous aurez ainsi le méridien correspondant au point de contact. Mais le cercle cherché doit passer par le point M et être perpendiculaire au plan du grand cercle PMP′ : il suffit donc maintenant de *mener* par le point M une circonférence de grand cercle CMD perpendiculaire à PMP′ (n° 418); et vous obtiendrez ainsi la circonférence demandée.

Second cas. — Soit I le point donné *hors* du petit cercle AMB. — Supposons le problème résolu, et soient CIMD le cercle demandé, PMP′ le méridien commun.

Prenons sur PMP′, MH = MP = PA, et observons que, CIM étant perpendiculaire sur le milieu de PH, le point I est également distant de P et de H; ainsi l'on a PI = IH.

On voit donc que le point H est à l'intersection de deux circonférences de cercle, l'une décrite avec la distance PH = 2PA, l'autre décrite du point I avec la distance IP.

De là résulte la construction suivante :

1° — *Déterminez* le pôle P comme dans le premier cas; — 2° — *prenez* une ouverture de compas égale à la corde de IP; — 3° — *décrivez* du point I comme centre, avec ce rayon, une circonférence de petit cercle; — 4° — *décrivez* du point P, avec un rayon égal à la corde d'un arc PA′ = 2PA, une autre circonférence qui coupe la première en un certain point H; — 5° — *faites passer* par les points P, H, une circonférence de grand cercle qui rencontre le petit cercle AMB au point M; — 6° — enfin, — par les points I, M, *faites passer* un grand cercle (n° 417); — ce sera le cercle demandé.

LIVRE QUATRIÈME.

DE L'ÉTENDUE CONSIDÉRÉE DANS L'ESPACE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA SIMILITUDE DES POLYÈDRES. — DÉTERMINATION DE LEURS AIRES ET DE LEURS VOLUMES.

§ I. — *De la similitude des polyèdres.*

N° **420**. — Introduction. — Ayant fixé dans le *second livre* (n^os^ **186** *et suiv.*) les caractères généraux de la similitude, nous n'avons qu'à appliquer aux figures considérées dans l'espace les principes qui y ont été établis. — Ainsi, les propriétés de toutes ces figures dépendant de celles du tétraèdre, de même que celles des figures planes dépendent des propriétés du triangle, c'est la définition des tétraèdres semblables qui doit servir de base à la théorie des figures semblables dans l'espace.

Or, un tétraèdre étant déterminé par ses *six* arêtes (n° **347**, *corol.*), comme un triangle l'est par ses trois côtés, nous dirons que — *Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont les arêtes proportionnelles et disposées dans le même ordre* [cette dernière expression ayant la même signification que pour les tétraèdres égaux (*même numéro*)].

Il résulte de là immédiatement, que,

1° — *Deux tétraèdres semblables ont leurs faces semblables chacune à chacune* (n° **187**), *les angles dièdres et les angles trièdres égaux chacun à chacun* (n° **336**);

2° — *Deux tétraèdres semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

N° 421. — Maintenant, un polyèdre quelconque étant déterminé par un assemblage de tétraèdres qui le composent, il s'ensuit que

Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils peuvent se décomposer en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même manière.

D'où l'on tire cette nouvelle conséquence :

Deux polyèdres semblables à un troisième sont semblables entre eux.

On nomme *points homologues* dans deux figures semblables, — 1° — les points homologues de leurs faces (n° 188); — 2° — les points liés aux faces homologues par des tétraèdres semblables (n° 420), et disposés de la même manière.

On nomme *lignes homologues* les droites que déterminent *deux* couples de points homologues chacun à chacun.

On nomme *sections homologues* les polygones résultant de l'intersection de deux polyèdres semblables par deux plans que déterminent *trois* couples de points homologues chacun à chacun.

Enfin, deux polyèdres semblables sont égaux lorsqu'ils ont une arête, ou plus généralement, *une ligne homologue égale*.

N° 422. — *Deux tétraèdres*, et en général, *deux polyèdres* sont dits *inversement semblables*, lorsque l'un d'eux est semblable au *symétrique* de l'autre (n° 334). — Mais nous ne traiterons, pour le moment, que des propriétés des polyèdres *directement semblables*, nous réservant de revenir sur l'autre sorte de polyèdres dans le second *Appendice*. — Aussi, afin d'abréger les énoncés des théorèmes, nous omettrons quelquefois la restriction *disposés de la même manière*, comme devant être toujours sous-entendue, dans le sens que nous lui avons attribué.

THÉORÈME I. (*Fig.* 339.) FIG. 339.

N° 423. — *Tout plan parallèle à l'une des faces*, ABC, *d'un tétraèdre* SABC, *détermine avec les trois autres faces un second tétraèdre* SA″B″C″, *semblable au premier* [les deux plans parallèles étant placés *d'un même côté* par rapport au sommet S].

En effet, les droites A″B″, A″C″, B″C″, étant respectivement parallèles aux droites AB, AC, BC (n° 318), il en résulte

$$SA : SA'' :: SB : SB'' :: SC . SC''$$
$$:: AB : A''B'' :: AC : A''C'' :: BC : B''C'';$$

donc (n° 420) les tétraèdres SABC, SA″B″C″, sont semblables.

COROLLAIRE I. — Tout plan parallèle à la base d'une pyramide
FIG. 286. quelconque SABCDE (*fig.* 286) [et situé du même côté que cette base par rapport au sommet] détermine une autre pyramide *sabcde* semblable à la première. En effet, on a vu (n° 344) que les arêtes, ainsi que les côtés des bases ABCDE, *abcde*, sont proportionnelles; donc, les tétraèdres que l'on obtient en menant des plans par le sommet S et les diagonales de ces bases sont semblables (n° 420); donc aussi les pyramides sont semblables (n° 421).

COROLLAIRE II. — *Dans deux tétraèdres semblables* SABC,
FIG. 339. S′A′B′C′ (*fig.* 339), *les hauteurs* SH, S′H′ *sont proportionnelles aux arêtes.*

En effet, sur SA prenons SA″ = S′A′, et par le point A″ menons un plan parallèle à ABC : — Le tétraèdre SA″B″C″ est semblable à SABC, d'après le théorème principal, et par conséquent aussi à S′A′B′C′ (n° 420, 2°); mais, par construction, SA″=S′A′; donc les tétraèdres SA″B″C″, S′A′B′C′, sont égaux (n° 421); d'où SH″ = S′H′. Or, SH : SH″ :: SA : SA″ (n° 344); donc aussi SH : S′H′ :: SA : S′A′.

N. B. — La même proposition s'applique à deux pyramides semblables quelconques.

FIG. 339. THÉORÈME II. (*Fig.* 339.)

N° 424. — *Deux tétraèdres* SABC, S′A′B′C′, *sont semblables* dans deux cas principaux ;

1° — *Lorsqu'ils ont deux faces semblables chacune à chacune* [SAB et S′A′B′, SAC et S′A′C′], *également inclinées et disposées de la même manière ;*

2° — *Lorsqu'ils ont un angle trièdre* [en S et S′ par exemple].

ompris entre trois faces semblables chacune à chacune et *disposées de la même manière.*

Le second cas est une conséquence presque immédiate de la éfinition (n° 420) ; car, de la similitude des trois faces, on conut la proportionnalité de toutes les arêtes.

Quant au premier cas, pour le démontrer, sur SA prenons A″ = S′A′, et menons par le point A″ un plan parallèle à ABC : triangle SA″B″, semblable à SAB, est aussi semblable à S′A′B′, de plus lui est égal, à cause de SA″ = S′A′. Pareillement, on SA″C″ = S′A′C′. Or, par hypothèse, les deux angles dièdres iivant SA″ et S′A′, sont égaux ; donc les tétraèdres SA″B″C″, 'A′B′C′, sont égaux (n° 347). Mais SA″B″C″ est semblable à ABC ; donc, etc....

SCOLIE. — *Deux tétraèdres sont* encore *semblables, lorsqu'ils nt une face semblable* [SAB et S′A′B′], *et les angles dièdres djacents égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.*

En effet, prenons, comme ci-dessus, SA″ = S′A′, et menons par point A″ un plan parallèle à ABC : — le tétraèdre SA″B″C″ est emblable à SABC (n° 425) ; ainsi, les angles dièdres suivant A″, SB″, A″B″, sont respectivement égaux aux angles dièdres nivant SA, SB, AB, et par conséquent aussi, d'après l'hypoièse, aux angles dièdres suivant S′A′, S′B′, A′B′. — D'ailleurs, A″B″, semblable à SAB, est semblable à S′A′B′, et de plus lui st égal, à cause de SA″ = S′A′ ; donc les deux tétraèdres SA″B″C″, 'A′B′C′, sont égaux (n° 347) ; mais le premier est semblable à ABC ; donc, etc.

Enfin, on peut dire que — *Deux tétraèdres qui ont tous les angles liedres égaux chacun à chacun sont semblables* ; car, d'après la ropriété des angles trièdres supplémentaires (n° 330), l'égalité des ngles dièdres entraîne l'égalité des angles formés par les arêtes, t par conséquent, la similitude des faces correspondantes.

Mais ce nouveau cas contient une condition de trop, parce que, trois faces étant assemblées, deux angles dièdres suffisent our déterminer la direction de la quatrième face.

THÉORÈME III.

N° 425. — *Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables, les angles dièdres et les angles polyèdres homologues égaux chacun à chacun.*

1° — Les faces homologues sont semblables, comme faces homologues de tétraèdres semblables, ou comme des assemblages de faces homologues de tétraèdres semblables.

2° — Les angles dièdres homologues sont égaux, soit comme angles dièdres de tétraèdres semblables, soit comme des assemblages d'angles dièdres de tétraèdres semblables;

3° — Les angles polyèdres homologues sont aussi égaux comme des assemblages d'angles dièdres égaux chacun à chacun.

SCOLIE. — *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles,* comme appartenant à des tétraèdres semblables chacun à chacun et adjacents les uns aux autres.

THÉORÈME IV.

N° 426. — RÉCIPROQUEMENT : — *Deux polyèdres sont semblables lorsqu'ils ont toutes leurs faces semblables chacune à chacune, et également inclinées.*

En suivant l'une des méthodes indiquées au n° 347, et raisonnant comme pour les polyèdres égaux (n° 382), on peut prouver que les deux polyèdres sont composés de tétraèdres semblables chacun à chacun; donc ils sont semblables (n° 421).

N. B. — Cette réciproque contient trop de conditions pour le cas où les polyèdres sont convexes.

COROLLAIRE. — *Les arêtes, les diagonales, et, en général, toutes les droites homologues de deux polyèdres semblables, sont proportionnelles.*

Car on peut considérer ces lignes comme des arêtes de tétraèdres semblables et adjacents les uns aux autres, ce qui lie entre elles toutes les proportions que l'on peut établir entre ces différentes lignes.

Nous proposerons comme exercices sur les polyèdres sembla-les, les théorèmes suivants :

THÉORÈME V.

Deux polyèdres sont semblables lorsque, ayant une face sembla-le, ils ont tous leurs sommets [autres que ceux de la face sem-lable] déterminés par un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés], *construits sur l'un des triangles qui omposent la face semblable.*

N. B. — Ce théorème, dans la *Géométrie* de LEGENDRE, sert de léfinition aux polyèdres semblables.

THÉORÈME VI.

Dans deux prismes semblables, les sections perpendiculaires aux arêtes latérales sont des polygones semblables.

THÉORÈME VII.

Deux pyramides sont semblables lorsqu'elles ont leurs arêtes parallèles chacune à chacune.

THÉORÈME VIII.

Deux polyèdres réguliers de même espèce [ou de même nom] *sont semblables et peuvent se décomposer en un même nombre de pyramides régulières semblables.*

§ II. — *Des aires et des volumes des polyèdres.*

Détermination des aires.

N° 427. — PROPOSITION PRÉLIMINAIRE. — *L'aire d'un polyèdre quelconque est égale à la somme des aires de toutes les faces qui le terminent.*

L'aire d'une surface étant, en général, le nombre abstrait d'u-nités superficielles contenues dans la surface (n° 3), il est clair que, pour obtenir celle d'un polyèdre tout à fait irrégulier, il faut

mesurer chacun des polygones qui forment la surface, puis, faire la somme de toutes ces mesures.

Lorsqu'il s'agit d'un prisme quelconque, ou d'une pyramide régulière, l'expression de l'aire de la surface latérale est susceptible d'un énoncé assez simple qui donne lieu aux théorèmes suivants :

Fig. 340. THÉORÈME I. (*Fig.* 340.)

N° 428. — *L'aire de la surface latérale d'un prisme quelconque est égale au produit de l'une des arêtes par le contour d'une section faite perpendiculairement aux arêtes.*

Soit coupé le prisme par un plan MNPQR perpendiculaire aux arêtes, ce qui donne des droites MN, NP, PQ,... perpendiculaires à ces arêtes (n° 299); nous pouvons prendre AA', BB', CC',... pour bases des parallélogrammes ABB'A', BCC'B',...; et alors MN, NP, PQ,... sont leurs hauteurs respectives. — On a donc

$$\begin{aligned} ABB'A' &= AA' \times MN, \\ BCC'B' &= BB' \times NP, \\ CDD'C' &= CC' \times PQ, \ldots; \end{aligned}$$

d'où, à cause de $AA' = BB' = CC' = \ldots,$

$$\begin{aligned} \textit{surf. latér.} &= AA' (MN + NP + PQ + \ldots) \\ &= AA' \times \textit{périm.}\ MNPQR; \qquad \textit{C. Q. F. D.} \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — L'aire latérale de tout prisme *droit* ou *régulier* (n° 339) a pour mesure *le produit du contour de sa base par sa hauteur* ou *l'une des arêtes*.

Car, dans ce cas, la section perpendiculaire aux arêtes est la base même du prisme.

Lorsque le *prisme* est *régulier, l'aire totale,* y compris les deux bases, est égale *au produit du périmètre de la base, multiplié par la somme faite de la hauteur et de l'apothème de la base.*

Fig. 341. THÉORÈME II. (*Fig.* 341.)

N° 429. — *L'aire de la surface latérale d'une pyramide régu-*

ière SABCDE, *est égale au produit du périmètre de sa base par la moitié de l'apothème* SK *de la pyramide.*

Tous les triangles SAB, SBC, SCD,... sont égaux et isoscèles (n° 343); et l'on a

$$\begin{aligned} SAB &= AB \times \tfrac{1}{2}\,SK, \\ SBC &= BC \times \tfrac{1}{2}\,SI, \\ SCD &= CD \times \tfrac{1}{2}\,L,\ldots, \end{aligned}$$

d'où, à cause de SK = SI = SL = ...,

$$\begin{aligned} \textit{surf. latér.} &= (AB + BC + CD + \ldots)\,\tfrac{1}{2}\,SK \\ &= \textit{pér.}\ ABCDE \times \tfrac{1}{2}\,SK. \end{aligned}$$

Scolie. — L'aire totale a pour expression

$$\textit{périm.}\ ABCDE \times \tfrac{1}{2}\,(SK + OK),$$

SK et OK, étant les apothèmes de la pyramide et de la base.

Détermination des volumes.

Nous commencerons, comme pour l'évaluation des surfaces, par établir quelques propositions ayant pour objet de *transformer* certains polyèdres les uns dans les autres.

Deux *polyèdres* sont dits *équivalents* entre eux lorsqu'ils ont *même volume*, quoique étant d'une forme très-différente; et *transformer un polyèdre*, c'est le remplacer par un autre dont le volume soit égal à celui du premier. [On suppose que les figures sont parfaitement *pénétrables*.]

Théorème III. (*Fig.* 342, 343.) Fig. 342, 343.

N° 430. — *Deux parallélipipèdes quelconques de même base et de même hauteur, sont équivalents* (*voyez* le n° 210).

Puisque les bases des deux parallélipipèdes sont supposées égales, on peut transporter le second sur le premier, de manière que les bases inférieures coïncident; auquel cas, puisqu'ils ont aussi même hauteur, les bases supérieures se trouveront placées sur un même plan parallèle à la base inférieure. Mais alors il pourra arriver, ou bien que ces bases soient comprises entre les mêmes parallèles

FIG. 342. LL′, MM′, comme dans la *figure* 342, ou bien qu'elles aient une
FIG. 343. position relative quelconque, comme dans la *figure* 343. — Examinons ces deux cas successivement :

PREMIER CAS. — Soient les deux parallélipipèdes ABCDEFGH,
FIG. 342. ABCDE′F′G′H′ (*fig.* 342). — On a évidemment deux prismes triangulaires AEE′DHH′, BFF′CGG′, égaux entre eux (n° 346) comme ayant un angle trièdre égal, l'un en A, l'autre en B, compris entre trois faces égales chacune à chacune, savoir :

$$AEE' = BFF', \quad ADHE = BCGF, \quad \text{et} \quad ADH'E' = BCG'F'.$$

Or si, de la figure totale ABCDG′HEF′, on retranche alternativement ces deux prismes égaux, il reste, d'une part, le parallélipipède ABCDE′F′G′H′, et de l'autre, le parallélipipède ABCDEFGH. Ainsi, ces deux parallélipipèdes sont égaux en volume.

SECOND CAS. — Soient maintenant les deux parallélipipèdes
FIG. 343. ABCDEFGH, ABCDE′F′G′H′ (*fig.* 343) [on s'est dispensé de construire le second, pour ne pas compliquer la figure].

Comme les côtés E′F′, H′G′, du second parallélipipède, sont respectivement égaux et parallèles à EF, HG, et par conséquent à AB, DC, que, de même, E′H′, F′G′, sont égaux et parallèles à AD, BC, il en résulte que, si l'on prolonge les côtés E′H′, F′G′, jusqu'à leurs rencontres respectives en E″, H″, F″, G″, avec les côtés EF, HG, aussi prolongés, on formera un parallélogramme E″F″G″H″ égal à ABCD, ainsi qu'aux bases supérieures, EFGH, E′F′G′H′. — Donc, en menant par AB et E″F″, DC et H″G″, puis par AD et E″H″, BC et F″G″, des plans, on obtiendra un nouveau parallélipipède ABCDE″F″G″H″, équivalent à chacun des deux parallélipipèdes donnés, en vertu du premier cas. — Donc aussi ces deux parallélipipèdes sont équivalents entre eux;

C. Q. F. D.

FIG. 344. THÉORÈME IV. (*Fig.* 344.)

N° 431. — *Un parallélipipède oblique quelconque* ABCDEFGH (fig. 344) *étant donné, il est toujours possible de le transformer en un certain parallélipipède rectangle de même hauteur que lui, et dont la base soit équivalente à celle du parallélipipède proposé.*

Par les points A, B, C, D, de la base ABCD, élevons des perpendiculaires au plan de cette base, elles vont rencontrer la base supérieure en quatre points E′, F′, G′, H′; et en joignant ces points deux à deux, nous formons un parallélogramme E′F′G′H′ égal à ABCD, et par suite, un parallélipipède *droit* ABCDE′F′G′H′ équivalent au parallélipipède donné, en vertu du théorème précédent.

Afin de ne pas compliquer la figure, concevons que ce nouveau parallélipipède glisse dans le plan de sa base inférieure et vienne prendre la position A′B′C′D′E′F′G′H′.

Cela posé, des sommets A′, B′, de la base A′B′C′D′, menons A′I′, B′K′, perpendiculaires à A′B′, ce qui détermine un rectangle A′B′K′I′ équivalent au parallélogramme A′B′C′D′ (n° 210); puis, par les points I′, K′, menons I′I″, K′K″ parallèles à A′E′, B′F′, et joignons les points E′, F′, aux points I″, K″, où ces parallèles rencontrent G′H′. — Nous obtenons ainsi un nouveau parallélipipède A′K″, qui est rectangle, puisque toutes ses faces sont évidemment des rectangles, et qui est équivalent au parallélipipède droit (n° 430); puisque tous deux peuvent être considérés comme ayant pour base commune le rectangle A′E′F′B′, et pour hauteur A′I′. Or, par construction, le parallélipipède droit est équivalent au parallélipipède donné ABCDEFGH; donc celui-ci est aussi équivalent au parallélipipède A′K″.

Ainsi, le parallélipipède oblique se trouve transformé en un parallélipipède rectangle de base A′B′K′I′ équivalente à ABCD, et de même hauteur que lui, I′I″ = AE′; *C. Q. F. D.*

THÉORÈME V. (*Fig.* 345.) FIG. 345.

N° 432. — *Tout prisme triangulaire oblique* ABDEFH, *est la moitié d'un parallélipipède de base double et de même hauteur* [voyez le n° 211].

Par les points B, D, menons BC, DC, respectivement parallèles à AD, AB, ce qui détermine un parallélogramme ABCD double de la base ABC; puis, par le point C, menons CG parallèle à AE, jusqu'à sa rencontre en G avec la base supérieure EFH du prisme, et tirons FG, HG; nous formons ainsi un parallélipipède ABCDEFGH dont la base ABCD est double de celle du prisme, et qui a même

hauteur que lui. Or, il sera établi ultérieurement (2[e] *App.*) que les deux prismes triangulaires ABCEFH, BCDFGH, étant symétriques, ne sauraient, pour cette raison, être superposés; mais nous n'en pouvons pas moins démontrer dès à présent qu'ils sont *équivalents*, ce qui suffit à l'existence du théorème énoncé.

A cet effet, coupons la figure totale par un plan MNPQ perpendiculaire aux arêtes AE, BF,... [et tel que les quatre points E, F, G, H, soient situés d'un même côté par rapport à ce plan]; puis, après avoir pris sur l'arête AE prolongée une partie AM′ égale à ME [ce qui donne MM′ = AE], menons par le point M′ un plan M′N′P′Q′ parallèle à MNPQ; nous obtenons ainsi un parallélipipède *droit* M′N′P′Q′MNPQ, qui se trouve partagé par le plan diagonal HFBD prolongé, en deux prismes triangulaires égaux et superposables (n° 346, *scol.* II). Or, je dis que ces deux prismes triangulaires droits M′N′Q′MNQ et N′P′Q′NPQ, sont respectivement équivalents aux deux prismes triangulaires obliques ABDEFH, BCDFGH.

Car, si l'on imagine que le solide M′N′Q′ABD glisse le long de l'arête M′E, de manière que le triangle M′N′Q′ vienne se placer sur son égal MNQ, comme les droites M′A, N′B, Q′D, sont perpendiculaires au plan M′N′Q′, et qu'il en est de même des droites ME, NF, QH, par rapport au plan MNQ, il s'ensuit que les premières prendront les directions des secondes (n° 301); comme d'ailleurs, on a, par construction, M′A = ME, N′B = NF, Q′D = QH, il s'ensuit encore que les sommets A, B, D, coïncideront avec les sommets E, F, H; donc les solides M′N′Q′ABD, MNQEFH, sont égaux. — Par suite, le prisme triangulaire *droit* M′N′P′MNQ est équivalent au prisme *oblique* ABDEFH.

On démontrerait absolument de la même manière, que les deux autres prismes sont équivalents.

Donc enfin, à cause de l'égalité des deux prismes droits, les deux prismes obliques sont, non pas égaux, mais équivalents;

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I. — *Les prismes triangulaires déterminés par les six plans diagonaux d'un parallélipipède quelconque* (n° 341), *sont tous équivalents entre eux.*

Car chacun de ces prismes est moitié du parallélipipède.

Corollaire II. — *Tous les prismes triangulaires qui ont une base commune, et dont les bases supérieures sont placées sur un même plan parallèle à la base inférieure commune, sont équivalents,* puisqu'ils sont tous moitiés de parallélipipèdes équivalents (n° 430).

Scolie. — Le parallélipipède *droit* M'N'P'Q'MNPQ (*fig.* 345) étant composé de deux prismes triangulaires équivalents aux deux prismes du parallélipipède *oblique* ABCDEFGH, on peut encore en conclure que ces deux *parallélipipèdes* sont *équivalents.* Fig. 345.

Or, à cause de M'A = ME, par construction, on a évidemment M'M = AE, N'N = BF, Q'Q = DH; d'où il suit qu'*un parallélipipède oblique quelconque est équivalent au parallélipipède droit qui a pour hauteur l'arête du premier, et pour base une section perpendiculaire à cette arête.*

Théorème VI. (*Fig.* 346.) Fig. 346.

N° 433. — *Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C', *de même base et de même hauteur, sont équivalents.*

Pour simplifier les raisonnements, nous supposerons les deux bases ABC, A'B'C', placées sur un même plan, auquel cas, la hauteur commune aux deux tétraèdres sera représentée par une même droite AH, comprise entre le plan des deux bases, et un plan parallèle à celui-ci, mené par les sommets S, S'.

Cela posé, il a déjà été démontré que des sections GIK, G'I'K', faites, dans les deux tétraèdres, par un même plan parallèle aux bases, sont égales (n° 344, *scol.*). Or, si l'on imagine que la hauteur AH soit divisée en un nombre *infini* de parties égales, et que, par tous les points de division, l'on mène des plans parallèles aux bases, les tétraèdres se trouveront partagés en tranches infiniment *minces,* que l'on pourra considérer sensiblement comme des prismes triangulaires (*). — Mais les prismes du premier

(*) A proprement parler, ces tranches sont des troncs de tétraèdres;

sont respectivement équivalents à ceux du second (n° 432, corol. II) puisqu'ils ont des bases égales et de même hauteur; donc, la somme de tous les prismes du premier tétraèdre est égale à la somme de tous les prismes du second; donc, etc.

Au reste, voici une démonstration tout à fait rigoureuse, et fondée sur la *réduction à l'absurde* :

Admettons, pour le moment, que les deux tétraèdres ne soient pas équivalents, et que l'on ait, par exemple,

$$(1) \qquad \text{SABC} - \text{S'A'B'C'} = \delta.$$

Quelle que soit cette différence δ, on peut la représenter par le volume d'un certain prisme ayant pour base le triangle ABC, et pour hauteur une partie quelconque AX de AH [car on a vu (n° 338) qu'un prisme construit sur une base *donnée* est susceptible de passer par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infini].

Cela posé, divisons la hauteur totale AH en parties égales Aa, aa', a'a'',..., arbitraires, mais moindres que AX; puis, par les points de division a, a', a'',..., menons des plans parallèles aux bases ABC, A'B'C' : — Ces plans déterminent, dans les deux tétraèdres, des sections DEF et D'E'F', GIK et G'I'K',... égales chacune à chacune (n° 344, *scol.*).

Maintenant, en ne considérant d'abord que le premier tétraèdre, menons par les points B et C, E et F, I et K,... des droites Be et Cf, Ei et Fk, Im et Kn,... parallèles à l'arête SA, jusqu'à leurs rencontres respectives avec les droites DE et DF, GI et GK, LM et LN,... suffisamment prolongées. — Nous formons ainsi une série de prismes triangulaires ABCDef, DEFGik, GIKLmn,..., que nous nommerons prismes *extérieurs* [ou *excédents*].

Passant ensuite au tétraèdre S'A'B'C', menons également les droites E'e' et F'f', I'i' et K'k', M'm', et N'n',..., parallèles à l'a-

mais, à raison de l'extrême rapprochement de leurs bases, les arêtes latérales de ces troncs peuvent être regardées comme *parallèles*; et alors, ils deviennent des prismes.

: S′A′, jusqu'à leurs rencontres respectives avec les droites A′B′ A′C′, D′E′ et D′F′, G′I′ et G′F′,... : nous obtenons de ıveaux prismes A′*e′f′*D′E′F′, D′*i′k′*G′I′K′,... que nous ›ellerons prismes *intérieurs* [ou *déficients*]; et ici, il est imtant d'observer que, par cette dernière construction, nous ns un prisme *de moins* que par la première.

Iais si nous comparons successivement les prismes extérieurs premier tétraèdre aux prismes intérieurs du second, nous 'ons, — 1° — que le prisme extérieur DEFG*ik* de la seconde ıche est équivalent au prisme intérieur A′*e′f′*D′E′F′ de la mière tranche (n° 432, *corol.* II), puisqu'ils ont même haur et même base [DEF = D′E′F′]; — 2° — que le prisme exeur de la troisième tranche, GIKL*mn*, est équivalent au ıme intérieur de la seconde tranche, D′*i′k′* E′I′K′;... et ainsi suite.

D'où il résulte que la différence entre la somme des prismes érieurs du premier tétraèdre et la somme des prismes intéırs du second, est représentée par le prisme extérieur ABCD*ef* la première tranche, lequel a pour hauteur A*a*.

On a donc, en appelant S la première somme, et S′ la seconde,

$$S - S' = prisme\ ABCD\ ef,$$

par conséquent, $S - S' < \delta$, puisque δ est, par hypothèse, volume du prisme qui a pour base ABC, et pour hauteur . > A*a*.

Or l'inégalité $S - S' < \delta$ est absurde; car, la première somme tant évidemment plus grande que SABC, et la seconde somme plus petite que S′A′B′C′, on devrait avoir au contraire, par te double raison, $S - S' > \delta$.

Ainsi, il est absurde de supposer le volume du tétraèdre BC différent du volume S′A′B′C′. Donc, etc.

N° 434. — COROLLAIRE. — *Un tétraèdre quelconque* SABC g. 347) *est le tiers d'un prisme triangulaire de même base* ABC FIG. 347. *de même hauteur que lui.*

En supposant menées par le point S, les droites SD, SE, pa-

rallèles et égales à BA, BC, tirons les droites DE, AD, CE: il en résulte une figure ABCSDE qui est évidemment un prisme (nos 322, 338). — Cela posé, par les trois points S, D, C, conduisons un plan SDC qui partage ce prisme en trois parties SABC, SACD, SCDE, dont les volumes sont égaux. — Car d'abord, les tétraèdres SACD, SCDE, sont équivalents (n° 433) comme ayant des bases égales, ACD, DCE, et même hauteur puisqu'ils ont même sommet S et leurs bases placées sur un même plan. — En outre, si nous considérons le tétraèdre SCDE comme ayant son sommet en C, sa base est alors SDE; et les deux tétraèdres CSDE, SABC, sont équivalents comme ayant même base, SDE, ABC, et même hauteur, savoir : la perpendiculaire commune aux plans de ces deux bases. — Ainsi, les trois tétraèdres sont équivalents, et l'un d'eux, SABC, est le *tiers* du prisme; *C. Q. F. D.*

Scolie. — On voit, d'après cela, que

Tout prisme triangulaire est décomposable en trois tétraèdres de même base et de même hauteur que lui.

Ces diverses propositions préliminaires étant établies, nous pouvons facilement en déduire la mesure de toute sorte de polyèdres, en procédant comme pour les polygones.

Fig. 348. Lemme. (*Fig.* 348.)

N° 438. — *Deux parallélipipèdes rectangles* ABCDEFGH, ABCDIKLM, *de même base* ABCD, *sont proportionnels à leurs hauteurs* AE, AI; c'est-à-dire que l'on a

$$par.\,AG : par.\,AL :: AE : AI.$$

Soient d'abord les hauteurs commensurables, et dans le rapport de 14 à 9 par exemple.

Divisons AE en 14 parties égales dont 9 seront alors contenues dans AI; puis, par les points de division, menons des plans parallèles à la base ABCD; il est clair que le parallélipipède AG se trouvera partagé en 14 parallélipipèdes partiels, tous égaux entre eux, dont 9 seront contenus dans le parallélipipède AL.

Ainsi ces deux parallélipipèdes sont entre eux dans le même rapport que les hauteurs AE, AI.

Quant au cas où les hauteurs sont incommensurables, nous ne pourrions que répéter ici les raisonnements qui ont été faits au n° 212 pour les polygones; et nous y renvoyons.

COROLLAIRE I. — Réciproquement : — *Deux parallélipipèdes rectangles de même hauteur* AE = A'E' (*fig.* 349), *sont proportionnels à leurs bases*, ABCD, A'B'C'D'. FIG. 349.

Prenons sur l'arête AB une partie AB″ égale à A'B', et menons le plan B″C″G″E″ parallèle au plan de la face ADEH : nous obtenons ainsi un troisième parallélipipède [auxiliaire] AG″ qui a même base ADHE que le parallélipède AG ; donc, en vertu du théorème précédent, on a la proportion

(1) *par*. AG : *par*. AG″ :: AB : AB″.

Mais, à cause de AE = A'E' et de AB″ = A'B', les rectangles AB″E″E, A'B'F'E', sont égaux ; et les deux parallélipipèdes AG″, AG', ont aussi même base, AB″E″E, A'B'F'E', et sont entre eux comme leurs hauteurs AD, A'D'. Ainsi l'on a la nouvelle proportion

(2) *par*. AG″ : *par*. AG' :: AD : A'D';

d'où, multipliant terme à terme les proportions (1) et (2), et omettant le facteur commun *par*. AG″,

par. AG : *par*. AG' :: AB × AD : AB″ × A'B'.

Or, AB × AD est l'expression numérique de la base ABCD (n° 213); de même, AB″ × A'D', ou A'B' × A'D', est l'expression numérique de la base A'B'C'D'; donc enfin

par. AG : *par*. AG' :: ABCD : A'B'C'D'; *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE II. — *Deux parallélipipèdes rectangles quelconques* AG, AG' (*fig.* 350), *sont proportionnels aux produits respectifs de leur base par leur hauteur*, ABCD × AE, A'B'C'D' × A'E'. FIG. 350.

Prenons sur AE une partie AE″ = A′E′, et par le point E″ conduisons un plan E″F″G″H″ parallèle à ABCD. — Les deux parallélipipèdes AG, AG″, ayant même base ABCD, sont proportionnels à leurs hauteurs AE, AE″; et l'on a

(1) *par.* AG : *par.* AG″ :: AE : AE″ ou A′E′.

Les deux parallélipipèdes AG″, AG′, ayant même hauteur, AE″, A′E′, sont proportionnels à leurs bases ABCD, A′B′C′D′; et l'on a

(2) *par.* AG″ : *par.* A′G′ :: ABCD : A′B′C′D′;

d'où, multipliant les proportions (1) et (2), terme à terme,

par. AG : *par* A′G′ :: ABCD × AE : A′B′C′D′ × A′E′;

C. Q. F. D.

Fig. 350. THÉORÈME VII. (*Fig.* 350.)

N° 436. — Le *volume d'un parallélipipède rectangle quelconque* ABCDEFGH, *a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur*; c'est-à-dire que l'on a

vol. AG = ABCD × AE.

Prenons pour *unité de volume* le cube (n° 340) construit sur l'*unité linéaire;* et soit A′B′C′D′E′F′G′H′ ce cube. On a, d'après le corollaire précédent,

vol. AG : *vol.* A′G′ :: ABCD × AE : A′B′C′D′ × A′E′,

ou bien, à cause de

A′E′ = 1, A′B′C′D′ = A′B′ × A′D′ = 1 × 1 = 1,

et de *vol.* A′G′ = 1,

vol. AG : 1 :: ABCD × AE : 1;

donc *vol.* AG = ABCD × AE; *C. Q. F. D.*

N. B. — Mais il faut se rappeler (n° 213, *N. B.*) que les facteurs

ABCD et AE sont des nombres *abstraits* qui expriment les *rapports* de la base et de la hauteur à leurs unités respectives.

Scolie. — Au lieu de la base ABCD, on peut mettre sa valeur numérique, qui est AB × AD (nº 213); et l'égalité précédente devient

$$vol.\ AG = AB \times AD \times AE;$$

c'est-à-dire que

Un parallélipipède rectangle a aussi pour mesure le produit de ses trois arêtes contiguës.

Ces arêtes sont dites les *trois dimensions* du parallélipipède. — On les nomme quelquefois *la longueur, la largeur,* et *la hauteur* ou *la profondeur.* — AB est la longueur, AD la largeur, et AE la hauteur.

N. B. — Le volume d'un cube est donc égal à la *troisième puissance* de son côté. — De là vient le nom de *cube* pour désigner la troisième puissance d'un nombre.

Nº 437. — Corollaire I. — Le *volume d'un parallélipipède oblique quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

En effet, on a vu (nº 431) que ce parallélipipède peut être remplacé par un certain parallélipipède rectangle de *base équivalente* et de *même hauteur.* Or, le volume de celui-ci est égal au produit de sa base par sa hauteur; donc, le premier a aussi la même mesure, ou bien, *le produit de sa* propre *base par sa hauteur,* puisque cette base est équivalente à celle du parallélipipède rectangle.

N. B. — Les trois *dimensions* du parallélipipède oblique sont, d'abord, les deux dimensions du parallélogramme qui lui sert de base (nº 218), puis, la hauteur du parallélipipède, c'est-à-dire (nº 338) la perpendiculaire commune aux deux bases; et le parallélipipède a encore pour mesure, non plus le produit de ses trois arêtes contiguës, comme pour le parallélipipède rectangle, mais bien *le produit de ses trois dimensions,* telles que nous venons de les définir.

Théorème X.

N° 440. — Le *volume d'un polyèdre quelconque est égal à la somme des volumes de tous les tétraèdres dans lesquels il peut toujours être décomposé* (n° 348).

Cette proposition est évidente par elle-même.

Théorème XI.

N° 441. — Les *aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes, diagonales* ou *lignes homologues* quelconques; — et *leurs volumes sont proportionnels aux cubes de ces mêmes lignes.*

La première partie de la proposition est facile à établir. — Soient M, N, P, Q,... les faces du premier polyèdre, M′, N′, P′, Q′,... les faces homologues du second; et désignons par a et a' deux lignes homologues de ces polyèdres, que l'on sait déjà être proportionnelles dans deux polyèdres semblables (n° 426, *corol.*)

Cela posé, puisque les faces M et M′, N et N′, P et P′,... sont respectivement semblables, on a la suite de rapports égaux

$$M : M' :: a^2 : a'^2, \quad N : N' :: a^2 : a'^2, \quad P : P' :: a^2 : a'^2, \ldots,$$

d'où $$M : M' :: N : N' :: P : P' :: \ldots :: a^2 : a'^2;$$

donc, d'après les propriétés connues des proportions,

$$M + N + P + \ldots : M' + N' + P' + \ldots :: a^2 : a'^2,$$

ou

aire totale du premier polyèdre : *aire totale du second* :: $a^2 : a'^2$.

Pour la seconde partie, considérons d'abord deux tétraèdres
FIG. 339. semblables SABC, S′A′B′C′ (*fig.* 339).

Puisque ces tétraèdres sont semblables, on a la proportion

$$ABC : A'B'C' :: AC^2 : AC'^2 :: SH^2 : S'H'^2.$$

Multipliant cette proportion par la suivante,

$$\tfrac{1}{3}\, SH : \tfrac{1}{3}\, S'H' :: AC : A'C' :: SH : S'H',$$

on obtient

$$ABC \times \tfrac{1}{3}SH : A'B'C' \times \tfrac{1}{3}S'H' :: AC^3 : A'c'^3 :: SH^3 : S'H'^3,$$

ou bien

vol. du premier tétraèdre : *vol. du second* $:: SH^3 : S'H'^3 :: a^3 : a'^3$,

a et a' représentant deux lignes homologues quelconques.

Soient maintenant V, V', les volumes de deux polyèdres semblables quelconques, $T_1 \mid T_2 \mid T_3 \mid \ldots$ et $T'_1 \mid T'_2, \mid T'_3 \ldots$ les volumes des tétraèdres semblables dans lesquels les deux polyèdres peuvent être décomposés, a et a' deux lignes homologues quelconques. — On a la suite de rapports égaux

$$T_1 : T'_1 :: T_2 : T'_2 :: T_3 : T'_3 \ldots :: a^3 : a'^3;$$

donc

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots : T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots :: a^3 : a'^3,$$

ou bien enfin

$$V : V' :: a^3 : a'^3;$$

C. Q. F. D.

Nous compléterons ce qui a rapport à la mesure des polyèdres par deux théorèmes assez importants sur les troncs de prismes et de pyramides.

THÉORÈME XII. (*Fig.* 351.) FIG. 351.

N° 442. — *Tout prisme triangulaire tronqué* ABCDEF, *est équivalent à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une des bases* ABC *du tronc, et pour sommets, ceux de la base opposée.*

Pour le prouver, menons les plans AEC, DEC : — Le prisme tronqué se trouve décomposé en trois tétraèdres EABC, EADC, EDFC. — Le premier a pour base ABC et pour sommet le point E; c'est donc un des tétraèdres de l'énoncé.

Le second, ayant d'abord pour base ADC et pour sommet le point E, peut être transformé en un autre BADC ayant même

base ADC et pour sommet le point B (n° 433); or celui-ci peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D; c'est donc encore un tétraèdre de l'énoncé.

Le troisième, EDFC, peut être remplacé par le tétraèdre BDFC, qui a même base DFC et pour sommet le point B; mais celui-ci est équivalent au tétraèdre BAFC dont le sommet reste le même, et dont la base AFC est équivalente à la base DFC (n° 211); et ce dernier, pouvant être considéré comme ayant pour base ABC, et pour sommet le point F, satisfait également à l'énoncé. Donc, etc.

SCOLIE. — *Un prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit d'une de ses bases par le tiers de la somme des trois perpendiculaires abaissées respectivement sur cette base, de chacun des sommets de la base opposée.*

Si le prisme tronqué est *droit*, les perpendiculaires sont les arêtes elles-mêmes.

FIG. 352. THÉORÈME XIII. (*Fig.* 352.)

N° 443. — *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives, la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une figure moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

Soit, *en premier lieu*, un tronc de tétraèdre ABCDEF.

Tirons les trois diagonales EA, EC, et AF: — La figure se trouve ainsi décomposée en trois tétraèdres EABC, EADF, EAFC. Or le premier, ayant pour sommet le point E, et pour base le triangle ABC, satisfait déjà à l'énoncé; le second, pouvant être considéré comme ayant pour sommet le point A, et pour base le triangle DEF, satisfait également à l'énoncé, puisque sa hauteur est la perpendiculaire commune aux deux bases, et que sa base DEF est la base supérieure du tronc.

Il reste maintenant à *transformer* le troisième tétraèdre EAFC. — Pour cela, menons du point E la droite EG parallèle à AD; comme elle est menée par un point du plan EDAB qui contient

la droite AD, elle se trouve elle-même située dans ce plan et rencontre nécessairement la droite AB en un point G, que nous pouvons joindre aux points C et F par les droites GC, GF. — Cela posé, les deux tétraèdres GAFC, EAFC, sont *équivalents*, comme ayant la base commune AFC, et même hauteur, puisque les sommets G, E, sont situés sur une même droite parallèle à la base. Or, le tétraèdre GAFC peut être considéré comme ayant pour sommet le point F, et pour base le triangle AGC; il a donc pour hauteur celle du tronc, et il ne s'agit plus que de prouver que sa base AGC est *moyenne proportionnelle* entre les bases ABC, DEF.

A cet effet, menons GI parallèle à BC: on a (n° 219, *corol.*) la

proportion ABC : AGC :: AGC : AGI;

mais le triangle AGI est égal au triangle DEF, puisqu'ils ont un angle égal, l'un en A, l'autre en D (n° 322), compris entre côtés

égaux, AG = DE, AI = DF;

donc aussi ABC : AGC :: AGC : DEF.

Ainsi le troisième tétraèdre EADC peut être remplacé par un autre FAGC satisfaisant à l'énoncé.

Considérons, en *second lieu*, le tronc de pyramide polygonale MNPQR*mnpqr*. — Achevons la pyramide, et soit T le sommet de cette pyramide. — Dans le plan de la base MNPQR, construisons un triangle ABC équivalent à cette base, et prenons au-dessus du plan un point quelconque S dont la distance au plan ABC soit égale à la distance du point T à ce même plan; puis, tirons les droites SA, SB, SC. — Le tétraèdre SABC est équivalent à la pyramide TMNPQR, puisqu'ils ont même hauteur et des bases équivalentes (n° 459). Si, maintenant, nous prolongeons le plan de la base supérieure *mnpqr* jusqu'à sa rencontre avec le tétraèdre SABC, nous obtenons une section DEF équivalente à la section *mnpqr* (n° 344, *corol.*), ce qui donne alors le tétraèdre SDEF équivalent à la pyramide T*mnpqr*; d'où il suit que le tronc de tétraèdre

ABCDEF est équivalent au tronc de pyramide T*mnpqr*. Or le premier, comme nous venons de le voir, équivaut à la somme de trois tétraèdres ayant pour hauteur celle du tronc, et pour bases, la base inférieure, la base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ces deux bases. Donc, puisque les bases du tronc de tétraèdre sont d'ailleurs équivalentes aux bases du tronc de pyramide, nous pouvons dire aussi que le tronc de pyramide a pour expression de son volume, etc.; *C. Q. F. D.*

Scolie. — Nommons H la hauteur d'un tronc de pyramide à bases parallèles, B et b', ces deux bases, et V le volume du tronc; on a (n° 440, *scol.*), pour l'expression abrégée du volume de ce tronc,

$$V = \frac{H}{3}(B + b' + \sqrt{B \times b'})$$

[car on sait qu'en général, $\sqrt{a \times b}$ représente une moyenne proportionnelle entre les quantités a et b].

CHAPITRE II.

AIRES ET VOLUMES DU CYLINDRE ET DU CONE. — AIRES ET VOLUMES DE LA SPHÈRE ET DES DIVERSES PARTIES DE LA SPHÈRE.

§ I. — *Du cylindre et du cône.*

Théorème I.

N° 444. — *L'aire de la surface latérale* [ou *convexe*] *d'un cylindre droit est égale au produit de la circonférence de sa base multipliée par son arête ou sa hauteur.*

En effet, on a vu (n° 386) que cette surface peut se développer sur un plan suivant un rectangle ayant pour base la longueur

la circonférence de la base du cylindre, et, pour hauteur, l'a-
te du cylindre. Or le rectangle a pour mesure le produit de sa
se par sa hauteur (n° 213); donc, etc.

SCOLIE. — Nommons A ou H l'arête ou la hauteur du cylindre,
le rayon de sa base, et S son aire; on a

$$S = 2\pi R \times A = 2\pi R \times H = 2\pi RA = 2\pi RH.$$

THÉORÈME II.

N° 445. — *Le volume d'un cylindre est égal au produit de
ire de sa base, multipliée par sa hauteur.*

En effet, le cylindre peut être considéré comme un prisme ré-
lier d'un nombre infini de faces latérales (n° 355). Or le prisme
our mesure le produit de sa base par sa hauteur (n° 438); donc
ssi, etc....

SCOLIE. — Soit V le volume du cylindre; on a

$$V = \pi R^2 \times H = \pi R^2 H$$

R^2 étant l'expression du cercle qui lui sert de base (n° 280)].

THÉORÈME III.

N° 446. — *L'aire de la surface latérale* [ou *convexe*] *d'un cône
oit est égale au produit de la circonférence de sa base, mul-
liée par la moitié de son arête.*

En effet, il a été démontré (n° 361) que cette surface, déve-
ppée sur un plan, équivaut à un secteur circulaire ayant pour
se un arc de cercle égal en longueur à la circonférence de la base
cône, et décrit avec l'arête pour rayon. Or l'aire de ce secteur
our expression le produit de l'arc qui lui sert de base, multi-
é par la moitié du rayon; donc, etc.

SCOLIE. — Soient A l'arête du cône, R le rayon de sa base,
S sa surface; on a pour l'expression de son aire

$$S = \pi . R \times A = \pi RA.$$

FIG. 353.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 353.)

N° **447**. — *La surface latérale* [ou *convexe*] *d'un tronc de cône droit*, ABA′B′, *à bases parallèles, a pour mesure le produit de son arête multipliée par la demi-somme des circonférences des bases*, ou bien, *par la circonférence* IK *de la section faite à égale distance des deux bases.*

Soit S le sommet du cône entier, et concevons que la surface de ce cône ait été développée sur un plan (n° **381**). — Le développement de la surface latérale du tronc de cône se fera suivant un trapèze circulaire BDB′D′ (n° **282**, *scol.* I) ayant pour côté latéral, l'arête BB′ du tronc, et pour bases, des arcs de cercle égaux en longueur aux circonférences des deux bases du tronc. Or, ce trapèze a pour mesure (*même numéro*) le produit de son côté multiplié par la demi-somme des bases, ou bien, par l'arc de cercle I′K′ mené à égale distance des deux bases, lequel représente également la circonférence développée de la section faite à égale distance des deux bases dans le tronc de cône; donc, etc.

SCOLIE. — Un cône entier peut être considéré comme un tronc de cône dont la base supérieure serait *nulle;* et les résultats obtenus pour celui-ci ne cessent pas d'avoir lieu dans ce cas particulier. — Donc, en vertu de ce qui vient d'être démontré, — *L'aire de la surface latérale d'un cône a pour expression le produit de son arête multipliée par la circonférence de la section faite à égale distance du sommet et de la base;* — ce qui est conforme avec la mesure établie au n° **446**, puisque cette circonférence est moitié de la circonférence de la base.

THÉORÈME V.

N° **448**. — *Le volume d'un cône droit est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Car le cône peut être considéré comme une pyramide régulière

n nombre infini de faces (n° 360); or le volume d'une py-
ride a pour expression le tiers du produit de sa base par sa
teur; donc, etc.

V. B. — En désignant par H la hauteur, par R le rayon de la
e, ce qui donne πR^2 pour l'aire de cette base, on a

$$\textit{vol. du cône} = \pi R^2 \times \frac{H}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

THÉORÈME VI.

[° 449. — *Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles est*
l à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur
mune celle du tronc, et pour bases, l'un la base inférieure,
autre la base supérieure, et le troisième une moyenne propor-
nelle entre les deux bases.

Même démonstration que pour le tronc de pyramide (*voyez le*
143).

COLIE. — Soient R, R', les rayons des bases, H la hauteur du
ic, V son volume; on a

$$V = \frac{H}{3}(\pi R^2 + \pi R'^2 + \pi RR') = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R'^2 + RR'):$$

la moyenne proportionnelle est représentée par

$$\sqrt{\pi R^2 \times \pi R'^2} \quad \text{ou} \quad \pi RR'.$$

[° 450. — Deux cylindres, ou deux cônes, sont dits *semblables*
qu'ils sont engendrés par des rectangles ou des triangles rectan-
semblables. — Cela posé,

THÉORÈME VII.

es aires de deux cylindres ou de deux cônes semblables sont
portionnelles aux carrés de leurs arêtes, de leurs hauteurs, ou
rayons de leurs bases; — les volumes sont proportionnels aux
es de ces mêmes lignes.

Nommons R et r, A et a, H et h, S et s, V et v, les rayons des bases, les arêtes, les hauteurs, les aires, et les volumes de deux cylindres ou de deux cônes semblables.

On a d'abord, pour deux cylindres semblables,

$$S = 2\pi R \times H, \quad s = 2\pi r \times h \text{ (n° 444)};$$

d'où
$$S : s :: RH : rh;$$

mais les rectangles générateurs étant semblables, donnent

$$R : r :: H : h,$$

d'où
$$R \times H : r \times h :: H^2 : h^2 :: R^2 : r^2;$$

donc
$$S : s :: H^2 : h^2 :: R^2 : r^2.$$

Ensuite
$$V = \pi R^2 \times H, \quad v = \pi r^2 \times h,$$

d'où
$$V : v :: R^2H : r^2h;$$

mais de
$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2,$$

on déduit
$$R^2H : r^2h :: H^3 : h^3 :: R^3 : r^3;$$

donc
$$V : v :: H^3 : h^3 :: R^3 : r^3.$$

Pour deux cônes semblables,

$$S = \pi R \times A, \quad s = \pi r \times a \text{ (n° 446)},$$

d'où
$$S : s :: R \times A : r \times a;$$

mais les triangles générateurs étant semblables, donnent

$$R : r :: A : a,$$

d'où
$$R \times A : r \times a :: A^2 : a^2 :: R^2 : r^2 :: H^2 : h^2;$$

donc
$$S : s :: A^2 : a^2 :: R^2 : r^2 :: H^2 : h^2.$$

Enfin, $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}, \quad v = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ (n° 447),

d'où
$$V : v :: R^2H : r^2h;$$

ais de $R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$

déduit $R^2H : r^2h :: H^3 : h^3$;

nc $V : v :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3 :: R^3 : r^3$.

C. Q. F. D.

§ II. — *De la sphère.*

N° 481. — Nouvelles définitions. — On donne le nom de *ne sphérique* à toute portion de la surface d'une sphère, comise entre deux plans parallèles; les *bases* de cette zone sont les ux cercles déterminés par ces plans.

Lorsque l'un des plans est tangent à la sphère (n° 365), la zone t dite *à une seule base*, et se nomme encore une *calotte sphéque.*

Un *segment sphérique* est la portion de sphère comprise entre ux plans parallèles; et les cercles déterminés par ces plans nt les *bases* du segment ainsi que de la zone sphérique qui leur rrespond.

Si l'un des plans est tangent, le segment est dit *à une seule se.*

La *hauteur* d'une zone ou d'un segment sphérique est la disnce des bases; ou bien encore, c'est la portion du diamètre perndiculaire aux deux bases, comprise entre ces bases.

Enfin, un *secteur sphérique* est la figure engendrée par un secur circulaire (n° 14) tournant autour de l'un de ses côtés. — En autres termes, c'est une portion de sphère comprise entre une ne à une seule base, et la surface conique qui a pour sommet le ntre, et pour base celle de la zone.

(*Voyez* d'ailleurs les n°s 366, 374 pour les définitions du seau et de l'*onglet* sphériques, du *triangle*, du *tétraèdre*, et la *pyramide* sphériques.)

Lemme. (*Fig.* 354.) Fig. 354.

N° 482. — *Une droite* AB *de longueur donnée, et une droite définie* XY, *étant situées dans un même plan,* si l'on suppose

que la première fasse une révolution entière autour de la seconde, *la surface engendrée par la première est équivalente à celle d'un cylindre ayant pour hauteur la projection de cette droite sur l'autre, et pour rayon de sa base la perpendiculaire* CO *élevée à la première droite* AB *par son milieu* C, *et prolongée jusqu'à sa rencontre avec la droite indéfinie :* — Ou, en termes abrégés,

$$surf.\ AB = PQ \times circ.\ OC.$$

En effet, cette surface est évidemment celle d'un tronc de cône à bases parallèles, *cerc.* AP, *cerc.* BQ; et si, du point C, nous abaissons CI perpendiculaire sur XY, nous avons

$$surf.\ AB = AB \times circ.\ CI = AB \times 2\pi CI \text{ (n° 447)}.$$

Cela posé, soit menée AK perpendiculaire à BQ : les deux triangles ABK, COI, sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, et donnent (n° 194) la proportion

$$AB : OC :: AK : CI, \quad \text{d'où} \quad AB : 2\pi OC :: AK : 2\pi CI;$$

et $$AB \times 2\pi CI = AK \times 2\pi OC = PQ \times circ.\ OC.$$

Donc aussi, $surf.\ AB = PQ \times circ.\ OC$;

C. Q. F. D.

N. B. — Il peut arriver, comme cas particuliers, que la
Fig. 354 *bis*. droite AB ait une position telle que AB (*fig.* 354 *bis*), le point A étant situé sur l'axe XY, ou bien, une position telle que A'B', parallèle à l'axe.

Dans le premier cas, on a *surf.* AB = AB × *circ.* CI (n° 447, *scol.*); mais les deux triangles semblables ABQ, COI, donnent encore

$$AB \times circ.\ CI = AQ \times circ.\ OC;$$

donc $$surf.\ AB = AQ \times circ.\ OC.$$

Dans le second, la surface engendrée par A'B' est celle d'un cylindre dont l'arête ou la hauteur est A'B' ou P'Q', et la base est *cerc.* B'Q' ou *cerc.* O'C'; donc

$$surf.\ A'B' = P'Q' \times circ.\ O'C'.$$

Ainsi, la proposition est encore vraie dans ces deux cas.

N° 453. — COROLLAIRE I. — *L'aire de la surface engendrée par une portion de polygone régulier,* ou plus généralement, *par une ligne polygonale régulière* ABCDE (fig. 355) *tournant autour du* FIG. 355.
diamètre AA′ *du cercle circonscrit, est égale au produit de sa hauteur* AS, *multipliée par la circonférence du cercle inscrit à ce polygone.*

Soient abaissées des points B, C, D, E, les perpendiculaires BP, CQ, DR, ES, sur le diamètre AA′, puis, du centre O les perpendiculaires OI, OK,... sur AB, BC,.... On a, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{aligned} aire\ \mathrm{AB} &= \mathrm{AP} \times circ.\ \mathrm{OI}, \\ aire\ \mathrm{BC} &= \mathrm{PQ} \times circ.\ \mathrm{OK}, \\ aire\ \mathrm{CD} &= \mathrm{QR} \times circ.\ \mathrm{OL}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant et observant que $\mathrm{OI} = \mathrm{OK} = \mathrm{OL}\ldots$,

$$aire\ \mathrm{ABCDE} = (\mathrm{AP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QR} + \ldots)\, circ.\ \mathrm{OI} = \mathrm{AS} \times circ.\ \mathrm{OI}.$$

On aurait de même $aire\ \mathrm{BCDE} = \mathrm{PS} \times circ.\ \mathrm{OI}$.

THÉORÈME I. (*Fig.* 355.) FIG. 355.

N° 454. — *L'aire d'une zone sphérique,* soit à une seule base, AMBM′C, soit à deux bases, BM′CM″D, *est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la sphère,* circ. OA, *multipliée par sa hauteur* AQ, ou PR;

Et — *L'aire de la sphère entière est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle, multipliée par son diamètre.*

En effet, les arcs AMBM′C, BM′CM″D, et la demi-circonférence ADA′, peuvent être considérés comme des lignes polygonales régulières d'un nombre infini de côtés [ou *éléments* (n° 248)]; auquel cas, le rayon du cercle inscrit devient égal au rayon du cercle circonscrit, ou à celui de la sphère. — On a donc

$$\begin{aligned} aire\ \mathrm{AMBM'C} &= \mathrm{AQ} \times circ.\ \mathrm{OA}, \\ aire\ \mathrm{BM'CM''D} &= \mathrm{PR} \times circ.\ \mathrm{OA}, \\ aire\ totale\ de\ la\ sph\grave{e}re &= \mathrm{AA'} \times circ.\ \mathrm{OA}; \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

N. B. — Soient R le rayon d'une sphère, H la hauteur d'une zone à une ou à deux bases, et S l'aire de cette zone ou de la sphère entière; — on a les expressions abrégées

$$S = H \times 2\pi R = 2\pi RH, \quad S = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2;$$

et cette dernière démontre que — *L'aire totale de la sphère est quadruple de celle d'un grand cercle.*

Corollaire. — Si pour une sphère donnée, on prend pour *unité de surface* le fuseau *droit* (nº 366, *N. B.*) ou le *quart* de la surface totale de la sphère, et l'angle *droit* pour *unité* d'angle, on reconnaît aisément que

Fig. 356. *L'aire d'un fuseau sphérique quelconque* ABCA′ (*fig.* 356) est *exprimée par son angle* A;

Ce qui veut dire que, F désignant l'*aire* du fuseau droit,

fuseau ABCA′ : F :: A : 1 *droit.*

Car, si nous menons par le centre un plan BCB′C′ perpendiculaire à l'arête AA′ du fuseau, nous avons

fuseau ABCA′ : *aire totale de la sphère* :: *arc* BC : *circ.* BCB′C′,

d'où *fuseau* ABCA′ : 4F :: A : 4 *angles droits*,

et par conséquent, *fuseau* : F :: A : 1 *droit.*

On dit, pour abréger, que *fuseau* ABCA′ = A.

Fig. 357.

Théorème II. (*Fig.* 357.)

Nº 488. — L'*aire d'un triangle sphérique quelconque* ABC [c'est-à-dire, le *rapport* de ce triangle au fuseau droit], est *égale à l'excès de la demi-somme de ses trois angles sur un angle droit,* ou plus exactement, *est égale au rapport de cet excès à l'angle droit.*

Prenons pour plan de la figure (nº 369) celui de la circonférence de grand cercle BCB′C′, dont le côté BC du triangle ABC est un arc, et achevons les circonférences ABA′B′, ACA′C′, correspondant aux deux autres côtés AB, AC. — Cela posé,

Le fuseau sphérique ABCA′, dont l'angle est A, se compose

des deux triangles ABC, A′BC; or ce dernier est *symétrique* par rapport au triangle AB′C′ (n° 338), et ces triangles sont *équivalents* (n° 378); d'où l'on voit que le fuseau ABCA′ est égal à la somme des deux triangles ABC, AB′C′.

Il est d'ailleurs évident que les fuseaux en B et en C sont respectivement égaux aux sommes de triangles BAC, B′AC, et CAB, C′AB. — On a donc les égalités

$$\begin{aligned} ABC + AB'C' &= \textit{fuseau}\ A = A\ (\textit{corol. précédent}),\\ BAC + B'AC &= \textit{fuseau}\ B = B,\\ CAB + C'AB &= \textit{fuseau}\ C = C; \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant et observant que ABC + AB′C′ + B′AC + C′AB donne la surface d'un hémisphère, ou 2F,

$$2\,ABC + 2F = A + B + C.$$

Par conséquent, $\textit{aire}\ ABC = \dfrac{\frac{1}{2}(A + B + C) - 1^d}{1^d}$,

F étant pris pour *unité de surface*, et *l'angle droit* pour *unité d'angle*.

N. B. — En désignant par r le rayon de la sphère, on a pour la valeur absolue de l'aire du triangle

$$\textit{aire}\ ABC = \frac{\frac{1}{2}(A + B + C) - 1^d}{1^d}.\pi r^2.$$

LEMME. (*Fig.* 358.) FIG. 358.

N° 486. — *Le volume de l'espace engendré par la révolution d'un triangle quelconque* OAB *tournant autour d'une droite indéfinie* XY, *menée dans son plan par un de ses sommets* O, *a pour expression le produit de la surface engendrée par le côté opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur* OC *du triangle, correspondante à ce côté considéré comme base.*

[Cette figure n'est autre chose que l'espace limité par la surface du tronc de cône dont les bases ont pour rayons les perpendiculaires AP, BQ, abaissées des points A, B, sur l'axe, d'une part, et, de l'autre, par les deux surfaces coniques qui ont le point O pour sommet commun, et *cercle* AP, *cercle* BQ, pour bases.]

Pour démontrer cette proposition, prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en S avec la droite XY, et cherchons d'abord à évaluer le volume engendré par le triangle OBS. — Ce volume se compose évidemment des deux cônes engendrés par les triangles rectangles OBQ, SBQ.

Or,

$$vol.\ \text{OBQ} = \pi\overline{\text{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}\text{OQ}, \quad vol.\ \text{SBQ} = \pi\overline{\text{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}\text{SQ}$$ (n° 448)

donc

$$vol.\ \text{OBS} = \pi\overline{\text{BQ}}^2 \times \tfrac{1}{3}(\text{OQ} + \text{SQ}) = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{BQ}}^2 \times \text{OS}.$$

Cette dernière expression revient à $\frac{1}{3}\pi\text{BQ} \times \text{BQ} \times \text{OS}$; mais $\text{BQ} \times \text{OS}$, exprimant le *double* de l'aire du triangle OBS (n° 215), peut être remplacé $\text{SB} \times \text{OC}$ qui représente également le double de cette aire; ainsi, l'on a encore

$$vol.\ \text{OBS} = \tfrac{1}{3}\pi\text{BQ} \times \text{SB} \times \text{OC} = \pi\text{BQ} \times \text{SB} \times \tfrac{1}{3}\text{OC}.$$

Si maintenant on se rappelle que $\pi\text{BQ} \times \text{SB}$ exprime l'aire de la surface conique engendrée par SB (n° 446), on obtient

$$vol.\ \text{OBS} = \textit{aire du cône}\ \text{SB} \times \tfrac{1}{3}\text{OC}.$$

On reconnaîtrait de la même manière que

$$vol.\ \text{OAS} = \textit{aire du cône}\ \text{SA} \times \tfrac{1}{3}\text{OC}.$$

Le volume cherché étant la différence de ces deux-ci, on trouve enfin

$$vol.\ \text{OAB} = (\textit{aire}\ \text{SB} - \textit{aire}\ \text{SA}) \times \tfrac{1}{3}\text{OC},$$

ou

$$vol.\ \text{OAB} = \textit{aire}\ \text{AB} \times \tfrac{1}{3}\text{OC};$$

C. Q. F. D.

N. B.—Le théorème est encore vrai, mais exige une démons-
FIG. 358 *bis*. tration spéciale, lorsque la base AB (*fig.* 358 *bis*) du triangle OAB est parallèle à l'axe.

Le volume engendré est alors la différence entre le volume du cylindre ABQP et les volumes des cônes AOP, BOQ. Or, on a

$$cyl.\ \text{ABQP} = \pi\overline{\text{BQ}}^2 \times \text{AB} = \pi\overline{\text{OC}}^2 \times \text{PQ}$$ (n° 445),

$$\textit{cône}\ \text{AOP} + \textit{cône}\ \text{BOQ} = \pi\overline{\text{OC}}^2 \times \frac{\text{PQ}}{3}$$ (n° 448);

d'où $vol.\ AOB = \pi\overline{OC}^2 \times \frac{2}{3}\ PQ = 2\pi\ OC \times PQ \times \frac{OC}{3}$;

mais $2\pi\ OC \times PQ$, ou $2\pi BQ \times AB$ est l'expression de l'aire latérale du cylindre, engendrée par AB. — Donc

$$vol.\ AOB = aire\ AB \times \tfrac{1}{3} OC.$$

Corollaire. — *Le volume de l'espace engendré par un secteur polygonal* OABCDO, ou OBCDEO (*fig.* 355), *tournant autour d'un diamètre* AA′, *est égal au produit de l'aire de la surface qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon du cercle inscrit.* Fig. 355.

Car on a, d'après le lemme qui précède,

$$vol.\ OAB = aire AB \times \tfrac{1}{3} OI,\quad vol.\ OBC = aire BC \times \tfrac{1}{3} OK, \ldots;$$

d'où, à cause de $OI = OK = OL = \ldots$,

$$vol.\ OABCDO = aire\ ABCD \times \tfrac{1}{3} OI,$$
$$vol.\ OBCDEO = aire\ BCDE \times \tfrac{1}{3} OI.$$

Théorème III. (*Fig.* 355.) Fig. 355.

N° 457. — *Le volume d'un secteur sphérique quelconque,* OAMBM′CO, *est égal au produit de la zone sphérique qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.*

Car le secteur polygonal générateur, OAMBM′CO, se compose d'une *infinité* de triangles isoscèles ayant pour sommet le point O, et pour bases les *éléments* (n° 248) de l'arc AMBM′C. — Or, l'ensemble de ces triangles, en tournant autour de AA′, engendre un volume qui a pour expression le produit de l'aire engendrée par chacun des éléments correspondants, multipliée par le tiers du rayon (n° 456); donc aussi, etc.

Par conséquent,

Le volume de la sphère totale a pour expression le produit de son aire totale, multipliée par le tiers du rayon.

Scolie I. — On parvient encore à cette dernière expression en considérant une surface sphérique comme composée d'un nombre *infini* de *facettes infiniment petites* et sensiblement *planes*, qui

sont alors les bases d'autant de cônes ou de pyramides, ayant pour sommet commun le centre O de la sphère. — D'où il résulte que la somme de tous ces cônes, ou de toutes ces pyramides, c'est-à-dire le volume total de la sphère, a pour expression le produit de la somme de toutes les bases, ou de l'aire totale de la sphère, multipliée par *le tiers* de la hauteur commune, qui n'est autre que le rayon de la sphère.

Et l'on voit aussi immédiatement par là, que

Le volume d'un tétraèdre, et, en général, *d'une pyramide sphérique, est égal au produit de l'aire du triangle ou du polygone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon.*

SCOLIE II. — En nommant R le rayon d'une sphère, on a pour l'expression de son volume V,

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

ou bien, désignant par D son diamètre, qui est égal à 2R,

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{D^3}{8} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Quant au secteur sphérique, soit H la hauteur de la zone correspondante; on a

$$V = 2\pi RH \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

N. B. — On a souvent besoin de rappeler ces expressions dans les applications.

FIG. 359. THÉORÈME IV. (*Fig.* 359.)

N° 488. — Le *volume d'un segment sphérique* BMCQP *est égal à la somme des volumes,* — 1° — d'UNE SPHÈRE *ayant pour diamètre la hauteur* PQ *du segment,* — 2° — d'UN CYLINDRE *dont la hauteur serait cette même hauteur, et la base,* UNE MOYENNE PAR DIFFÉRENCE *entre les deux bases du segment;* c'est-à-dire que l'on a

$$vol.\ BMCQP = \frac{1}{6}\overline{PQ}^3 + \frac{cerc.\ BP + cerc.\ CQ}{2} \cdot PQ.$$

En effet, le volume cherché se compose évidemment du volume

engendré par le segment circulaire BMCIB tournant autour de AA', et du volume du tronc de cône engendré par le trapèze BCQP. — Cherchons d'abord à déterminer le premier de ces deux volumes, ou *vol.* BMCIB.

On a $\quad vol.\ \text{BMCIB} = vol.\ \text{OBMC} - vol.\ \text{OBC};$

or, $\quad vol.\ \text{OBMC} = aire\ de\ la\ zone\ \text{BMC} \times \frac{1}{3}\text{OC}$ (n° 487),

ou $\quad vol.\ \text{OBMC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OC}}^2 \times \text{PQ}$ (même numéro, *scol.* II),

et $\quad vol.\ \text{OBC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times \text{PQ}$ (n° 486, *corol.*);

ainsi $\quad vol.\ \text{BMCIB} = \frac{2}{3}\pi.(\overline{\text{OC}}^2 - \overline{\text{OI}}^2)\,\text{PQ} = \frac{2}{3}\pi.\text{CI}^2.\text{PQ};$

mais $\quad \text{CI} = \frac{1}{2}\text{CB};\quad$ d'où $\quad \text{CI}^2 = \frac{1}{4}\text{CB}^2;$

donc enfin $\quad vol.\ \text{BMCIB} = \frac{2}{3}\pi.\frac{1}{4}\overline{\text{CB}}^2.\text{PQ} = \frac{1}{6}\pi.\overline{\text{CB}}^2.\text{PQ}.$

Cela posé, ajoutons à ce volume celui du tronc de cône BCQP,

c'est-à-dire $\quad \frac{1}{3}\pi\,(\overline{\text{CQ}}^2 + \overline{\text{BP}}^2 + \text{CQ}.\text{BP}).\text{PQ}$ (n° 449);

il vient $\quad vol.\ \text{BMCQP} = \frac{1}{6}\pi.\overline{\text{CB}}^2.\text{PQ} + \frac{1}{3}\pi\,(\overline{\text{CQ}}^2 + \overline{\text{BP}}^2 + \text{CQ}.\text{BP}).\text{PQ},$

ou bien, en réduisant au même dénominateur, et mettant $\frac{1}{6}\pi.\text{PQ}$ en facteur commun,

$$vol.\ \text{BMCQP} = \frac{1}{6}\pi.\text{PQ}\,(\overline{\text{CB}}^2 + 2\overline{\text{CQ}}^2 + 2\overline{\text{BP}}^2 + 2\text{CQ}.\text{BP}).$$

Remarquons maintenant que

$$\overline{\text{CB}}^2 = \overline{\text{BG}}^2 + \overline{\text{CG}}^2 = \overline{\text{PQ}}^2 + (\text{CQ} - \text{BP})^2 = \overline{\text{PQ}}^2 + \overline{\text{CQ}}^2 + \overline{\text{BP}}^2 - 2\text{CQ}\times\text{BP};$$

d'où, en substituant dans l'expression précédente, et réduisant,

$$vol.\ \text{BMCQP} = \frac{1}{6}\pi.(\overline{\text{PQ}}^2 + 3\overline{\text{CQ}}^2 + 3\overline{\text{BP}}^2)\,\text{PQ},$$

expression qui peut se décomposer dans les deux suivantes,

$$\frac{1}{6}\pi\overline{\text{PQ}}^3 \text{ et } \frac{1}{2}(\pi\overline{\text{CQ}}^2 + \pi\overline{\text{BP}}^2).\text{PQ} \text{ ou } \times \frac{cerc.\ \text{CQ} + cerc.\ \text{BP}}{2}.\text{PQ};$$

C. Q. F. D.

SCOLIE GÉNÉRAL *sur la sphère.* — Les quatre théorèmes précédents et les conséquences que nous en avons déduites fournissent le moyen d'obtenir les *aires* et les *volumes* de toutes les parties d'une sphère dont le rayon R est donné.

Nous ajouterons cependant que l'*onglet sphérique*, tel qu'il a été défini au n° 366, *N. B.*, *a pour mesure le rapport de l'angle rectiligne correspondant*, à l'angle *droit;* l'onglet terminé par un fuseau *droit*, ou le *quart* de la sphère (n° 454, *corol.*), étant pris pour unité.

THÉORÈME V.

N° 459. — *Les aires totales de deux sphères sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons* ou *de leurs diamètres;* et *leurs volumes sont proportionnels aux cubes de ces mêmes lignes.*

En effet, les formules

$$S = 4\pi R^2, \quad S' = 4\pi R'^2, \quad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3, \quad V' = \tfrac{4}{3}\pi R'^3,$$

donnent $S : S' :: 4\pi R^2 : 4\pi R'^2 :: R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2$,

et $V : V' :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi R'^3 :: R^3 : R'^3 :: D^3 : D'^3$.

SCOLIE. — Deux *secteurs* sphériques sont dits *semblables* dans des sphères de rayons différents, R, R', lorsque les secteurs circulaires *générateurs* sont *semblables*, c'est-à-dire (n° 252), correspondent *à un même angle au centre;* et il serait facile de reconnaître

1° — Que *les zones semblables sont proportionnelles aux carrés des rayons* R, R', *et aux carrés de hauteurs;* — 2° — que *les secteurs sphériques semblables sont proportionnels aux cubes de ces mêmes lignes.*

Nous terminerons ce chapitre par un rapprochement assez curieux entre les *aires* et les *volumes* des trois corps ronds.

De la sphère, du cylindre et du cône circonscrits.

N° 460. — Soient un cercle décrit avec un rayon OD = R
FIG. 360. (*fig.* 360), puis un carré EFGK, et un triangle équilatéral SAB, circonscrits à ce cercle; — les bases KG, AB, de ces deux der-

nières figures, étant supposées tangentes au même point D du cercle.

On a évidemment $KG = CD = 2R$; et il a d'ailleurs été démontré au n° 257, *corol.* II, que

$$AB = SA = 2R\sqrt{3}, \quad SD = 3\,OD = 3R.$$

Cela posé, faisons tourner le demi-cercle CID, le rectangle CEKD, et le triangle rectangle SAD, autour de l'axe SD. — Dans ce mouvement, les trois figures engendreront *une sphère* de diamètre $2R$, *un cylindre* ayant pour rayon $DK = R$ et pour hauteur $EK = CD = 2R$, puis, *un cône* dont la base aura pour rayon $AD = R\sqrt{3}$, l'arête étant $SA = 2R\sqrt{3}$ et la hauteur $SD = 3R$.

Ces deux dernières figures se nomment le *cylindre* et le *cône équilatéral circonscrits.*

Évaluons successivement les aires et les volumes de ces trois corps.

1° — *aire totale de la sphère* $= 4\pi R^2$ (n° 434),

volume de la sphère $= \frac{4}{3}\pi R^3$ (n° 437),

2° — *aire de la surf. latér. du cyl.* $= 4\pi R^2$ (n° 444),

ou, en ajoutant les deux bases dont la valeur est $2\pi R^2$,

aire totale du cylindre $= 6\pi R^2$,

volume du cylindre $= 2\pi R^3$ (n° 445),

3° — *aire de la surf. latér. du cône* $= 6\pi R^2$ (n° 446);

ou, en ajoutant la base dont la valeur est $3\pi R^2$,

aire totale du cône $= 9\pi R^2$,

volume du cône $= 3\pi R^3$ (n° 448).

Or, si l'on compare d'abord la sphère au cylindre, on voit que — *L'aire totale de la sphère est égale à l'aire de la surface latérale du cylindre*, et *les* $\frac{2}{3}$ *de l'aire totale du cylindre*; — le *volume* de la sphère est aussi les $\frac{2}{3}$ *de celui* du cylindre.

Ainsi, *Les volumes sont entre eux dans le même rapport que les aires totales.*

Comparant ensuite la sphère au cône, on reconnaît que l'aire totale de la sphère est les $\frac{2}{3}$ *de l'aire latérale du cône, et les* $\frac{4}{9}$ *de l'aire totale du cône; — le volume de la sphère est aussi les* $\frac{4}{9}$ *de celui du cône.*

Donc *les volumes sont encore entre eux dans le même rapport que les aires totales.*

Enfin, le cylindre et le cône étant comparés entre eux, on voit que les *aires latérales*, les *aires totales*, les *volumes* sont respectivement *dans le même rapport* 2 : 3.

Scolie. — Cette propriété du cylindre et du cône circonscrits à la sphère, qui consiste en ce que les *volumes* de la sphère et du cylindre ou du cône sont entre eux dans le même rapport que leurs *aires totales*, n'est pas particulière au cône et au cylindre: elle appartient également à tous les polyèdres dont les différentes faces sont tangentes à la sphère.

En effet, une pareille figure peut être décomposée en pyramides ayant pour *sommet commun* le centre de la sphère, et pour bases respectives les faces du polyèdre. — Dès lors, son volume a pour expression le produit de la somme de toutes les bases, ou de l'aire totale du polyèdre, multipliée par le *tiers* de la hauteur commune qui n'est autre que le rayon de la sphère (n° 365). D'un autre côté, le volume de la sphère est égal au produit de l'aire totale de la sphère, multipliée par le tiers du rayon; d'où il résulte nécessairement que les volumes sont entre eux dans le même rapport que les aires.

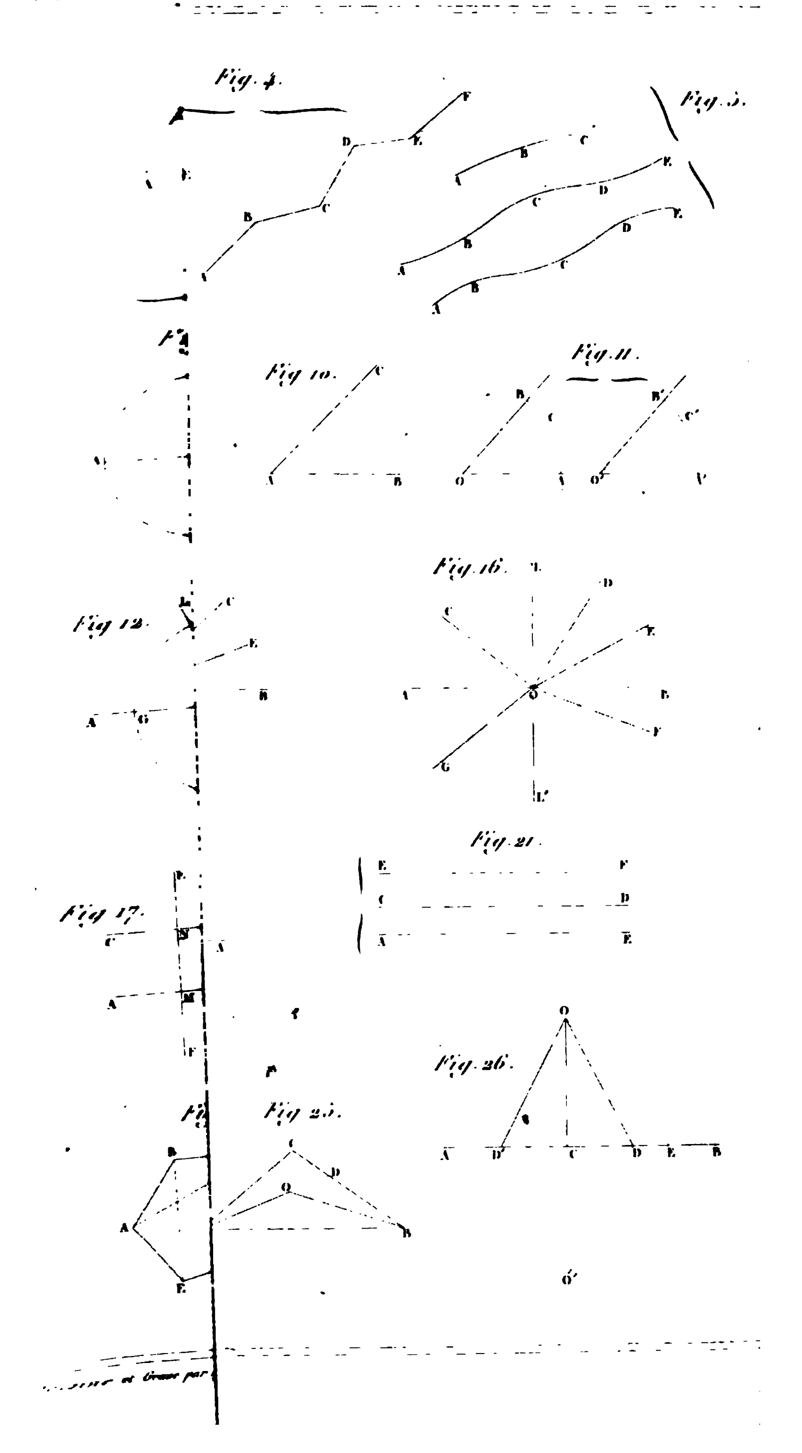


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 21.
Fig. 25.
Fig. 26.
et Gravé par

et par suite,

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=\frac{A}{A-a}, \qquad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=\frac{a}{A-a}.$$

On retombe ainsi sur les mêmes expressions de X, x.

Scolie II. — Ceci conduit à une démonstration assez simple [mais *algébrique*] du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles.

Désignons par V le volume cherché, par P, p, les volumes des deux pyramides. On a d'abord,

$$V = P - p;$$

mais $$P=\frac{X}{3}.B, \qquad p=\frac{x}{3}.b \quad (\text{n}^\circ\ 439),$$

ou, remplaçant X, x, B, et b, par leurs valeurs,

$$P=\frac{H}{3}\cdot\frac{A^3}{A-a}, \qquad p=\frac{H}{3}\cdot\frac{a^3}{A-a};$$

donc $$V=P-p=\frac{H}{3}\cdot\frac{A^3-a^3}{A-a}.$$

Or on a vu en *Algèbre*, que A^3-a^3 divisé par $A-a$, donne un quotient exact et égal à $A^2+A.a+a^2$.

Donc enfin

$$V=\frac{H}{3}(A^2+a^2+Aa)=\frac{H}{3}\left(B+b+\sqrt{Bb}\right),$$

expression qui, traduite en langage géométrique, donne lieu à l'énoncé du n° 443.

Scolie. — Pour un tronc de cône droit à bases parallèles, comme on a $B=\pi R^2$, $b=\pi r^2$ [R et r étant les rayons des deux bases

il en résulte

$$1^\circ\ X = \frac{H.R\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(R-r)} = \frac{HR}{R-r},\quad x = \frac{H.r\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}(R-r)} = \frac{Hr}{R-r};$$

$$2^\circ\ V = \frac{\pi R^2.X}{3} - \frac{\pi r^2 x}{3} = \frac{H}{3}\pi\left(\frac{R^3-r^3}{R-r}\right)$$

$$= \frac{H}{3}\pi(R^2+r^2+Rr).$$

(*Voyez* le n° 449.)

PROBLÈME II.

On veut mesurer 1 *mètre cube de bois au moyen d'une membrure composée de quatre tringles rectilignes formant un carré de* 1 *mètre de côté, dont le plan est disposé verticalement; les bûches, au lieu d'avoir* 1 *mètre de longueur, ont* $1^{m},2$: — *On demande quelle réduction il faut faire subir à la hauteur du parallélipipède.*

La base du parallélipipède ayant $1,2 \times 1$ ou $1^{m.q.},2$ de surface, il faut diviser 1 par 1,2; ce qui donne

$\frac{10}{12}$ de *mètre* ou $8^{\text{décim.}}\frac{1}{3}$.

PROBLÈME III.

Les *côtés de la base d'un tétraèdre ont* 12 *mètres*, 15 *mètres*, 17 *mètres; sa hauteur est de* 9 *mètres :* — *Trouver son volume.*

L'aire de la base ayant pour mesure (n° 287)

$$\sqrt{22 \times 10 \times 7 \times 5} = \sqrt{7700},$$

le volume du tétraèdre sera (n° 439)

$$3\sqrt{7700} = \sqrt{69300} = 263^{m.c.},248,\ \text{à}\ 1^{\text{déc.c.}}\ \text{près}.$$

PROBLÈME IV.

Étant donné le volume d'un tétraèdre régulier (n° 381) *égal à* $19^{m.c.},683$, — *trouver son arête* [a], *et son aire* [A].

Désignant par R le rayon du cercle circonscrit à la base ABC

FIG. 307. (*fig.* 307), on a $a = R\sqrt{3}$ (n° 237, *corol.* I); d'où $R = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

L'expression de l'aire de la base ABC est $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$ (même numéro, *scol.*), ou, en mettant pour R sa valeur, $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

D'un autre côté, la hauteur SO du tétraèdre est égale à

$$\sqrt{\overline{SA}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}.$$

On a donc l'équation

$$19,683 = \frac{1}{3}a\sqrt{6} \times \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}, \quad (\text{n}^\circ\ 439)$$

ou bien $$19,683 = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2};$$

donc $$a^3 = \frac{12 \times 19,683}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \times 19,683;$$

d'où $$3\log a = \log 6 + \log 19,683 + \frac{1}{2}\log 2 = 2,2227575,$$

et par conséquent $\log a = 0,7409192 = \log 5,50705.$

Ainsi, l'arête a vaut 5m,50705.

On a ensuite $A = 4.ABC = a^2\sqrt{3}$; ce qui donne

$$\log A = 2\log a + \frac{1}{2}\log 3 = 1,7203990 = \log 52,5289.$$

Donc enfin $$A = 52^{\text{m. q.}},5289.$$

FIG. 361. **PROBLÈME V.** (*Fig.* 361.)

On demande le volume [V] *d'un tronc de pyramide triangulaire régulière,* SABC, *dont la grande base a pour côté* 0,9, *la petite base* 0,4, *et dont l'arête latérale* Aa *est égale à* 0,5.

On a la formule $$V = \frac{1}{3}Oo\,(ABC + abc + \sqrt{ABC.abc}),$$

et il ne s'agit que de calculer successivement la hauteur Oo du tronc, ainsi que les aires des deux bases ABC, abc.

Les triangles semblables SAB, Sab, donnent d'abord

$$SA : Sa :: AB : ab, \quad \text{d'où} \quad Aa : SA :: AB - ab : AB,$$

ou $$0,5 : SA :: 0,5 : AB; \quad \text{donc} \quad SA = AB = 0,9.$$

On prouverait de même que $Sa = ab = 0,4$;

ce qui prouve que, d'après les données particulières de la question, les deux figures SABC, $Sabc$, sont non-seulement des pyramides régulières (nº **343**), mais encore des tétraèdres réguliers (nº **381**).

Cela posé; on a, d'après le problème précédent,

1º $SO = \frac{1}{3} AB.\sqrt{6}, \quad So = \frac{1}{3} ab.\sqrt{6};$

d'où $Oo = \frac{1}{3}.\sqrt{6}.0,5;$

2º $ABC = \frac{1}{4} \overline{AB}^2.\sqrt{3} = \frac{1}{4}.0,81.\sqrt{3};$

3º $abc = \frac{1}{4} \overline{ab}^2.\sqrt{3} = \frac{1}{4}.0,16.\sqrt{3}.$

Donc, en substituant dans la formule ci-dessus,

$$V = \frac{1}{3}.\sqrt{6}.0,5.\frac{1}{4}(0,81 + 0,16 + 0,36).\sqrt{3},$$

ou $$V = \frac{1}{12}.\sqrt{2}.0,5.1,33 = \frac{1,33}{24}.\sqrt{2},$$

$$\log V = \log 1,33 + \frac{1}{2}\log 2 + c.\log 24 = \bar{2},8941554o;$$

et l'on obtient enfin $V = 0^{m.c.},078371$, à 1 $^{cent.c.}$ près.

Vérification.

$$SABC = \frac{1}{3} SO . ABC = \frac{1}{3} . AB . \sqrt{6} . \frac{1}{4} . AB^2 . \sqrt{3} = \frac{1}{12}(AB)^3 . \sqrt{2} = 0,085913$$
$$Sabc = \frac{1}{3} So . abc = \frac{1}{3} . ab . \sqrt{6} . \frac{1}{4} . ab^2 . \sqrt{3} = \frac{1}{12}(ab)^3 . \sqrt{2} = 0,007542$$
$$0,078371$$

Donc $V = 0,078371$, comme ci-dessus.

§ II. — *Sur les corps ronds.*

Problème I.

Nº **462**. *Étant donné le volume d'une sphère, égal à* $1843^{m.c.},086278$, *trouver son rayon* [r].

On a la formule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (nº **437**),

d'où $$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3.1843,086278}{4\pi}},$$

et $\log r=\frac{1}{3}[\log 3+\log 1843,086278+c.\log 4+c.\log\pi]$,

ou $\log r=0,881153=\log 7,61$ [$\log\pi=0,4971499$ (page 224)].

Donc $r=7^{m},61$, à 1 *centimètre* près.

PROBLÈME II.

L'arête d'un cube a $0^{m},36$ *de longueur. — On demande le volume de la sphère circonscrite.*

Le carré de la diagonale (nº **342**, *scol.* II) vaut $3(0,36)^2$; et, par conséquent, la diagonale elle-même a de longueur $0,36.\sqrt{3}$. Cette diagonale étant d'ailleurs le diamètre de la sphère demandée, il s'ensuit que le volume de celle-ci a pour expression (nº **487**)

$$\frac{1}{6}\pi.3\sqrt{3}\,(0,36)^3=\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}\,(0,36)^3$$

$$\begin{aligned}\log\pi &= 0,4971499\\ \tfrac{1}{2}\log 3 &= 0,2385606\\ 3\log 0,36 &= \bar{2},6689075\\ c.\log 2 &= 9,6989700\\ \hline &\ \bar{1},1035880=\log 0,126937.\end{aligned}$$

Ainsi, le volume cherché est $0^{m.c.},126937$, à 1 $^{cent.c.}$ près.

PROBLÈME III.

On demande l'aire d'un triangle sphérique dont les angles sont respectivement $A=85^{gr},17'$ | $B=103^{gr},35'$ | $C=67^{gr},49$, *le rayon de la sphère étant égal à* $1^{m},54$.

On a d'abord $A+B+C-200^{gr}=56^{gr},01$;

d'où $$\frac{1}{2}(A+B+C)-1^{q}=0^{q},28005.$$

Ainsi, d'après la formule du nº **485**, l'aire du triangle est égale

$$\pi\,(1{,}54)^2 \times 0{,}28005 = 2{,}0865\,;$$

donc ce triangle vaut $2^{\text{m.q.}},0865$, à $1^{\text{c.q.}}$ près.

Problème IV. (*Fig.* 362.)

Fig. 362.

On a un creuset en forme de cône tronqué ABDC, *dont le fond* CD *a* $0^{\text{m}},03$ *de diamètre, l'ouverture* AB $0^{\text{m}},06$, *et dont la hauteur* CL *est de* $0^{\text{m}},08$; *ce creuset contient une certaine quantité de métal fondu dont la surface* [EF] *a* $0^{\text{m}},05$ *de diamètre : — On veut en faire une sphère, et l'on demande le rayon du moule de cette sphère.*

Calculons d'abord la hauteur CI du métal fondu. En menant CK parallèle à DB, on a la proportion

$$\text{CI} : \text{CL} :: \text{EG} : \text{AK}\,; \quad \text{d'où} \quad \text{CI} = \frac{\text{CL}\,.\,\text{EG}}{\text{AK}},$$

ou mettant pour CL, EG = EF — CD, AK = AB — CD, leurs valeurs,

$$\text{CI} = \frac{0{,}08\,.\,0{,}02}{0{,}03} = \frac{1}{3}\,.\,0{,}16 = \frac{16}{3},$$

le *centimètre* étant ici pris pour unité.

Le volume du métal fondu est donc (n° 449)

$$\tfrac{16}{9}\,\pi\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{2}\,.\,\tfrac{5}{2}\right] = \tfrac{4}{9}\,\pi\,.\,49.$$

On doit donc avoir, en représentant par r le rayon cherché,

$$\tfrac{4}{9}\,\pi\,.\,49 = \tfrac{4}{3}\,\pi r^3\,;$$

d'où $\quad r^3 = \dfrac{49}{3}, \quad$ et $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{49}{3}} = 2^{\text{cent.}},53722.$

Problème V.

Étant données l'arête d'un cône droit, égale à $25^{\text{m}},15$, *et sa hauteur* $17^{\text{m}},3$, *trouver sa surface latérale* [A], *et son volume* [V].

On a d'abord (n° 446)

$$A = \pi . 25,15 . \sqrt{(25,15)^2 - (17,3)^2} = \pi . 25,15 . \sqrt{42,45 \times 7,85};$$

d'où $\log A = \log \pi + \log 25,15 + \frac{1}{2} \log 42,45 + \frac{1}{2} \log 7,85$,

ou, en effectuant les calculs indiqués,

$$\log A = 3,1590615 = \log 1442,32;$$

donc $A = 1442^{\text{m. q.}},32.$

On a ensuite (n° 448)

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 17,3 \times 42,45 \times 7,85,$$

$$\log V = \log \pi + \log 17,3 + \log 42,45 + \log 7,85 + c. \log 3,$$

ou $\log V = 3,7808221 = \log 6037,01;$

donc $V = 6037^{\text{m. c.}},01.$

PROBLÈME VI.

Évaluer le volume d'un verre de forme lenticulaire, dont le diamètre est $0^{\text{m}},03$, *et l'épaisseur* $0^{\text{m}},004$.

Le volume de ce verre est un double segment de sphère à une seule base, ayant pour rayon $0^{\text{m}},015$.

Ainsi ce volume a pour expression (n° 488)

$$\begin{aligned}
&\pi (0,015)^2 . 0,002 + \frac{1}{3} \pi (0,002)^3 \\
&= \frac{1}{3} \pi . 0,002 [3 (0,015)^2 + (0,002)^2] \\
&= 1,04719755 \times 0,00001358 \\
&= 0,000001422094.
\end{aligned}$$

Ainsi le volume cherché est de $1422^{\text{millim. c.}},094$.

§ III. — *Autres problèmes sur les volumes et les densités des corps* (*).

PROBLÈME I.

N° 463. — *Un obélisque en pierre de taille a la forme d'une yramide quadrangulaire régulière, supportée par un prisme à ise carrée qui lui sert de piédestal; la base, commune à la pyramide et au piédestal, a* $1^m,2$ *de côté; l'apothème de la pyramide t à ce côté* :: $5 : \sqrt{2}$; *et la hauteur du piédestal est double de ce ême côté : — On demande le poids total de la masse, sachant que densité de la pierre de taille est de* 2,5.

L'apothème ayant pour valeur $\frac{1,2 \times 5}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, et son carré ant égal à 18, on a pour la hauteur de la pyramide

$$\sqrt{18 - (0,6)^2} = 4,2,$$

pour le volume de cette pyramide,

$$1,4 \times (1,2)^2 = 2,016.$$

elui du piédestal étant de $(1,2)^2 \times 2,4 = 3,456$, il s'ensuit ue le volume total est égal à $5^{m.c.},472$.

Comme, par hypothèse, la densité est 2,5, on obtient enfin our le poids de la masse totale

$$1000000^{gr} \times 2,5 \times 5,472 = 13680000^{gr} = 13680^{kilog.} (**).$$

(*) En PHYSIQUE, on nomme *densité* d'un corps, le poids d'un corps us *l'unité* de volume, et *poids spécifique* le rapport du poids d'un corps us un certain volume au poids d'un autre corps [*l'eau* par exemple] sous *même* volume.

Il y a *identité* entre les nombres abstraits qui expriment le *poids spécique* et la *densité* d'un corps.

Soient V le volume d'un corps, D sa densité, P son poids absolu. — On les relations

$$P = D.V, \quad \text{d'où} \quad D = \frac{P}{V}, \quad V = \frac{P}{D}.$$

(**) On sait que *le gramme* est le poids d'un *centimètre cube* d'eau disée, et par conséquent que le mètre cube pèse 1000 kil.

parties visibles à l'œil nu, en supposant qu'une bonne vue puisse distinguer $\frac{1}{10}$ de millimètre; 3° — combien de parties visibles à l'aide d'un microscope qui grossirait 20 fois les dimensions linéaires.

Soit, en général, r le rayon de la goutte, et h sa hauteur : son volume sera $\pi r^2 h$ (n° **444**).

Soit ensuite R le rayon de toute la bulle, et x l'épaisseur de son enveloppe : le volume de la partie aqueuse sera (n° **457**)

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R-x)^3.$$

On aura donc $$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R-x)^3;$$

d'où $$(R-x)^3 = R^3 - \frac{3}{4} r^2 h;$$

$$R - x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h},$$

et $$x = R - \frac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h}.$$

Maintenant, — 1° — mettant pour R, r, et h, leurs valeurs respectives en *millimètres*, $R = 54$, $r = 2$, et $h = 2$, on obtient

$$x = 54 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(108)^3 - 48} = 54 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{1259664},$$

ou, effectuant tous les calculs indiqués,

$$x = 0,0007;$$

l'épaisseur cherchée est donc $\frac{7}{10000}$ de *millimètre*.

2° — La surface de la bulle a pour mesure

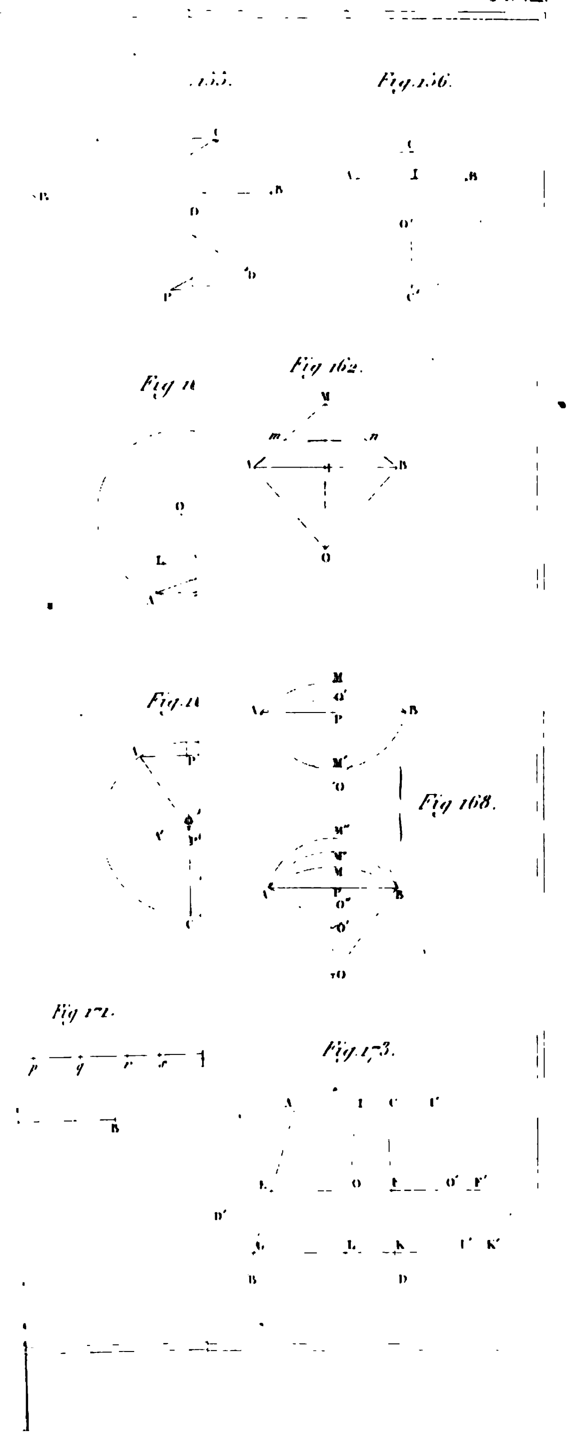
$$4\pi R^2 = 366^{m.q.},43 \qquad (\text{n° } \mathbf{454},\ N. B.$$

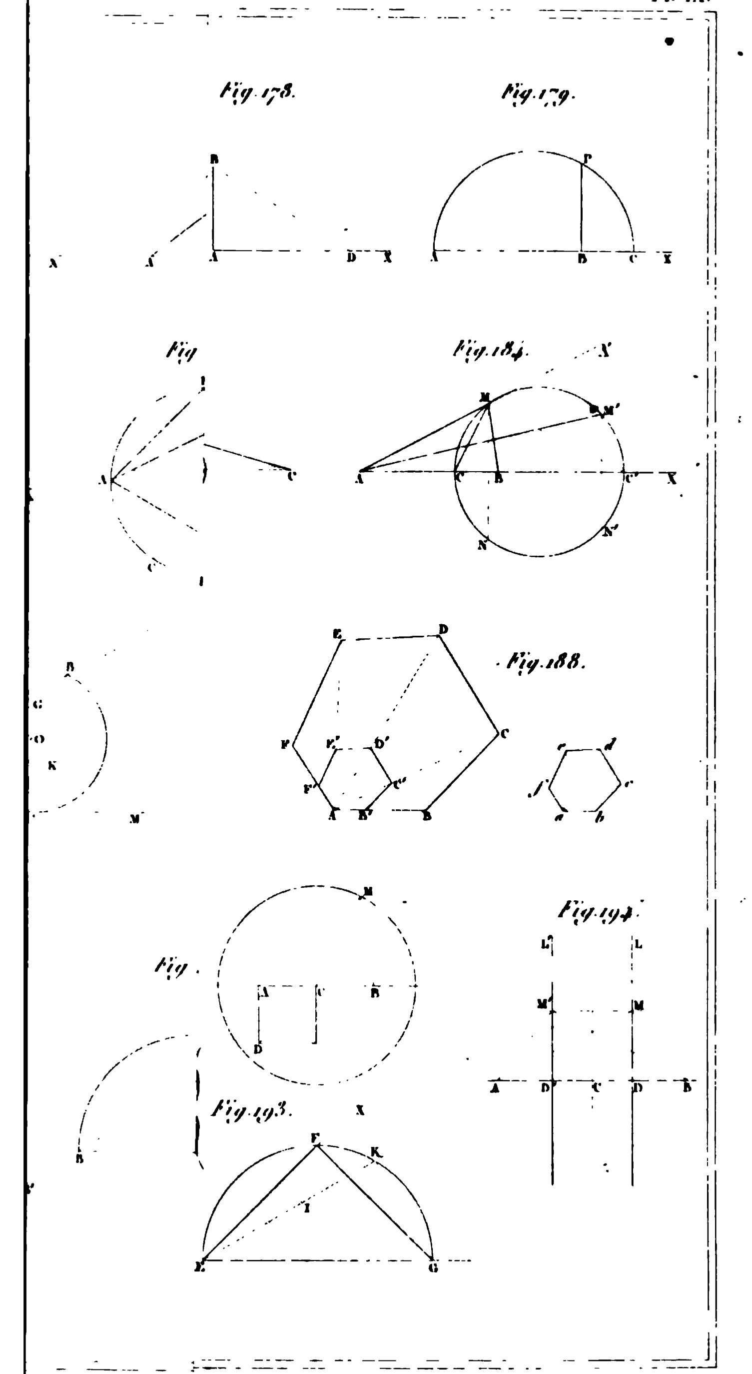
et par conséquent cette surface contient

3 664 300 parties visibles à l'œil nu.

3° — Si l'on emploie un microscope qui rend 20 fois plus grandes les dimensions linéaires ou 400 fois plus grandes les surfaces, on aura 400 fois plus de parties visibles, c'est-à-dire 1 465 720 000.

De plus, cette goutte contient 8π ou 25 millimètres cubes à peu près; donc 1 millimètre cube d'eau de savon donnera au microscope, 58 628 800 parties visibles.


Fig. 156.
Fig. 162.
Fig. 168.
Fig. 173.


Fig. 178.
B
A
D
X
Fig. 179.
P
A
D
C
X
Fig.
A
C
Fig. 184.
X
M
M'
A
C
B
C'
X
N
N'
E
D
Fig. 188.
C
F
E'
D'
C'
F'
A
B'
B
e
d
f
c
a
b
M
Fig.
A
C
B
D
Fig. 193.
X
F
K
I
E
G
Fig. 194.
L'
L
M'
M
A
D'
C
D
B

nées par les points A, B, C, au plan MN, sont situés sur une même d[illegible] (n° 326); et si l'on fait tourner la figure $acC'A'$ autour de ac comme [illegible] nière, puisque l'on a, d'après la définition, $aA' = aA$, $bB' = bB$, $cC' = [illegible]$ les points A', B', C', viendront se placer sur A, B, C; *donc*, etc.

Corollaires. — Il résulte immédiatement de la démonstration précéd[illegible] que, 1° — *Deux droites de longueur déterminée, et symétriques par rapp[illegible] un point, sont égales et parallèles;*

2° — *Deux triangles symétriques par rapport à un point, sont égaux [illegible] leurs plans parallèles;* — il en est de même de *deux angles symétriques.*

3° — *Deux droites de longueur déterminée, et symétriques par rapport [illegible] plan, sont égales, font des angles égaux avec ce plan;* et, prolongées, *ell[illegible] rencontrent en un même point, à moins qu'elles ne soient parallèles;*

4° — *Deux triangles symétriques par rapport à un plan, sont égaux, [illegible] plans [s'ils ne sont pas parallèles] rencontrent le plan de symétrie su[illegible] même droite, et forment avec lui des angles égaux. — Les angles symétri[illegible] sont aussi égaux.*

Fig. 367, 368.

Théorème III. (*Fig.* 367, 368.)

N° 6. — *Si quatre points* A, B, C, D, *sont dans un même plan, leur[illegible] métriques* A', B', C', D', *par rapport à un point* O, *ou à un plan* MN, [illegible] *aussi dans un même plan.*

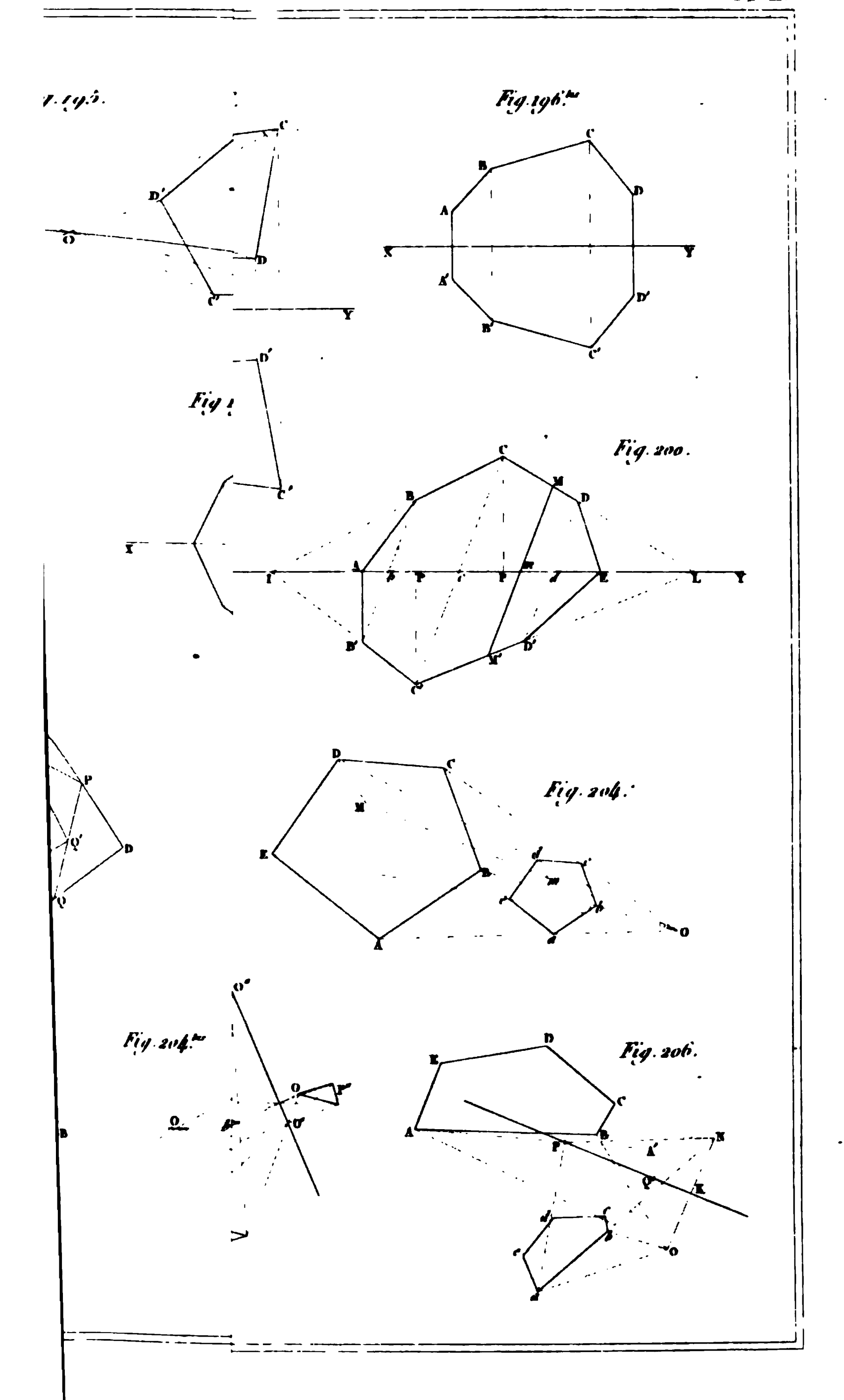
Formons les quadrilatères ABCD, A'B'C'D', et tirons les diagonal[illegible] et A'C', BD et B'D'. Les trois couples de triangles ABC et A'B'C', [illegible] et A'C'D', ABD et A'B'D', sont égaux (n° 5, *corol.* II et IV, 2° [illegible] donc, *angle* BAC = *angle* B'A'C, *angle* CAD = *angle* C'A'D', [illegible] BAD = *angle* B'A'D'. — Or, les angles BAC, CAD, étant dans un [illegible] plan par hypothèse, on a BAD = BAC + CAD; donc il faut que l'[illegible] aussi B'A'D' = B'A'C' + C'A'D', ce qui exige que ces trois angles [illegible] aussi dans un même plan; C. Q. F. D.

Scolie. — Lorsque les quatre points A, B, C, D, sont dans des plans [illegible]rents, il en est de même de leurs symétriques A', B', C', D'; et alors [illegible] deux systèmes de points déterminent deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D, [illegible] les angles dièdres et trièdres sont symétriques, et qui par consé[illegible] sont aussi *symétriques entre eux.*

Fig. 367, 368.

Théorème IV. (*Fig.* 367, 368.)

N° 7. — Lorsque deux polyèdres ont leurs sommets A et A', B et B', [illegible] C',..., situés deux à deux *symétriquement* par rapport à un point O ou à un [illegible] MN (n° 2, 2° *App.*), [auquel cas, les deux polyèdres sont dits *symétr[illegible] par rapport à un point* ou *par rapport à un plan*] : — 1° — Ces *polyèdr[illegible] leurs faces égales chacune à chacune, les angles dièdres égaux chacun à [illegible]cun, et les angles polyèdres symétriques;* — 2° — Ces *polyèdres sont [illegible]triques entre eux* (n° 1, 2° *App.*).


Fig. 195.
Fig. 196.bis
Fig. 200.
Fig. 204.
Fig. 204.bis
Fig. 206.

Il résulte des diverses propositions établies aux nos 7 et 8, que deux polyèdres symétriques par rapport à un *point* ou à un *plan* sont en même temps *symétriques entre eux* (n° 1, 2e *App.*).

Réciproquement, *deux polyèdres symétriques entre eux* [absolument] *peuvent toujours être placés symétriquement par rapport à un point* de l'espace ou par rapport *à un plan*, ce point ou ce plan pouvant être un sommet, ou une face, commune aux deux polyèdres (*).

Théorème VI.

N° 10. — *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

Il suffit, d'après la définition (n° 1, 2e *App.*), de démontrer la proposition pour deux tétraèdres.

Or, si nous considérons les tétraèdres symétriques SABC, SA'B'C' (*fig.* 363, n° 1, 2e *App.*), puisque le point S est un centre de symétrie (n° 5, 2e *App.*) par rapport à ces tétraèdres, il s'ensuit que les plans des faces ABC, A'B'C', sont parallèles; donc la droite KSK', perpendiculaire à ABC, est aussi perpendiculaire à A'B'C'; et de plus, on a SK = SK' (n° 8, 3°). — Ainsi, les tétraèdres ayant même base et même hauteur, sont équivalents; — donc aussi, etc...; C. Q. F. D.

FIG. 363.

N° 11. — Enfin, on démontrerait facilement les deux propositions suivantes :

1° — Lorsqu'il existe dans un polyèdre *deux plans de symétrie perpendiculaires entre eux*, leur intersection commune est un *axe de symétrie*.

2° — Et s'il en existe *trois*, le point commun à ces trois plans est un *centre de symétrie*.

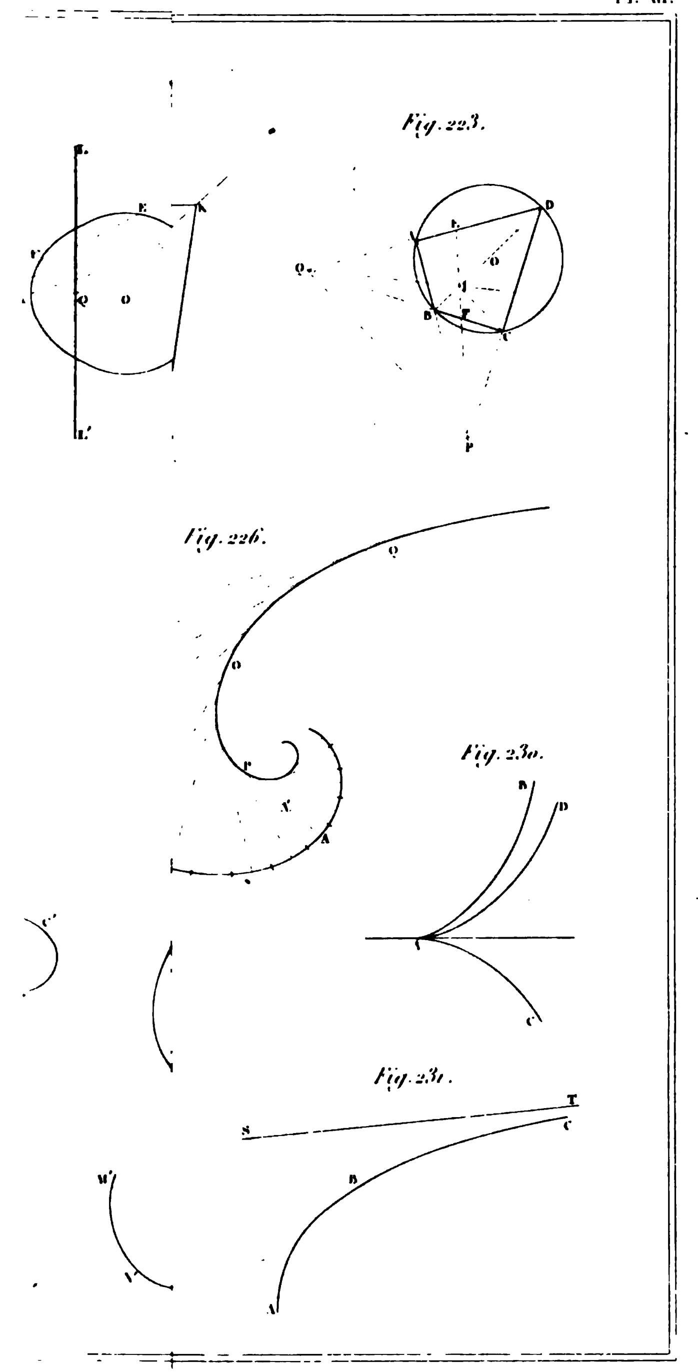
Des plans diamétraux.

N° 12. — De même que, dans certains polygones, il existe des droites nommées *diamètres* ou lignes *médianes* (n° 7, 1er *App.*), qui passent par les milieux d'une suite de droites parallèles entre elles et terminées au contour du polygone, de part et d'autre de ces diamètres, de même aussi l'on conçoit que certains polyèdres peuvent être tels, qu'un système de droites parallèles entre elles et terminées à leur surface, de part et d'autre d'un même plan

---

(*) Un objet et son image réfléchie par une glace présentent l'exemple le plus vulgaire de deux figures symétriques entre elles.

Quant à *une figure symétrique*, on en a aussi un exemple dans la forme extérieure du corps humain, composée de deux parties symétriques entre elles. — Ainsi, les deux mains sont symétriques entre elles ; il en est de même des deux gants qui les recouvrent. Mais observons que, si l'on retourne ces gants de *dedans* en *dehors*, c'est le gant de la main droite qui s'adapte à la main gauche, et *vice versâ*. — Ce dernier exemple peut servir à faire comprendre le genre de *retournement* qu'il faudrait faire subir aux figures symétriques pour les rendre superposables.


Fig. 223.
Fig. 226.
Fig. 230.
Fig. 231.
S
T
C
B
A
D

Centre des moyennes distances à un plan.

Le point que nous avons nommé *centre des moyennes* distances dans un polygone (nos 8 et 9, 1er *App.*), jouit par rapport à un plan des mêmes propriétés que par rapport à une droite.

THÉORÈME VIII.

N° 14. — *La perpendiculaire abaissée du centre des moyennes distances d'un polygone quelconque, sur un plan mené à volonté dans l'espace, est égale au quotient de la somme algébrique des perpendiculaires abaissées des différents sommets sur ce plan, divisée par le nombre total* n *des sommets.* — Cette somme est *nulle* lorsque le plan passe par le centre des moyennes distances, et *vice versâ.*

La démonstration de ce théorème étant, en tous points, semblable à celle qui a été exposée au n° 9 (1er *App.*), nous y renvoyons, en nous bornant à remarquer qu'il n'est pas nécessaire ici que les sommets soient dans un même plan : — Il suffit, — 1° — que la ligne polygonale soit *fermée* ; — 2° — qu'un même sommet ne soit pas la réunion de *plus de deux* côtés.

SCOLIE. — Pour fixer, dans ce cas, la position du centre des moyennes distances de tous ces sommets, on peut *mener* à volonté trois plans qui se coupent deux à deux [en les supposant, pour plus de simplicité, *perpendiculaires* entre eux]. — On *abaisse* des différents sommets, et sur chacun des trois plans, des perpendiculaires ; on *fait* ensuite, pour chaque plan, la *somme algébrique* des perpendiculaires qui lui correspondent ; et l'on divise cette somme par le nombre *n* des sommets. — Enfin, à des distances représentées par les *trois* quotients, on *mène* trois plans respectivement parallèles aux premiers : — L'intersection commune de ces trois nouveaux plans est le point cherché.

N° 15. — Lorsque quatre points A, B, C, D, ne sont pas dans un même plan, ces points combinés trois à trois, déterminent *quatre* plans différents, et par suite un *tétraèdre*. — Cela posé :

FIG. 370.

THÉORÈME IX. (*Fig.* 370.)

Dans tout tétraèdre ABCD, *les droites* MN, PQ, RS, *qui joignent les milieux respectifs des arêtes opposées, concourent en un même point qui n'est autre que le centre des moyennes distances des quatre sommets* A, B, C, D.

Considérons d'abord les droites MN et PQ, puis tirons les droites MP, PN, NQ, QM : les deux droites MP, NQ, parallèles à BD, sont parallèles entre elles ; de même, PN, QM, parallèles à AC, sont parallèles entre elles ; ainsi, la figure MPNQ est un parallélogramme dont MN, PQ, sont les diagonales ; donc ces droites se coupent en leur milieu O.

Fig. 248.

Fig. 253.

Fig. 257.

Fig. 262

par conséquent, O'G : O'A :: O'K : O'D :: 1 : 3.

Donc O'G est le *tiers* de O'A, ou le *quart* de AG; et O'K est le *tiers* de O'D ou le *quart* de DK.

Comme on prouverait pareillement que les droites de jonction des sommets B et C avec les centres des faces opposées, doivent rencontrer la droite AG en un point dont la distance au point G est le *quart* de AG, on est en droit d'en conclure que les quatre droites menées respectivement des quatre sommets aux centres des faces opposées, se réunissent en un même point, qui se trouve situé sur quatre plans respectivement parallèles aux plans des faces, à une distance, pour chaque face, et à partir de cette face, égale au *quart* de la distance de celle-ci au sommet opposé.

Donc enfin, d'après le *scolie* du numéro précédent, le point O' est *le centre des moyennes distances*.

Des centres de similitude.

THÉORÈME XI.

N° 17. — *Si l'on joint tous les sommets* A, B, C, D,..., *d'un polyèdre, avec un point quelconque* O *de l'espace, par des droites* OA, OB, OC, OD,..., *et que sur ces droites, ou sur leurs prolongements, on prenne des parties* OA', OB', OC',... *proportionnelles aux droites* OA, OB, OC,..., *on obtient ainsi les sommets d'un nouveau polyèdre qui est* DIRECTEMENT *ou* INVERSEMENT *semblable au premier;* — et le point O est dit un *Centre de similitude* EXTERNE dans le premier cas, et INTERNE dans le second.

Nous renvoyons, pour la démonstration de cette proposition et pour les conséquences qui en découlent, à tout ce qui a été dit aux n°s 12 *et suivants* du 1er *Appendice*, parce que les raisonnements seraient tout à fait analogues; mais nous allons entrer, relativement aux centres de similitude de *deux* ou *plusieurs* sphères, dans quelques détails qui peuvent offrir de l'intérêt.

FIG. 372. N° 18. — Considérons d'abord deux cercles C, C' (*fig.* 372) [que, pour fixer les idées, nous supposerons *extérieurs l'un à l'autre*], et traçons la ligne des centres CC', ainsi que les tangentes communes M*m*, N*n*, tant *extérieures* qu'*intérieures*. Cela posé, imaginons que les demi-cercles AMB, *amb* fassent une révolution entière autour de la ligne des centres, en entraînant les deux tangentes communes: — Dans ce mouvement, les demi-cercles engendreront deux sphères (n° 362), et les tangentes, deux surfaces coniques (n° 387) dont les sommets seront, pour l'une, le *centre de similitude externe*, O, des deux cercles générateurs, et pour l'autre, leur *centre de similitude interne*, O' (n° 12, *scol.*, 1er *App.*); — ces points sont dits aussi des *centres de similitude*, l'un *externe*, l'autre *interne*, par rapport aux deux sphères.

Dans ce même mouvement, les points de contact M et *m*, N et *n*, décriront des circonférences de cercle dont les rayons seront les perpendiculaires MP et *mp*, NQ et *nq*, abaissées de ces points sur la ligne des centres, et qui appartiendront à la fois aux deux sphères et aux deux surfaces coniques;

- en sorte que l'on pourra considérer ces dernières comme enveloppant les phères et les *touchant* suivant les circonférences de cercle MP, *np*, NQ et *nq*.

N° 19. — Je dis maintenant que — *Tout plan tangent à l'une des surfaces oniques est aussi tangent aux deux sphères;*

Et réciproquement, — *Tout plan tangent aux deux sphères est tangent aux leux surfaces coniques.*

Pour démontrer la proposition directe, menons par les points M et *m*, i et *n*, les tangentes MT et *mt*, NS et *ns*, aux cercles de contact, *cerc.* MP t *cerc. mp*, *cerc.* NQ et *cerc. nq* : — Les plans OMT, O'NS, déterminés ar les arêtes M*m*O, NO'*n*, des deux cônes, et par les tangentes MT, NS, ont tangents à ces cônes (n° 359). D'un autre côté, les mêmes droites I*m*O, NO'*n*, MT, *mt*, NS, *ns*, sont tangentes à des circonférences apparenant aux deux sphères; donc, les plans tangents aux deux cônes, dans les ›oints M et *m*, N et *n*, sont aussi tangents aux sphères.

La *réciproque* se démontrerait facilement d'après ce qui vient d'être dit :

Il est à remarquer d'ailleurs que, comme par chacune des arêtes des leux cônes, en nombre infini, on peut mener un plan tangent à ces cônes, l s'ensuit que :

Deux sphères données dans l'espace ont une infinité de plans tangents dont es intersections successives constituent en quelque sorte *deux enveloppes:* l'une, dite *extérieure,* est formée par la série des plans tangents pour lesquels les sphères sont toutes deux placées d'un même côté par rapport à ces plans; l'autre, dite *intérieure,* formée par la série des plans tangents, pour lesquels les sphères sont situées de l'un et de l'autre côté de ces plans.

N° 20. — Il résulte de là qu'un plan tangent à deux sphères n'est déterminé qu'autant qu'il est assujetti à une troisième condition, par exemple, celle de *passer par un point* donné, ou bien d'*être tangent à une troisième sphère.*

Dans le premier cas, on a généralement *deux* plans tangents passant par le point donné, et ces plans sont symétriquement placés par rapport au plan que déterminent le point donné et les centres des deux sphères. Celles-ci se trouvent d'ailleurs, suivant les diverses positions du point, soit d'un même côté, soit de côtés différents par rapport aux deux plans tangents.

Ces plans se réduisent à *un seul* lorsque le point appartient à l'une des arêtes des cônes qui enveloppent les deux sphères; et il n'y a *aucune* solution si le point est donné intérieurement à l'un de ces cônes.

Dans le second cas, et en supposant toujours les trois sphères *extérieures l'une à l'autre,* on peut avoir *quatre systèmes* de *deux* plans tangents à ces *trois* sphères, savoir: deux plans comprenant entre eux les trois sphères, et *six,* placés deux à deux entre l'une des trois sphères et les deux autres.

Ce second cas donne lieu d'ailleurs à un théorème fort remarquable, et analogue à celui qui a été établi au n° 16, 1er *App.*, pour trois circonférences de cercle.

THÉORÈME XII.

N° 21. — *Les six centres de similitude de trois sphères extérieures les uns aux autres, sont situés* TROIS A TROIS *sur une même droite*, savoir : — *Les trois* centres de similitude *externes*, puis *un* des centres *externes* et deux centres *internes;* ce qui donne QUATRE droites.

En effet, considérons d'abord les deux plans tangents qui comprennent les trois sphères : — Ces plans étant en même temps tangents aux trois cônes *extérieurs* qui enveloppent les sphères (n° 19, 2ᵉ *App.*), contiennent les trois arêtes correspondant à ces plans tangents, et par conséquent aussi les trois sommets de ces cônes ; donc leur intersection commune passe par les trois sommets, c'est-à-dire par les trois centres de similitude *externes* (n° 18, 2ᵉ *App.*).

Pareillement, chacun des deux plans tangents placés entre l'une des trois sphères et les deux autres, est tangent au cône *extérieur* qui enveloppe les deux dernières, ainsi qu'aux deux cônes *intérieurs* qui enveloppent respectivement la première et la seconde, puis la première et la troisième ; donc leur intersection commune contient les sommets de ces trois cônes, c'est-à-dire le centre de similitude *externe* des deux dernières sphères, et les centres de similitude *internes* de la première et de la seconde, puis de la première et de la troisième ; *C. Q. F. D.*

Nous ferons observer, en terminant, que cette démonstration peut servir à prouver l'exactitude du théorème pour le cas de trois circonférences de cercle ; car les centres de similitude de ces cercles sont les mêmes que ceux de trois sphères dont les cercles proposés seraient des grands cercles.

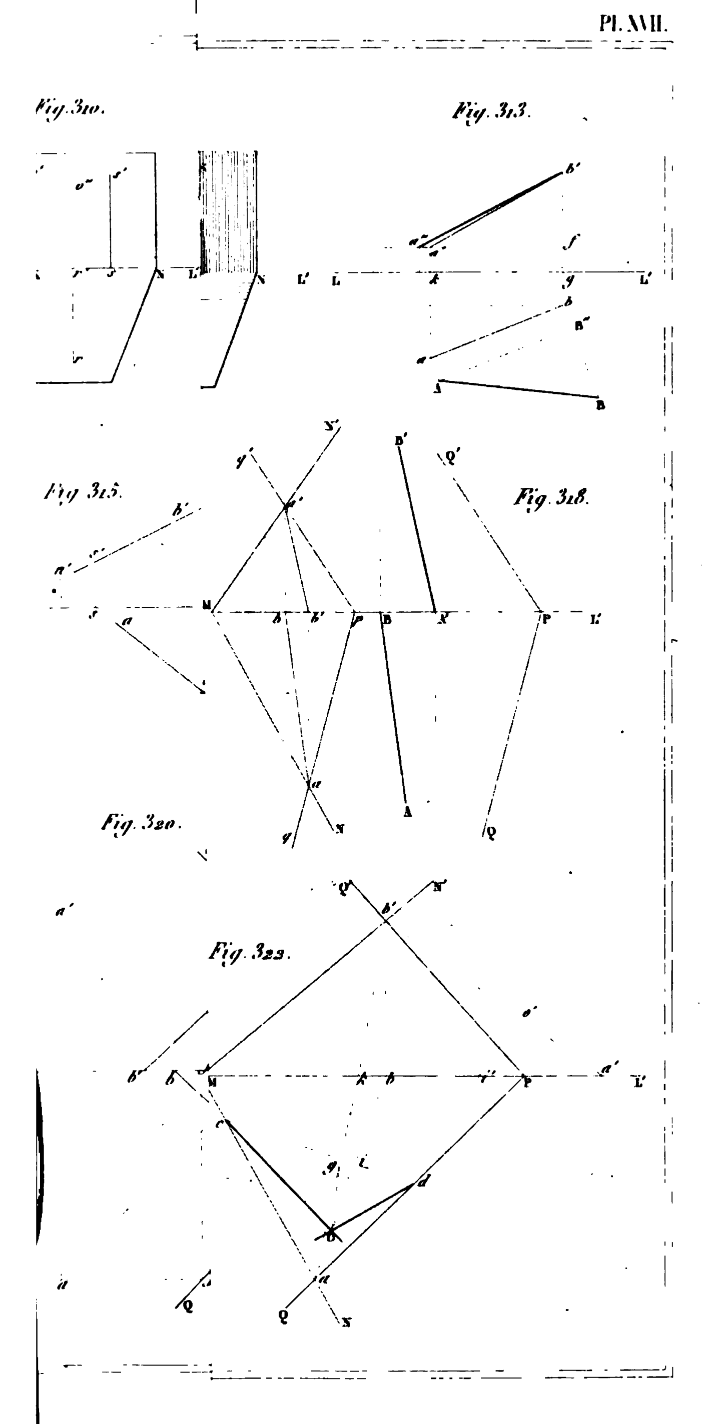
C'est ainsi qu'en s'appuyant sur des vérités de la Géométrie de l'*espace*, on parvient souvent à démontrer fort simplement certaines propositions de la Géométrie *plane*.

Construction des polyèdres réguliers.

Nous avons déjà fait connaître (n° 381, *scol.*) les moyens de construire le *tétraèdre* et l'*hexaèdre réguliers*. Il nous reste à exposer les modes de construction relatifs aux polyèdres dont chaque angle polyèdre est l'assemblage de *trois* ou de *quatre* angles de triangles *équilatéraux*, ou bien de trois angles de *pentagones réguliers*.

FIG. 373. 1°. — OCTAÈDRE RÉGULIER. (*Fig.* 373.)

N° 22. — Désignons par *m* le côté du triangle équilatéral qui doit servir de base à la construction ; et soit ABCD le carré construit sur le côté *m* (ici la figure est supposée en relief). — Du point O, centre de ce carré, *élevons* la droite indéfinie LOL′ perpendiculaire au plan ABCD, et prenons sur cette droite, à partir du point O, et de part et d'autre du plan, deux parties OE, OF, égales au rayon OA du carré, lequel rayon a pour va


Fig. 310.
Fig. 313.
Fig. 315.
Fig. 318.
Fig. 320.
Fig. 322.

bord de la seconde, et *vice versâ;* d'où il résultera une figure à 20 faces égales entre elles et également inclinées, ABCDEFGIKC'B'A'.

Fig. 375.

3°. — Dodécaèdre régulier. (*Fig.* 375.)

N° 24. — Supposons qu'avec trois *pentagones réguliers* égaux on forme un angle *trièdre* en A, ce qui est possible (n° 409). Les trois angles dièdres de cet angle trièdre sont égaux (n° 333, *scol.* II). Maintenant, avec de nouveaux pentagones égaux aux précédents, on peut de même former successivement aux points B, C, D, E, d'autres angles trièdres toujours de même valeur. Il en résultera *six* pentagones réguliers composant une calotte ABCDEFGIKLMNPQ, telle que les angles du bord seront alternativement formés d'*un* et de *deux* angles plans.

[Même remarque que ci-dessus sur la ligne polygonale qui termine cette calotte polyédrale.]

Si l'on imagine ensuite une seconde calotte égale à la première, on pourra les réunir toutes deux *bord à bord,* de manière que les *angles simples* de l'une se raccorderont avec les *angles doubles* de l'autre; et l'on aura ainsi une figure à douze faces égales et également inclinées.

N° 25. — Scolie I. — Pour construire *mécaniquement* un polyèdre régulier, on effectue d'abord sur une feuille de carton, et en prenant une des faces pour *base* de la construction, le développement de toutes les faces, ainsi que nous l'avons indiqué aux n°s 386 et 361, puis on *plie* convenablement ces différentes faces suivant les arêtes communes.

Scolie II. — Tous les polyèdres réguliers, à l'exception du tétraèdre, ont un *centre de symétrie* qui n'est autre que le *centre de figure* (n° 382).

Tous ont aussi des *plans de symétrie.* — Ce sont, en général, des plans perpendiculaires sur les milieux des arêtes ou sur les milieux des droites qui joignent les sommets opposés pris deux à deux, ou bien des plans qui passent par les arêtes opposées prises deux à deux.

Scolie III. —	Le *tétraèdre régulier* a	4 sommets,	4 faces, et	6 arêtes
	Le *cube,*	8 sommets,	6 faces et	12 arêtes
	L'*octaèdre,*	6 sommets,	8 faces et	12 arêtes
	Le *dodécaèdre,*	20 sommets,	12 faces et	30 arêtes
	Enfin, l'*icosaèdre,*	12 sommets,	20 faces et	30 arêtes

Scolie général sur les polyèdres. — Ces expressions, qui peuvent être vérifiées facilement sur les figures que nous avons construites, sont implicitement renfermées dans l'énoncé d'un théorème dû au célèbre Euler, et qui se traduit par la formule

$$S + F = A + 2,$$

S désignant le nombre des sommets, F celui des faces, et A le nombre des arêtes.

Fig. 330. *Fig. 331.*

334.

Fig. 337. 338.

Théorème I.

N° 27. — *Tout plan tangent à une surface de révolution en un point donné de cette surface, est perpendiculaire au plan méridien mené par ce point.*

En effet, on définit ordinairement *un plan tangent* à une surface, l'*élément* de cette surface au point que l'on considère, *prolongé indéfiniment dans tous les sens;* définition qui s'accorde avec celle que nous avons donnée à la tangente (n° 37, 1[er] *App.*), et de laquelle il résulte nécessairement que — *Le plan tangent en un point de la surface, contient toutes les tangentes aux courbes que l'on obtient en coupant cette surface par des plans passant par le point.*

Cela posé, au point donné, concevons le plan tangent à la surface; et par ce point, menons un plan perpendiculaire à l'axe : ce plan coupe la surface suivant une circonférence de cercle, et le plan tangent suivant une tangente à ce cercle. Or cette tangente est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact, et par conséquent, en vertu du théorème sur les plans, établi au n° 300, elle est aussi perpendiculaire au plan méridien correspondant; donc le plan tangent, qui contient cette tangente, est lui-même perpendiculaire au plan méridien (n° 309); *C. Q. F. D.*

Scolie. — Toutes les fois qu'une surface de révolution a été engendrée par une ligne *non située dans un même plan avec l'axe*, cette surface est toujours susceptible d'une seconde génération, dans laquelle la génératrice est *l'intersection* de la surface avec un plan méridien quelconque.

Fig. 376.

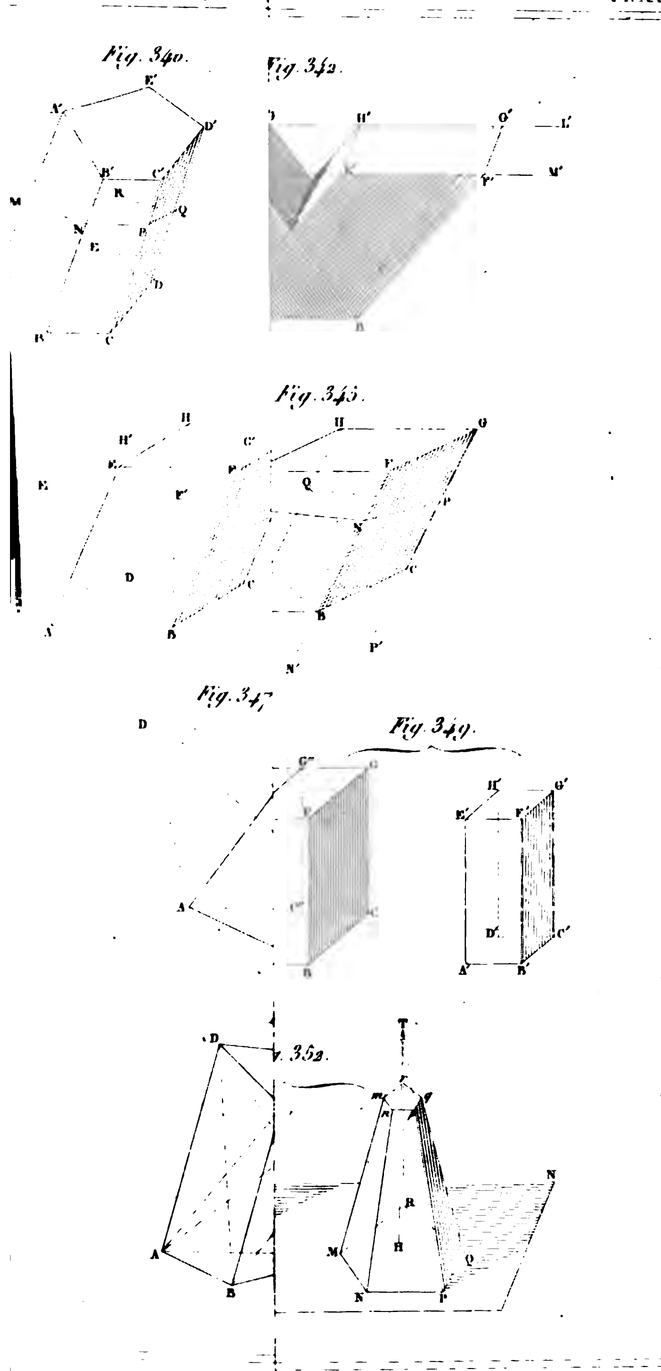
Théorème II. (*Fig.* 376.)

N° 28. — Lorsque la surface de révolution est engendrée par une ligne *fermée*, et située dans un même plan avec l'axe,

1° — *L'aire de la surface a pour expression le produit de la ligne génératrice* [rectifiée], *multipliée par la circonférence que décrit le centre des moyennes distances de cette courbe* [considérée comme un polygone *infinitésimal* (n° 9, 1[er] *App.*)];

2° — *Le volume de l'espace déterminé par cette surface, est égal au produit de l'aire que termine la génératrice, multipliée par la même circonférence.*

1° — Concevons la courbe génératrice décomposée dans ses éléments MM', M'M'',...; et soient mp, $m'p'$, $m''p''$, les perpendiculaires abaissées de leurs points milieux sur l'axe LL'. Soient d'ailleurs S la surface totale s, s', s'',... les surfaces partielles engendrées par les différents éléments que nous pouvons, pour simplifier, supposer tous égaux entre eux et représentés par e; soit enfin n le nombre infini de ces éléments. Cela posé, chacun des éléments, en tournant autour de l'axe, engendre la surface convexe d'un tronc de cône, et l'on a successivement pour toutes ces surfaces


Fig. 340.
Fig. 342.
Fig. 345.
Fig. 347.
Fig. 349.
352.

CK étant la perpendiculaire abaissée du point C sur AB. Mais, si l'on joint le point C au milieu D de AB, et que l'on abaisse DE perpendiculaire sur LL′, on a

$$surf.\ AB = 2\pi.DE.AB\ (n^o\ 447);\quad \text{d'où}\quad vol.\ CAB = 2\pi.DE.AB.\frac{CK}{3}.$$

ou bien, $$vol.\ CAB = 2\pi.\frac{2}{3}DE.\frac{AB.CK}{2}.$$

Or $\frac{AB.CK}{2}$ est l'expression de l'aire du triangle CAB; et $\frac{2}{3}$ DE est égale à la perpendiculaire OI abaissée du centre des moyennes distances sur l'axe LL′ (n° **98**, *scol.*).

Donc enfin $$vol.\ CAB = 2\pi.OI.\,aire\ CAB;$$

ce qui vérifie, pour le triangle, l'exactitude du théorème énoncé.

Des surfaces réglées.

N° **29**. — On donne le nom de SURFACES RÉGLÉES à toutes les surfaces telles qu'en chacun de leurs points, *on peut y appliquer une droite, au moins dans un sens.*

Les surfaces réglées se divisent en trois genres.

Le plan, par sa nature, étant nécessairement une surface réglée, et la plus simple de toutes, constitue à lui seul le premier genre; les deux autres ne contiennent que des surfaces courbes : — Ce sont les *surfaces développables* et les *surfaces gauches.*

Des surfaces développables.

Avant de traiter le cas général, nous donnerons d'abord une extension convenable aux définitions du cylindre et du cône.

N° **30**. — Considérons dans l'espace une courbe quelconque dont tous les points *soient* à la fois, ou même *ne soient pas* situés dans un même plan [on dit, dans ce dernier cas, qu'elle est à *double courbure* (*)]; et concevons une droite mobile assujettie à la condition de rencontrer constamment la courbe proposée en quelqu'un de ses points, et de manière, soit à *rester toujours parallèle* à une autre droite de direction déterminée, soit à *passer constamment par un même point :* la surface ainsi engendrée est dite, dans le premier cas, une surface CYLINDRIQUE, et dans le second une surface CONIQUE.

Dans le premier cas, on nomme *cylindre* l'espace compris entre la sur-

(*) Cette dénomination est fondée sur ce qu'une ligne étant, en général, l'intersection de deux surfaces (n° 1, *introd.*), sa nature et sa forme doivent dépendre de chacune des courbures de ces deux surfaces.

e et deux plans parallèles qui coupent toutes les positions de la droite
bile; dans le second, un *cône* est l'espace compris, à partir du point
· lequel passe constamment la droite mobile, entre la surface engendrée,
un plan mené à volonté, mais de manière à couper toutes les positions
la droite mobile.

Cette droite est dite la *génératrice* [ou l'*arête*] de la surface; et l'on
mme *directrice* la ligne que la génératrice est assujettie à parcourir.

Lorsque la directrice est une circonférence de cercle, la surface, cylin-
que ou conique, est dite à *base circulaire.* — La droite menée par le
itre du cercle *parallèlement* à la génératrice du cylindre, ou bien la
oite qui *joint le centre du cercle au sommet du cône*, se nomme l'*axe* du
lindre ou du cône.

Si, la directrice étant un cercle, le plan de ce cercle est perpendiculaire
'axe, on dit que le cylindre et le cône sont *droits;* ce qui est d'accord
ec les définitions données aux nos 353 et 357.

Si le plan du cercle est oblique par rapport à l'axe, on a un cylindre ou
cône *oblique à base circulaire.*

Enfin, on peut dire, dans le cas du *cône*, que la surface d'un cône droit,
t — La *surface que décrit une droite assujettie à passer par un point donné*
à faire constamment le même angle avec une droite donnée.

No 31. — Nous ferons ici deux remarques importantes.

Première remarque : — De quelque nature que soit la directrice de la sur-
ce cylindrique ou conique, il peut très-bien arriver que la surface soit
lle d'un cylindre ou d'un cône droit.

Pour le prouver, il suffit de concevoir sur la surface d'un cylindre droit
ig. 290) ou d'un cône droit (*fig.* 292), une courbe tout à fait arbitraire, FIG. 290.
quelle pourra alors être considérée comme ayant servi primitivement de FIG. 292.
rectrice à la droite mobile. Mais la surface n'en sera pas moins celle
un cylindre droit, ou d'un cône droit, puisque les conditions de leur dé-
iition sont satisfaites.

Nous ajouterons que sur une surface cylindrique ou conique donnée,
en n'empêche de prendre pour *directrice* une quelconque des courbes
ui y sont tracées, lorsque cette courbe est plus simple que celle qui avait
abord été considérée.

La *seconde* remarque se rapporte au cône.

La génératrice étant une droite indéfinie dans les deux sens, il en ré-
ılte que toute surface conique est nécessairement composée de deux par-
es distinctes qui *s'étendent indéfiniment* de part et d'autre du point fixe.
· Ces deux parties se nomment les *nappes* de la surface; et le point fixe
st dit alors le *centre* de cette surface, la dénomination de *sommet* conve-
ant plus particulièrement au cas où l'on ne considère que l'une des nappes.

No 32. — Nous avons déjà vu (nos 356 et 361) que les surfaces du cy-
indre et du cône droits jouissent de la propriété de pouvoir être déve-
oppées sur un seul et même plan. Or cette propriété appartient essentielle-

ment à toutes les surfaces cylindriques ou coniques. Car, si l'on conçoit une courbe quelconque tracée sur la surface, et qu'après l'avoir partagée dans ses *éléments*, on mène par les extrémités de ceux-ci des génératrices, la surface sera elle-même partagée en une infinité de petites bandes latérales qui seront aussi les *éléments* de la surface. — Or toutes ces bandes sont planes, puisque chacune d'elles est déterminée par deux droites parallèles ou concourantes. On peut donc, comme dans le cas du cylindre ou du cône droit, les développer sur un même plan, par exemple, sur le plan de l'une de ces bandes prolongée indéfiniment.

N° 33. — On nomme en général SURFACES DÉVELOPPABLES les surfaces dont *deux arêtes* ou *génératrices consécutives*, c'est-à-dire infiniment voisines, *sont constamment dans un même plan.* — Leur dénomination provient de ce que ces sortes de surfaces sont susceptibles de s'étendre, de se dérouler, et de se développer sur un plan. Il résulte en effet de leur définition, qu'elles peuvent être considérées comme composées de portions de plan, infiniment étroites dans un sens, mais infiniment allongées dans celui des arêtes; et comme d'ailleurs chaque arête se trouve commune à deux portions consécutives, il s'ensuit qu'on peut leur appliquer ce qui a été dit pour les surfaces cylindriques et coniques.

Fig. 378. Soient aa', bb', cc', dd',... (*fig.* 378) les génératrices infiniment voisines de la surface, lesquelles se coupent en des points a, b, c, d,... très-rapprochés et formant une ligne $abcde$....

Cette ligne, qui est ordinairement une courbe à *double courbure*, se nomme l'*arête de rebroussement* de la surface.

Dans le cône, l'arête de rebroussement se réduit à un point qui est le *centre* de la surface conique. Il n'en existe pas dans les surfaces cylindriques, ou cette arête est située à l'infini.

L'arête de rebroussement divise toute surface développable [autre que le cylindre] en deux portions distinctes que l'on nomme les *nappes* de la surface.

Nous n'en dirons pas davantage sur ce genre de surfaces dont plusieurs ont reçu dans les arts des noms particuliers (*).

Des surfaces gauches.

N° 34. — Toute surface courbe engendrée par une droite, mais de telle manière que deux génératrices consécutives ne soient pas dans un même plan, est dite une SURFACE GAUCHE.

La plus simple de ces surfaces est désignée ordinairement sous le nom de *plan gauche*; et voici comment on l'obtient :

(*) Les surfaces exécutées par les *cartonniers*, les *ferblantiers*, etc., sont généralement des surfaces développables, puisqu'on les construit en *pliant*, en *courbant*, en contournant de diverses manières, des surfaces planes.

Soit ABCD (*fig.* 379) un quadrilatère dont les sommets ne soient pas dans un même plan (auquel cas, on le nomme *quadrilatère gauche*). Menons par le point B la droite BE parallèle à AD, puis par le sommet D opposé à B, la droite DE parallèle à AB : les plans déterminés par les deux systèmes de droites BC et BE, DC et DE, sont respectivement parallèles aux droites AD et AB (nº 318). Cela posé, Fig. 379.

Concevons en premier lieu un plan parallèle au plan EBC : ce plan coupe les droites AB, DC, en deux points M et N, tels que la droite MN est aussi parallèle au plan EBC. En menant ainsi une suite de plans parallèles au plan EBC, il en résultera une suite de droites MN, M'N', M″N″,..., parallèles à ce même plan, dont deux quelconques, MN, M'N', par exemple, ne sauraient être situées dans un même plan : autrement, les quatre points M, M', N, N', et par conséquent aussi les droites AB, DC, seraient situées dans un même plan, ce qui serait contre la nature du quadrilatère ABCD.

L'ensemble de ces droites MN, M'N', M″N″,... constitue une surface courbe qui est la surface demandée.

Les quatre côtés du quadrilatère font nécessairement partie de cette surface; car d'abord, les côtés AB, DC, lui appartiennent, puisqu'ils servent en quelque sorte de *directrices* à la droite mobile. Ensuite, les côtés BC, AD, représentent deux positions particulières de la génératrice, comme étant, l'une, BC, située dans le plan EBC, l'autre, AD, parallèle à BE d'après la construction, et par conséquent parallèle au plan EBC.

La surface s'étend d'ailleurs indéfiniment au delà des sommets du quadrilatère.

Si l'on conçoit maintenant une suite de plans parallèles au plan EDC, on obtiendra également une suite de droites, telles que PQ, dont l'ensemble constituera une surface analogue à la précédente. Mais il est facile de reconnaître que ces deux surfaces coïncident.

En effet, prenons un point quelconque O sur l'une des génératrices MN de la première surface; puis, par le point O et la droite AB, par ce même point et la droite CD, conduisons deux plans OAB, ODC : l'intersection commune de ces deux plans qui, d'après la nature du quadrilatère, ne sauraient se confondre, doit être nécessairement parallèle au plan EDC; car si elle pouvait avoir une direction telle que OK, rencontrant ce plan au point K, le plan ODC se confondrait avec le plan EDC qui contiendrait aussi le point K; et par la même raison, le plan OAB, qui contiendrait le point K, se confondrait avec le plan ODC ou EDC, ce qui est *absurde*.

L'intersection commune des deux plans OAB, ODC, devant être parallèle au plan EDC, représente une des positions, PQ, de la génératrice de la seconde surface. D'où il suit que chacun des points de la génératrice MN de la première appartient à la seconde. *Donc*, etc.

Ainsi, le *plan gauche* peut être défini : — Une *surface engendrée par le mouvement d'une droite* qui glisse *le long de deux côtés opposés d'un quadrila-*

tère gauche, de manière à rester constamment parallèle à un plan, lequel n'est autre que le plan parallèle aux deux autres côtés opposés du quadrilatère (n° 323); — et il résulte de cette définition, comme de ce qui a été dit plus haut, que — *Par chaque point de la surface, on peut toujours mener deux droites qui y soient situées tout entières.*

Nous ajouterons que, d'après une proposition de la théorie des plans parallèles (n° 321), on a pour toutes les positions de la génératrice MN la suite de proportions

$$\begin{aligned} AM &: MB :: DN : NC, \\ AM' &: M'B :: DN' : N'C, \\ AM'' &: M''B :: DN'' : N''C, \ldots \end{aligned}$$

Même remarque par rapport au second mode de génération.

N° 35. — Après le plan gauche, vient la surface *conoïde*, ou la surface engendrée, par exemple, par une droite horizontale qui se meut le long d'une verticale, en s'appuyant en même temps sur une courbe qu'on suppose ordinairement tracée, soit dans un plan vertical, soit sur un cylindre dont l'axe est vertical (*).

Des sections cylindriques et coniques.

Nous terminerons cet *Appendice* par la recherche de la nature des intersections d'un cylindre ou d'un cône par un plan.

FIG. 380. THÉORÈME III. (*Fig.* 380.)

N° 36. — *Dans un cylindre droit circulaire, toute section* AMBM' *oblique aux bases, est une ellipse.*

Concevons deux sphères, de même rayon que le cylindre, tangentes en F et F', au plan sécant, et qui, inscrites dans ce cylindre, touchent sa surface latérale selon les circonférences ayant pour diamètres *ab*, *a'b'*. Joignons les points F, F', à un point quelconque M du contour de la section, et tirons la génératrice KMK' : comme les droites FM, F'M, KK', touchent les sphères aux points F, F', K, et K', on a (n° 103) MF = MK, MF' = MK', et par suite, $FM + F'M = MK + MK' = KK' = aa' = bb'$.

Donc, quelle que soit la position du point M sur la courbe, la somme des distances de ce point aux deux points fixes F, F', est égale à la quantité constante *aa'* ou *bb'*.

(*) Ces sortes de surfaces ont reçu dans les arts, les noms de *voûtes d'arête*, de *trompes coniques*, de *surfaces rampantes*, etc... — Telle est la surface inférieure d'un escalier tournant, dont les directrices sont, — 1° — l'*axe* vertical d'un cylindre qui forme le *noyau* de l'escalier — 2° — une courbe nommée *hélice*, tracée sur la surface d'un autre cylindre aussi vertical.

Cette dernière surface, nommée surface *héliçoïde*, est encore la base de la construction de la *vis*, machine fréquemment employée dans les arts mécaniques.

Cette quantité constante est d'ailleurs égale à AB; car on a

° $Aa' = AF'$ (*même numéro*), $Aa = AF$, d'où $aa' = AF' + AF = FF' + 2AF$;
° $Bb' = BF'$, $Bb = BF$, d'où $bb' = BF' + BF = FF' + 2BF'$;
donc, à cause de $aa' = bb'$, $AF = BF'$, et par conséquent $aa' = bb' = AB$.

Ainsi (n° **49**, 1er *App.*), la courbe est une ellipse dont le grand axe est AB, et les foyers sont les points F, F', où les deux sphères touchent le plan de la section.

THÉORÈME IV. (*Fig.* 381.) FIG. 381

N° **37**. — ***Tout cylindre oblique à bases circulaires*** (n° **30**, 2e ***App.***) ***peut être coupé suivant un cercle par un plan non parallèle aux bases.***

Car le symétrique du plan de la base AB, par rapport à une section MN perpendiculaire aux arêtes, coupe le cylindre suivant une figure A'B' symétrique de cette base, et par conséquent, suivant un cercle qui a pour rayon $O'A' = OA$.

SCOLIE. — Ainsi, en un point quelconque de la surface cylindrique, on peut faire deux sections circulaires égales. — On les nomme *sections antiparallèles*.

THÉORÈME V. (*Fig.* 382, 383, 384.) FIG. 382, 383, 384.

N° **38**. — ***Dans un cône droit circulaire, toute section qui ne passe pas par le sommet, est une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.***

Il peut arriver que le plan coupant rencontre toutes les génératrices du cône d'un même côté par rapport au centre S (*fig.* 382), ou bien qu'il rencontre les unes d'un côté, les autres de l'autre (*fig.* 383), ou bien enfin qu'il soit parallèle à une seule d'entre elles (*fig.* 384). FIG. 382. FIG. 383. FIG. 384.

PREMIER CAS. — (*Fig.* 382.) — Soit SAB le plan conduit suivant l'axe SO perpendiculairement à la section AMBM'. Concevons deux sphères ayant les mêmes centres et les mêmes rayons que la circonférence inscrite au triangle SAB, et celle des circonférences ex-inscrites qui touche AB (n° **127**, *scol.* I); ces sphères touchent le plan coupant en F, F', et la surface conique selon les circonférences ab, $a'b'$, dont les plans sont perpendiculaires à l'axe. Joignons ces points de contact F, F', à un point quelconque M du contour de la section AMBM', et tirons la génératrice SM. Cela posé, puisque FM, F'M, SM, touchent les sphères aux points F, F', K, et K', on a

$$MF = MK, \quad MF' = MK', \quad \text{d'où} \quad MF + MF' = KK' = aa' = bb'.$$

On prouverait d'ailleurs comme pour le cylindre (n° **36**), que

$$aa' = bb' = AB.$$

Ainsi (n° **49**, 1er *App.*), la section est une ellipse dont le grand axe est

AB, et les foyers sont les points F, F′, où les deux sphères touchent le plan de la section.

FIG. 383. DEUXIÈME CAS. — (*Fig.* 383.) — Prolongeant toutes les génératrices du cône pour former le cône opposé, et faisant des constructions et des raisonnements analogues aux précédents, on trouve $F'M - FM = aa' = AB$. D'où il suit que la section MAM′ est une branche d'hyperbole dont l'axe *transverse* est AB, et qui a pour *foyers* les points F, F′, où les deux sphères touchent le plan de la section.

FIG. 384. TROISIÈME CAS. — (*Fig.* 384.) — Si la section, et par suite la droite AB, sont parallèles à la génératrice Sb, il vient encore $MF = MK$; les plans ... et SbK rencontrent le plan de la section selon les droites XY et MT, l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à AB; ainsi, l'on a $MT : Sb :: MK : SK$. Mais $Sb = SK$; donc $MT = MK$, et par suite $MF = MT$.

D'où il résulte que la section MAM′ est une parabole dont F et XY sont le foyer et la directrice (nº 37, 1er *App.*).

SCOLIE. — On voit maintenant pourquoi l'*ellipse*, l'*hyperbole*, et la *parabole*, sont désignées sous le nom commun de *sections coniques*. — Les sections *circulaires* sont comprises dans l'*ellipse*.

FIG. 385.

THÉORÈME VI. (*Fig.* 385.)

Nº 39. — *Tout cône oblique à base circulaire* SACB, *peut être coupé suivant un cercle par un plan non parallèle à la base* ACB.

La surface sphérique déterminée par le sommet S et trois points pris à volonté sur cette circonférence, contient évidemment cette circonférence. Tirons le diamètre SOI de cette sphère: il est facile de prouver que toute section ab faite dans le cône par un plan perpendiculaire à ce diamètre en un point quelconque o, est un cercle.

En effet, menons arbitrairement la génératrice SC qui est rencontrée par le plan ab en un point k; puis joignons les points C et k respectivement aux points I et o par les droites CI, ko : les angles SCI, koI, sont droits, le premier parce qu'il est inscrit dans la demi-circonférence SCI, le second parce que SI est perpendiculaire au plan coupant ab; donc le quadrilatère $ICko$ est inscriptible à une certaine circonférence (nº 129); d'où il résulte que

$$SI \times So = SC \times Sk \text{ (nº 229)}.$$

Soient maintenant SH la hauteur du cône, et kg la perpendiculaire sur SC dans le plan SCH : les angles CHg, gkC, étant droits, le quadrilatère $CHgk$ fournit aussi

$$SC \times Sk = SH \times Sg;$$

donc, à cause de la première relation, on a également

$$SI \times So = SH \times Sg.$$

r, puisque les droites SI, So, SH, sont invariables, la distance Sg est i constante. Donc les droites kS, kg, menées d'un point quelconque k ontour de la section ab aux points fixes S et g, se coupent à angle droit. suite, ce contour est situé entièrement sur la surface sphérique décrite le diamètre Sg. Mais on sait que toute section plane d'une sphère est un le (n° 363); donc, etc.

:olie. — Ainsi, en un point quelconque de la surface d'un cône oblique ase circulaire, on peut, comme sur le cylindre, obtenir deux sections ulaires, que l'on nomme encore des sections *antiparallèles*.

Conclusion. — Les principes qui viennent d'être développés ıs cette section du deuxième Appendice, peuvent être consi·és comme une espèce d'introduction à la seconde partie de la ométrie descriptive, dont le troisième chapitre du livre III con:ue ce que l'on est convenu de nommer les *Préliminaires*.

Cette seconde partie, beaucoup plus étendue, a pour but spé1 de faire connaître des méthodes — 1° — pour *mener des ıns tangents* aux surfaces courbes définies de forme et de position, — 2° — pour *déterminer les intersections* mutuelles de deux plusieurs surfaces, — 3° — lorsqu'il s'agit de surfaces dévepables, pour en *construire le développement*, et *déterminer*, dans développement, *la forme* que prennent ces intersections, etc.... ais un exposé, même fort succinct, de ces méthodes, nous enînerait beaucoup trop loin; et nous renvoyons, pour cet objet, ıx Traités de MM. Monge et Hachette, ainsi qu'aux ouvrages us élémentaires de MM. Leroy et Lefebure de Fourcy.

FIN DU SECOND APPENDICE.



